تصحيح اختبار في مادة الرياضـــــــيات

تصحيح الاختبار الثلاثي الاول شعبة الثالثة رياضيات

التمارين	عناصر الإجابة	التنقيط	
		مجزأة	كاملة
التمرين الاول	1- تعين قيمة العدد الحقيقي a : : $g(x)=a.e^{-x}$ و $g'(x)=-a.e^{-x}$ و لدينا $g'(x)+3g(x)=-a.e^{-x}+3ae^{-x}$ أي $g'(x)+3g(x)=2ae^{-x}$ حتى تكون g حل للمعادلة (E) يكافئ ان $2ae^{-x}=2e^{-x}$ أي ان $a=1$. 2- : $(E'): y'+3y=0$ حلها $y=Ce^{-3x}$ حيث C ثابت حقيقي . 3- البرهان أن الدالة k هي حل للمعادلة (E) إذا وفقط اذا كانت الدالة $(k-g)$ هي حل للمعادلة (E') : -إذا كانت k حل للمعادلة (E) يكافئ $k'(x)+3k(x)=2e^{-x}$ و لدينا $g'(x)+3g(x)=2e^{-x}$ بالطرح نجد أن $g'(x)-k'(x)+3g(x)-3k(x)=0$ أي ان $(g-k)'(x)+3(g-k)(x)=0$ و منه الدالة $(k-g)$ هي حل للمعادلة (E') . -إذا كانت $(k-g)$ حل للمعادلة (E') يكافئ $(g-k)'(x)+3(g-k)(x)=0$ يكافئ ان $k'(x)+3k(x)=g'(x)+3g(x)$ و لدينا $g'(x)+3g(x)=2e^{-x}$ و منه $k'(x)+3k(x)=2e^{-x}$ إذن k حل للمعادلة (E) . إذن حلول المعادلة (E) هي k حيث $k(x)-g(x)=C.e^{-3x}$ و منه $k(x)=g(x)+C.e^{-3x}$ أي أن $k(x)=2e^{-x}+C.e^{-3x}$ و C ثابت حقيقي. **-4** معامل توجيه المماس للمنحنى الممثل للدالة k في النقطة ذات الفاصلة 0 يساوي -4 يعني أن $k'(0)=-4$ نحسب المشتقة $k'(x)=-2e^{-x}-3C.e^{-3x}$ و منه $k'(0)=-2-3C$ نساويها بـ -4 نجد ان $-2-3C=-4$ يكافئ $C=\frac{2}{3}$ **و منه** $k(x)=2e^{-x}+\frac{2}{3}.e^{-3x}$	(1) (1) (1) (1)	4
التمرين الثاني	1- أ- دراسة بواقي قسمة 5^n على 7 حسب قيم العدد الطبيعي n $5^0\equiv1[7]$ و $5^1\equiv5[7]$ و $5^2\equiv4[7]$ و $5^3\equiv6[7]$ و $5^4\equiv2[7]$ و $5^5\equiv3[7]$ و $5^6\equiv1[7]$ نلاحظ أن بواقي قسمة 5^n على 7 تشكل متتالية دورية و دورها 6 و منه باقي قسمة 5^n على 7 لما $n=6k$ هو 1 و لما $n=6k+1$ هو 5 و لما $n=6k+2$ هو 4 و لما $n=6k+3$ هو 6 و لما $n=6k+4$ هو 2 و لما $n=6k+5$ هو 3 .حيث k عدد طبيعي . ب-لدينا $1438=6(239)+4$ هو من الشكل $n=6k+4$ إذن باقي قسمة 5^{1438} على 7 هو 2 . و لدينا $2017=6(336)+1$ هو من الشكل $n=6k+1$ إذن باقي قسمة 5^{2017} على 7 هو 5 . 2- إثبات انه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}+3$ يقبل القسمة على 7 لدينا $26\equiv5[7]$ بالرفع الى قوى $6n+5$ نجد $26^{6n+5}\equiv5^{6n+5}[7]$ و مما سبق نستنتج ان $5^{6n+5}\equiv3[7]$ و منه نجد $26^{6n+5}\equiv3[7]....(1)$ و لدي $47\equiv5[7]$ بالرفع الى قوى $12n+2$ نجد $47^{12n+2}\equiv5^{12n+2}[7]$ و مما سبق نستنتج ان $5^{6(2n)+2}\equiv4[7]$ و منه $47^{12n+2}\equiv4[7]$ بالضرب في 2 نجد $2\times47^{12n+2}\equiv8[7]$ و $8\equiv1[7]$ إذن $2\times47^{12n+2}\equiv1[7]...(2)$ بجمع (1) و (2) نجد $26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}\equiv4[7]$ بإضافة 3 نجد	(1) (1)	4

$26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}+3\equiv7[7]$ و $7\equiv0[7]$ و منه $26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}+3\equiv0[7]$ إذن
$26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}+3$ يقبل القسمة على 7 .

3- لدينا مما سبق $26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}\equiv4[7]$ بإضافة $5n$ نجد
$26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}+5n\equiv4+5n[7]$ العدد $26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}+5n$ قابلا للقسمة
على 7 يعني ان $4+5n\equiv0[7]$ أي ان $5n\equiv-3[7]$ يكافئ $5n\equiv4[7]$ بالضرب في 3 نجد (1)
$15n\equiv12[7]$ أي ان $n\equiv5[7]$

(لان $15\equiv1[7]$ و $12\equiv5[7]$ و منه قيم n المطلوبة هي $n=7k+5 \; : \; k\in Z$)

4- أ. التحقق أن : $n\beta_n-\alpha_n=n$ لدينا $\begin{cases} n\beta_n=n^2+2n \\ \alpha_n=n^2+n \end{cases}$ بالطرح نجد $n\beta_n-\alpha_n=n$ (0,5)

ب. إثبات أن : $PGCD(\beta_n\,;\,\alpha_n)=PGCD(\beta_n\,;\,n)$ نضع

$PGCD(\beta_n\,;\,n)=d'$, $PGCD(\beta_n\,;\,\alpha_n)=d$ لدينا d قاسم α_n , β_n فهو قاسم للعدد
$n\beta_n-\alpha_n$ و منه فهو قاسم للعدد n إذن d قاسم للعددين n و β_n و منه d قاسم لـ d' ....
(3)

$PGCD(\beta_n\,;\,n)=d'$ يعني أن d' قاسم للعددين n و β_n فهو قاسم للعدد $n(n+1)$ و منه d'
قاسم للعدد α_n و منه d' قاسم للعددين α_n و β_n

إذن d' قاسم للعدد d .....(4) (0,25)

من (3) و (4) نجد أن $d=d'$ أي ان $PGCD(\beta_n\,;\,\alpha_n)=PGCD(\beta_n\,;\,n)$

ج. $PGCD(\beta_n\,;\,\alpha_n)$ قاسم للعددين n و β_n فهو قاسم للعدد $\beta_n-n=n+2-n=2$ القيم (0,25)
الممكنة للعدد $PGCD(\beta_n\,;\,\alpha_n)$ هي قواسم 2 أي 1 و 2.

التمرين الثالث — 5

1- تعيين كلا من $f'(2)=0$ معامل توجيه المماس عند النقطة $B(2;e+1)$ و $f'(1)=1$
معامل توجيه المماس عند النقطة $C(1;3)$ وبما ان نقطة $C(1;3)$ انعطاف فإن $f''(1)=0$. (1,5)

2- كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة C هي $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و لدينا (0,5)
$f(1)=3$ و $f'(1)=1$ بالتعويض نجد $y=x+2$.

3- أ- بما أن f مستمرة و رتيبة على $]3;+\infty[$ و تأخذ صورها في المجال $]-\infty;1[$ و 0 من (0,5)
المجال $]-\infty;1[$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من
المجال $]3;+\infty[$.

جدول إشارة $f(x)$ (0,5)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
اشارة $f(x)$		$+$	0	-	

ب - جدول تغيرات الدالة f (0,5)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$e+1$	$\searrow$	$-\infty$

4- المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m للعدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$:
حل المعادلة هو ايجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلته $y=f(m)$ (0,75)
المناقشة :
لما $m\in]-\infty\,;2[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه المعادلة تقبل حلين.
لما $m=2$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة منه المعادلة تقبل حل وحيد.

لما $m\in]2\,;3[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه المعادلة تقبل حلين.

لما $m\in[3;+\infty[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة منه المعادلة تقبل حل وحيد .

(0,25)

5- أ-عبارة $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$: $h'(x)=f'(x)-\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

ب-استنتاج اتجاه تغير الدالة h لدينا $h'(x)=f'(x)-\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ يكافئ $h'(x)=f'(x)\left[\dfrac{f(x)-1}{f(x)}\right]$

إشارتها

x	$-\infty$		2		3		α
اشارة $f'(x)$		+	0	-	‖	-	
اشارة $f(x)-1$		+	‖	+	0	-	
اشارة $h'(x)$		+	0	-	0	+	

(0,25)

و منه h متزايدة على المجالين $[3\,;\alpha[$ و $]-\infty;2]$ و متناقصة على المجال $[2;3]$.

شكل جدول تغيراتها

(0,25)

x	$-\infty$	2	3	α
$h(x)$	1 ↗	$e+1-\ln(e+1)$	↘ 1 ↗	$+\infty$

التمرين الرابع — 7

(1)

1. دراسة استمرارية الدالة g عند 0 لدينا

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} e^{\frac{(x+1)\ln(x)}{x}}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} e^{\ln(x)+\frac{\ln(x)}{x}}=0$ لأن

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln(x)}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln(x)=-\infty$.

(0,5)

2. لدينا $g(x)=e^{\frac{(x+1)\ln(x)}{x}}$ يكافئ $g(x)=e^{\ln(x)+\frac{\ln(x)}{x}}=e^{\ln(x)}.e^{\frac{\ln(x)}{x}}=xe^{\frac{\ln(x)}{x}}$

و منه من اجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$: $\dfrac{g(x)}{x}=e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.

طريقة أخرى $\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{e^{\frac{(x+1)\ln(x)}{x}}}{e^{\ln(x)}}=e^{\frac{(x+1)}{x}\ln(x)-\ln(x)}=e^{\frac{\ln(x)}{x}}$

(0,5)

3. دراسة قابلية اشتقاق g عند 0 لدينا $\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\dfrac{g(h)}{h}=\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0} e^{\frac{\ln(h)}{h}}=0$ لأن

$\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln(h)}{h}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ و منه الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0.

(0,5)

تفسرها هندسيا ان المنحنى (C_g) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

(0,75)

4. حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}}=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$.

5. تبيين ان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)-x}{\ln(x)}=1$ لدينا

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)-x}{\ln(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{g(x)}{x}-1\right)}{\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1}{\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)}$ بوضع $t=\frac{\ln(x)}{x}$

(0,5) لما x يؤول الى $+\infty$ فإن t يؤول 0 و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)-x}{\ln(x)}=\lim\limits_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$

(0,5) استنتاج ان : $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x)\times\frac{g(x)-x}{\ln(x)}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(x)\times1]=+\infty$.

6. دراسة تغيرات الدالة g

المشتقة

(0,5) $g'(x)=\left[xe^{\frac{\ln(x)}{x}}\right]'=\left[e^{\frac{\ln(x)}{x}}+x\left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right)e^{\frac{\ln(x)}{x}}\right]=\left[\frac{x+1-\ln(x)}{x}\right]e^{\frac{\ln(x)}{x}}$

(0,25) إشارة المشتقة متعلقة بـ $x+1-\ln(x)$ نضع $t(x)=x+1-\ln(x)$ ندرس تغيرات h

المشتقة $t'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ موجبة على المجال $[1;+\infty[$ و سالبة على المجال $]0;1]$ إذن

t متزايدة على $[1;+\infty[$ و متناقصة $]0;1]$ إذن فهي تقبل قيمة حدية صغرى هي $t(1)=2$ و

منه نستنتج ان t موجبة على مجال تعريفها و منه $g'(x)$ موجبة إذن الدالة g متزايدة

على $]0;+\infty[$

(0,5) جدول تغيراتها

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0 ↗	$+\infty$

(0,75) 7. حساب $g(1)=1$; $g(2)=2e^{\frac{\ln2}{2}}=2\sqrt{2}$ و $g(3)=3\sqrt[3]{3}$

(0,75) رسم (C_g):