الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

إمتحان البكالوريا التجريبي

الشعبة : رياضيات **دورة : ماي**

إختبار في مادة : **الرياضيات** المدة : **04 ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

1. تحقق أن $5^6 \equiv 1[7]$ و إستنتج أن $5^{2016} \equiv 1[7]$

2. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = 1+5+5^2+5^3+..........+5^n$

أ) بين أنه من أجل n من $\mathbb{N}$ فإن $4S_n = 5^{n+1}-1$ و إستنتج أن S_n و 5^n أوليان فيما بينهما ,

ب) ليكن العدد الصحيح a . بين أن $4S_n \equiv a[7]$ إذا و فقط إذا كان $S_n \equiv 2a[7]$.

ت) بين أن $4S_{2015} \equiv 0[7]$ و إستنتج باقي قسمة S_{2015} على 7

ث) عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم n بحيث يكون 7 قاسم لـ S_n

3. ليكن n عدد طبيعي غير معدوم . نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $5^n x + S_n y = 1$ .... (E)

تحقق أن (5 ، - 4) حل للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ و α عدد حقيقي من المجال $]0,\pi[$

لتكن (S_α) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث : $OM^2 - 2\cos(\alpha)\left[\overrightarrow{OM}.(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\right]+3-4\sin^2(\alpha)=0$

1. أ) أعط معادلة ديكارتية لــ (S_α)

ب) بين أن (S_α) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها I_α و نصف قطرها R_α .

ت) إستنتج مجموعة النقط I_α عندما يمسح α المجال $]0,\pi[$.

2. أ) عين سطوح الكرات (S_α) التي تمر بالمبدأ O .

ب) بين أن O منتصف القطعة $\left[I_{\pi-\alpha}I_\alpha\right]$.

ت) إستنتج أن (S_α) و $(S_{\pi-\alpha})$ متناظران بالنسبة إلى O .

3. ليكن المستوي (P) ذو المعادلة : $x+y+z=0$

أ) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة I_α على (P) .

ب) أدرس تقاطع (P) و (S_α) .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقطة A ذات اللاحقة 2 و (C) الدائرة ذات المركز O و تشمل A.

1. نضع $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$

أ) بين أن $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$

ب) بين أن النقطتين B و C لاحقتاهما على الترتيب α و $\overline{\alpha}$ تنتميان إلى الدائرة (C).

ت) أنشئ (C) و النقط A ، B و C.

2. لتكن D نقطة من الدائرة (C) لاحقتها $2e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]-\pi\ ,\ \pi[$ و E صورة D بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

- برر أن لاحقة النقطة E هي $z_E = \alpha e^{i\theta}$ و علم في نفس الشكل النقطتين D و E.

3. لتكن النقطتان F و G منتصفا القطعتين $[BD]$ و $[CE]$ على الترتيب.

أ) برر أن لاحقة F و G هما $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$ و $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$ على الترتيب.

ب) بين أن $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$ (يمكن إستعمال السؤال 1) أ)) و إستنتج طبيعة المثلث AFG.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{0;1\}$ كالتالي : $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

و ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. أ) أحسب النهايات عند حدود مجالات التعريف.

ت) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f فإن: $f'(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{2x(x-1)}$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

ث) شكل جدول تغيرات الدالة f.

2. اثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلته $y = -\frac{1}{2}x$ هو مقارب مائل للمنحني (C_f).

3. أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة لـ : (Δ).

4. أثبت أن النقطة $\omega\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f).

5. أثبت أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث : $\frac{2}{5} < x_0 < \frac{9}{20}$

6. أرسم (C_f).

7. لنعتبر الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = -\frac{1}{2}|x| + \ln\left|\frac{|x|-1}{|x|}\right|$

أ) عين مجموعة تعريف الدالة g.

ب) ادرس شفعية الدالة g.

ت) بين كيف يمكن رسم المنحني (C_g) للدالة g انطلاقا من (C_f). (رسم (C_g) غير مطلوب).

8. أ) بإستعمال التكامل بالتجزئة أحسب كلا من $\int_2^3 \ln(x)dx$ و $\int_2^3 \ln(x-1)dx$.

ت) إستنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمات التي معادلاتها $x = 2$ و $x = 3$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر المعادلة : $21x-17y=8$ ....$(*)$ حيث x و y عددين طبيعيين .

1. أ- عين الثنائية (x_0,y_0) حل للمعادلة $(*)$.

ب - حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة $(*)$.

2. أ - ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 13 ,

ب – بين أنه إذا كان (α,β) حل للمعادلة $(*)$ فان : $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 0[13]$.

3. أ- بين أنه إذا كان (x,y) حلا للمعادلة $(*)$ و x مضاعف لـ 4 فان $y\equiv 0[4]$.

ب – عين الثنائيات (x,y) حلول المعادلة $(*)$ التي يكون من أجلها : $PGCD(x,y)=4$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية إختر الإقتراح الصحيح مع التعليل

1. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب 1 و i . مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z-i}{z-1}$

حقيقي هي : أ . المستقيم (AB) بإستثناء A ، ب . القطعة المستقيمة $[AB]$ بإستثناء A

جـ . الدائرة التي قطرها $[AB]$ بإستثناء A .

2. إذا كانت طويلة عدد مركب z هي 3 فإن مرافق z هو :

أ . $\frac{3}{z}$ ، ب . $\frac{\sqrt{3}}{z}$ ، جـ . $\frac{9}{z}$

3. ليكن z عدد مركب $|z+i|$ هي :

أ . $|z|+1$ ، ب . $\sqrt{z^2+1}$ ، جـ . $|iz-1|$

4. ليكن z عدد مركب غير معدوم حيث θ عمدة له .عمدة العدد المركب $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\overline{z}}$ هي :

أ . $-\frac{\pi}{3}+\theta$ ، ب . $\frac{2\pi}{3}+\theta$ ، جـ . $\frac{2\pi}{3}-\theta$

5. لتكن النقطة Ω ذات اللاحقة $1-i$.

مجموعة النقط M ذات اللاحقة $z=x+iy$ و تحقق $|z-1+i|=|3-4i|$ لها معادلة من الشكل :

أ . $y=-x+1$ ، ب . $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$ ، جـ . $z=1-i+5e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1. نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $U_0=\frac{3}{2}$ و $U_{n+1}=\frac{4U_n}{U_n+3}$.

أ- بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان : $U_n\succ 1$.

ب- ادرس رتابة المتتالية (U_n) ، ماذا تستنتج ؟

2. لتكن المتتالية $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $V_n=\frac{U_n}{U_n-1}$

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية ، عين أساسها و حدها الأول .

ب) عبر عن V_n بدلالة n ، ثم استنتج أن : $U_n=\frac{3}{3-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$ و أحسب نهاية (U_n) .

3. لتكن المتتالية $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ حيث : $W_n=\frac{V_n}{n^2}$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $W_n=3e^{n\ln\left(\frac{4}{3}\right)-2\ln(n)}$.

ب) أحسب : $\lim_{n\to+\infty}W_n$.

<u>التمرين الرابع :</u> (07 نقاط)

I . نعتبر الدالة f_k المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f_k(x)=\frac{k}{e^{kx}+1}$. (k عدد حقيقي غير معدوم)

نرمز بـ (C_k) للمنحنى الممثل للدالة f_k في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=4cm$ و $\|\vec{j}\|=2cm$.

1. احسب نهايات الدالة f_k عند $-\infty$ و عند $+\infty$ حسب قيم k ثم فسر النتيجة هندسيا .

2. ليكن (D_k) المستقيم المقارب للمنحني (C_k) و الذي معادلته $y=k$

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f_k(x)=k-\frac{k\,e^{kx}}{e^{kx}+1}$

ب) أدرس حسب قيم k الوضع النسبي للمنحني (C_k) و (D_k)

3. أدرس حسب قيم k تجاه تغير الدالة f_k ثم شكل جدول تغيراتها .

4. أكتب معادلة لمماس (Δ_k) للمنحني (C_k) في النقطة ذات الفاصلة O .

II .

1. أثبت أن : $f_3(x)-f_{-3}(x)=3$ مستنتجا طبيعة التحويل الذي يحول المنحني (C_3) إلى المنحني (C_{-3})

2. أنشئ (Δ_3) و (C_3) ثم إستنتج إنشاء (Δ_{-3}) و (C_{-3})

3. α عدد حقيقي موجب تماما .

$A(\alpha)$ هي المساحة بالسنتيمتر مربع للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_3) و المستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ، $x=0$ و $x=\alpha$.

أ) أثبت أن : $A(\alpha)=3\alpha-\ln(e^{3\alpha}+1)+\ln(2)$

ب) أحسب نهاية $A(\alpha)$ لما α يؤول إلى $+\infty$