

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  ؛ نعتبر النقط :

$$D(-1; 4; 0) \text{ و } C(0; 3; -1); B(2; 0; -1), A(1; 1; 0)$$

(1) اثبات أن الرباعي  $ABCD$  متوازي الأضلاع معناه ان  $\overline{AD} = \overline{BC}$  ولدينا  $\overline{AD}(-2; 3; 0)$  و  $\overline{BC}(-2; 3; 0)$  ومنه محققة

اثبات أن المعادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$  هي  $3x + 2y + z - 5 = 0$  لنبين أن النقط الثلاثة تنتمي إلى هذا المستوي

$$3(1) + 2(1) + (0) - 5 = 0 \text{ محققة و منه } A \text{ تنتمي إلى هذا المستوي .}$$

$$3(2) + 2(0) + (-1) - 5 = 0 \text{ محققة و منه } B \text{ تنتمي إلى هذا المستوي .}$$

$$3(0) + 2(3) + (-1) - 5 = 0 \text{ محققة و منه } C \text{ تنتمي إلى هذا المستوي .}$$

و منه المعادلة الديكارتية للمستوي  $(ABC)$  هي  $3x + 2y + z - 5 = 0$ .

(2) تعين معادلة ديكارتية للمستوي  $(Q)$  الذي يحوي المستقيم  $(AB)$  و يُعَامَد المستوي  $(ABC)$  :

ليكن شعاع الناظيمي للمستوي  $(Q)$  هو  $\vec{n}'(a; b; c)$  و الشعاع الناظيمي للمستوي  $(ABC)$  هو  $\vec{n}(3; 2; 1)$  و  $\overline{AB}(1; -1; -1)$

لدينا  $(Q)$  يحوي المستقيم  $(AB)$  و يُعَامَد المستوي يعني أن  $\vec{n}' \cdot \vec{n} = 0$  و  $\vec{n}' \cdot \overline{AB} = 0$  أي ان

$$\begin{cases} a - b - c = 0 \dots (1) \\ 3a + 2b + c = 0 \dots (2) \end{cases} \text{ بالجمع نجد } b = -4a \text{ بالتعويض في المعادلة (1) نجد } a + 4a - c = 0$$

و منه  $c = 5a$  بوضع  $a = 1$  نجد ان  $\vec{n}'(1; -4; 5)$  و منه معادلة  $(Q)$  هي من الشكل

$x - 4y + 5z + d = 0$  و هو يشمل النقطة  $A$  نعوض إحداثياتها في المعادلة الديكارتية نجد

$$1 - 4(1) + 5(0) + d = 0 \text{ و منه } d = 3 \text{ معادلة } (Q) \text{ هي } x - 4y + 5z + 3 = 0$$

(3) تعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من النقطة  $H(-2; 0; -3)$  و العمودي على المستوي  $(Q)$

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = -4t \\ z = 5t - 3 \end{cases} \text{ هو مجموعة النقط } M(x; y; z) \text{ حيث } t \in \mathbb{R}$$

(4) كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة  $S$  الذي مركزه  $H$  و مماس للمستوي  $(ABC)$  هو مجموعة النقط

$$d(H; ABC) = \frac{|3(-2) + 2(0) + (-3) - 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{14} \text{ نحسب } HM = d(H; ABC) \text{ حيث } M(x; y; z)$$

$$\text{و منه } (x+2)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 14 \text{ بالتبسيط نجد } x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6z - 1 = 0$$

دراسة الوضع النسبي بين سطح الكرة  $S$  و المستقيم  $(CD)$

التمثيل الوسيطي للمستقيم  $(CD)$  لدينا  $\overline{CD}(-1;1;1)$  هو  $y = t^2 + 3$ ;  $t \in \mathbb{R}$  و  $x = -t$  و  $z = t - 1$  ومنه نعوض في المعادلة

الديكارثية للسطح  $S$  نجد  $t^2 + (t+3)^2 + (t-1)^2 - 4t + 6(t-1) - 1 = 0$  و  $3t^2 + 6t + 3 = 0$  و هذا يكافئ  $t^2 + 2t + 1 = 0$  و منه للمعادلة حل مضاعف هو  $t = -1$  إذن سطح الكرة يتقاطع مع المستقيم في نقطة أي انه مماس للسطح في النقطة  $K(1;2;-2)$ .

### التمرين الثاني (5 نقاط):

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $C$ :  $(z - \sqrt{3})(z^2 - \sqrt{3}z + 1) = 0$  يكافئ  $z - \sqrt{3} = 0$  او

$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$  أي ان  $z = \sqrt{3}$  و نحسب المميز للمعادلة الثانية  $\Delta = -1$  للمعادلة حلين هما

$$S = \left\{ \sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\} \text{ مجموعة الحلول هي } z'' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \text{ و } z' = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ، لتكن  $A$  ،  $B$  ،  $C$  نقط لواحقتها على الترتيب:

$$z_C = \overline{z_A} \text{ ، } z_B = \sqrt{3} \text{ ، } z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

اثبات أن  $z_A^{1962} + z_C^{2016} = 0$  نكتب العدان على الشكل الأسّي  $z_A = e^{-i\frac{\pi}{6}}$  و  $z_C = e^{i\frac{\pi}{6}}$  و منه

$$z_A^{1962} = e^{-327\pi i} = \cos(-327\pi) + i \sin(-327\pi) = -1 \text{ و } z_A^{1962} = \left( e^{-i\frac{\pi}{6}} \right)^{1962}$$

$$\text{و } z_C^{2016} = \left( e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^{2016} \text{ و } z_C^{2016} = e^{336\pi i} = \cos(336\pi) + i \sin(336\pi) = +1 \text{ و منه } -1 + 1 = 0$$

تعيين قيم العد الطبيعي  $n$  بحيث يكون  $\left( \frac{z_A}{z_C} \right)^n$  حقيقي موجب

لدينا مما سبق و حسب دستور موفر

$$\left( \frac{z_A}{z_C} \right)^n = \left( e^{-\frac{\pi i}{3}} \right)^n = e^{-\frac{n\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{-n\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-n\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

يكون عددا حقيقيا موجب يعني ان  $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 1$  و  $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$  أي ان  $\frac{n\pi}{3} = 2\pi k$  و  $k$  عدد طبيعي و منه

نجد  $n = 6k$  و  $k$  عدد طبيعي

(3) كتابة العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  على الشكل الأسّي لدينا

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

استنتاج طبيعة المثلث  $ABC$  بما أن  $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1$  و  $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}$  فإن المثلث  $ABC$  متقايس الأضلاع .

(4) تعيين  $z_E$  لاحقة النقطة  $E$  صورة  $B$  بالتشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $A$  ونسبته 2 وزاويته  $\frac{\pi}{3}$

$$z_E = 2e^{\frac{\pi}{3}i} z_B + \left(1 - 2e^{\frac{\pi}{3}i}\right) z_A \text{ ومنه}$$

$$z_E = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3}) + (1 - 1 - i\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \text{ ومنه}$$

$$z_E = \sqrt{3} + 3i - i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

اثبات أن النقط  $A$  ؛  $C$  و  $E$  في استقامية لدينا  $z_E - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = 2i$

$$z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = i \text{ ومنه } z_E - z_A = 2(z_C - z_A) \text{ أي أن}$$

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC} \text{ ومنه النقط } A ؛ C \text{ و } E \text{ في استقامية.}$$

(5) تعيين مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  بحيث يكون  $\frac{z - z_A}{z - z_C}$  تخيليا صرفا ( $z \neq z_C$ )

$$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \text{ و هذا يعني أن } \left(\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MA}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ ومنه}$$

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \text{ ومنه مجموعة النقط } M \text{ هي الدائرة ذات القطر } [AC].$$

### التمرين الثالث (4 نقاط)

لتكن  $(u_n)$  متتالية معرفة بـ  $u_0 = \frac{1}{4}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$

(1) تعيين العددين الحقيقيين  $a$  ،  $b$  حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4}$  بالقسمة الاقليدية نجد

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 12 - 10}{u_n + 4} = 3 - \frac{10}{u_n + 4} \text{ ومنه } a = 3 ، b = -10$$

البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $-2 < u_n < 1$

لدينا  $u_0 = \frac{1}{4}$  ومنه  $-2 < u_0 < 1$  محققة

نفرض أن  $-2 < u_n < 1$  و لنبرهن أن  $-2 < u_{n+1} < 1$

**الطريقة الأولى :**

نبرهن أن  $-2 < u_{n+1}$  أي  $2 + u_{n+1} > 0$

$$2 + u_{n+1} = 2 + 3 - \frac{10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 12 - 10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 2}{u_n + 4}$$

نبرهن أن  $u_{n+1} < 1$  أي  $u_{n+1} - 1 < 0$

$$u_{n+1} - 1 = 3 - \frac{10}{u_n + 4} - 1 = \frac{2u_n + 8 - 10}{u_n + 4} = \frac{2u_n - 2}{u_n + 4} = 2 \left( \frac{u_n - 1}{u_n + 4} \right)$$

و منه  $-2 < u_{n+1} < 1$  إذن من أجل عدد طبيعي  $n$  فإن  $-2 < u_n < 1$

**الطريقة الثانية :**

لدينا الدالة المرفقة هي  $f$  حيث  $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$  و دالتها المشتقة هي  $f'(x) = \frac{10}{(x+4)^2}$

و منه  $f$  متزايدة على المجال  $[-2;1]$ .

$-2 < u_n < 1$  و منه نجد  $f(-2) < f(u_n) < f(1)$  كون أن  $f$  متزايدة أي ان  $-2 < u_{n+1} < 1$

و منه من أجل عدد طبيعي  $n$  فإن  $-2 < u_n < 1$

(2) دراسة المتتالية  $(u_n)$  اتجاه تغير المتتالية

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4} = - \frac{(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$$

و منه المتتالية متزايدة .

استنتاج أن  $(u_n)$  متقاربة : بما ان المتتالية متزايدة و محدودة من الاسفل فهي متقاربة .

(3) لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$

تبيين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول لدينا

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{1 - u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 4} + 2}{1 - \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}} = \frac{3u_n + 2 + 2u_n + 8}{u_n + 4 - 3u_n - 2} = \frac{5u_n + 10}{-2u_n + 2} = \frac{5}{2} \left( \frac{u_n + 2}{1 - u_n} \right) = \frac{5}{2} v_n$$

$$v_0 = \frac{u_0 + 2}{1 - u_0} = \frac{\frac{1}{4} + 2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{9}{3} = 3$$

و حدها الأول  $\frac{5}{2}$  و هندسية أساسها  $\frac{5}{2}$  و كتابتها  $v_n = 3 \left( \frac{5}{2} \right)^n$  :  $u_n$  بدلالة  $n$

لدينا  $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$  أي ان  $v_n - u_n v_n = u_n + 2$  و منه  $u_n + u_n v_n = v_n - 2$  أي ان  $u_n(1 + v_n) = v_n - 2$  و

$$u_n = \frac{v_n - 2}{1 + v_n} = \frac{3 \left( \frac{5}{2} \right)^n - 2}{1 + 3 \left( \frac{5}{2} \right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n - 2}{1 + 3\left(\frac{5}{2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n} = 1 \text{ حساب}$$

(4) حساب المجموع:  $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \dots + \frac{5^n}{v_n}$  بوضع  $t_n = \frac{5^n}{v_n} = \frac{5^n}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n} = \frac{2^n}{3}$  و منه  $(t_n)$  متتالية هندسية

أساسها 2 و حدها الأول  $t_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{3}$  و منه  $S_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n = t_0 \left( \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \right) = \frac{1}{3} (2^{n+1} - 1)$

### التمرين الرابع (7 نقاط):

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(I) لتكن الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  بـ  $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$

1- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x > 0$  :  $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

و  $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln(x)$  و  $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة  $g$  مما سبق نجد أن  $g'(x) \geq 0$  و منه الدالة  $g$  متزايدة على  $]0, +\infty[$ .

2- دراسة إشارة  $g(x)$  بما أن  $g(1) = 0$  و الدالة  $g$  متزايدة على  $]0, +\infty[$  نتلخص الإشارة في الجدول الموالي

$x$	0	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	-	0	+

(II) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  بـ:  $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$  . وليكن  $(C)$  منحناها البياني في المستوي السابق .

1- اثبات أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$  نضع  $t = \sqrt{x}$  و منه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (t) = +\infty$  و منه

لأن  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln(t)}{t} \right] = 0$  (التزايد المقارن)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2 \ln(t)}{t} \right]^2 = 0$

حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = +\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = 0$

التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0, +\infty[$  لدينا :  $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$  ؛

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + x - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (-\ln x)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 = f(x)$$

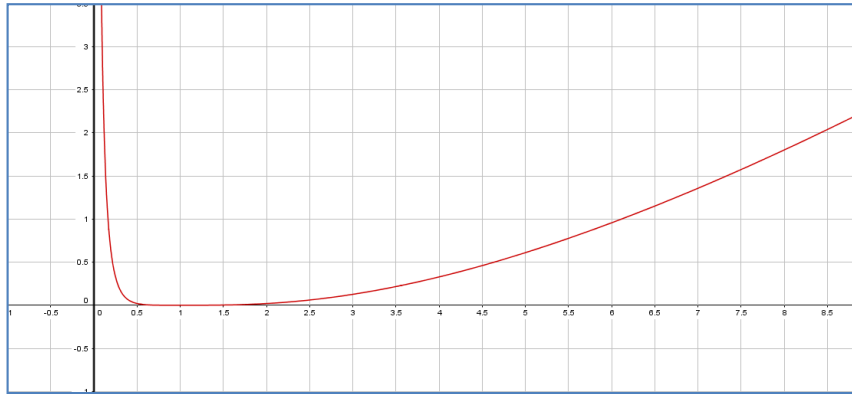
حساب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و منه المنحني  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقارب عموديا معادلته  $x = 0$  .

2- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0, +\infty[$  ؛  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$  بالحساب  $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$  و منه

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2 \frac{1}{x} (\ln x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \ln x}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{x} - 2 \ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$



3- رسم المنحني (C) :

4- بين أن الدالة  $h : x \mapsto x \ln x - x$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \ln(x)$  على  $]0, +\infty[$

$$h'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

باستعمال التكامل بالتجزئة

تبين أن  $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$  بوضع  $u'(x) = 1$  و  $v(x) = (\ln x)^2$  و منه  $u(x) = x$  و  $v'(x) = \frac{2}{x} (\ln x)$

$$\int_1^e u'(x)v(x)dx = \left[ x (\ln(x))^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln(x)dx = e - 2 \left[ x \ln x - x \right]_1^e = e - 2$$

5- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما  $x = e$  و  $x = 1$

$$\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left[ x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 \right] dx$$

$$\int_1^e f(x)dx = \frac{e^2}{2} + 1 - 2e + \frac{3}{2} - e + 2 = \left( \frac{e^2}{2} - 3e + \frac{9}{2} \right) u.a$$

انتهى الموضوع الأول

## الموضوع الثاني

### التمرين الاول (5 نقاط) :

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $z^2 - 6z + 10 = 0$  نحسب المميز  $\Delta = -4$  للمعادلة حلين هما  $z' = 3+i$  و  $z'' = 3-i$

استنتاج في  $\mathbb{C}$  حلول المعادلة ذات المجهول  $z$  حيث :  $(\bar{z} + 2)^2 - 6(\bar{z} + 2) + 10 = 0$  مما سبق نجد أن للمعادلة تكافؤ الأخيرة  $\bar{z} + 2 = 3+i$  أو  $\bar{z} + 2 = 3-i$  أي أن  $\bar{z} = 1+i$  أو  $\bar{z} = 1-i$  ومنه  $z = 1+i$  أو  $z = 1-i$  هما حلّ المعادلة

(2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط  $A, B, C, D$  لاحتقاتها

$$z_D = 1-i \text{ و } z_C = 1+i \text{ و } z_B = 3+i \text{ و } z_A = 3-i$$

تعيين الكتابة المركبة للدوران  $r$  الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  : هي  $z' - z_A = i(z - z_A)$  أي  $z' - 3+i = i(z - 3+i)$  و منه  $z' = iz + 2 - 4i$

(3) النقطة  $E$  التي لاحتقتها  $z_E = 7 - 3i$  و صورتها بالدوران  $r$

التحقق أن لاحقة  $F$  هي  $z_F = 5 + 3i$  لدينا  $z_F = iz_E + 2 - 4i = i(7 - 3i) + 2 - 4i = 7i + 3 + 2 - 4i = 5 + 3i$  محققة

تعيين لاحقة النقطة  $H$  صورة  $F$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{AE}$  أي  $z_H - z_F = z_E - z_A$  و منه  $z_H = z_F + z_E - z_A = 5 + 3i + 7 - 3i - 3 + i = 9 + i$

(4) تمثيل النقط  $A, B, E, F, H$  و

تعيين بدقة طبيعة الرباعي  $AEHF$  متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة و فيه ضلعان متجاورتان متقايسان فهو مربع .

(5) تعيين المجموعة  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  ذات

اللاحقة  $z$  حيث :  $z = 1 - i + ke^{-i\frac{\pi}{4}}$  وذلك عندما

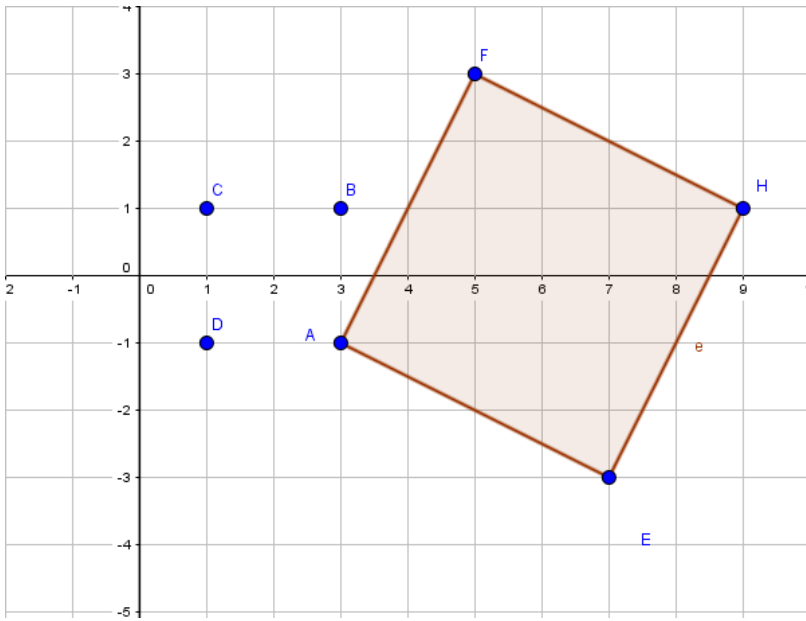
$k$  يمسح  $\mathbb{R}^*$  لدينا  $z = 1 - i + ke^{-i\frac{\pi}{4}}$  يعني أن

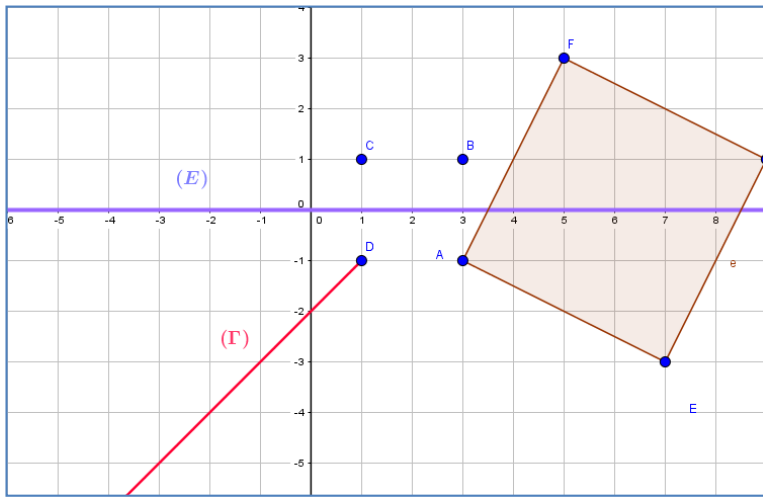
$$z - (1 - i) = ke^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\arg[z - (1 - i)] = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ و هذا يعني}$$

$$\left( \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{DM} \right) = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ و } k \text{ عدد صحيح}$$

مجموعة النقط هي نصف مستقيم  $[DM)$  و الذي معامل توجيهه  $-1$  ( أي موازي للمنصف الثاني ذي المعادلة  $(y = -x$





تعيين المجموعة  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحة  
حيث  $z$  :  $|z-1-i|=|z-1+i|$  تكافئ  $CM = DM$   
مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة  $[CD]$  .

### التمرين الثاني (4 نقاط) :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  
 $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$   
ليكن  $(p_1)$  و  $(p_2)$  المستويان ذا المعادلتين  
الديكاريتين على الترتيب :

$$x-2y+4z-9=0 \quad ; \quad -2x+y+z-6=0$$

(1) تبين أن  $(p_1)$  و  $(p_2)$  متعامدان : شعاعيهما الناظميان  $\vec{n}(-2; 1; 1)$  و  $\vec{n}(1; -2; 4)$  على الترتيب  
نحسب الجداء السلمي نجد  $1(-2)+(-2)1+4(1)=0$  و منه متعامدان .  
نرمز ب  $(D)$  إلى مستقيم تقاطع المستويين  $(p_1)$  و  $(p_2)$  .

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases} : t \in R \quad \text{هو : } (D) \text{ تمثيلا وسيطيا للمستقيم}$$

$(D)$  محتواة في  $(p_1)$  يعني  $(-7+2t)-2(-8+3t)+4(t)-9=0$  يعني ان  $0=0$  محققة .  
 $(D)$  محتواة في  $(p_2)$  يعني  $-2(-7+2t)+(-8+3t)+(t)-6=0$  يعني ان  $0=0$  محققة و منه  $(D)$  هو  
تقاطعهما .

(2) لتكن  $M$  نقطة كيفية من المستقيم  $(D)$  و لتكن  $A$  النقطة ذات الإحداثيات  $(-9; -4; -1)$  .  
التحقق أن النقطة  $A$  لا تنتمي إلى المستوي  $(p_1)$  و لا إلى المستوي  $(p_2)$

$$(-9)-2(-4)+4(-1)-9=0 \quad \text{أي ان} \quad -18+4=0 \quad \text{غير محققة و منه} \quad A \text{ لا تنتمي الى} \quad (p_1)$$

$$-2(-9)+(-4)+(-1)-6=0 \quad \text{أي ان} \quad 18-11=0 \quad \text{غير محققة و منه} \quad A \text{ لا تنتمي الى} \quad (p_2)$$

$$\text{ثم بين أن :} \quad AM^2 = 14t^2 - 14t + 21 \quad \text{لدينا} \quad M(-7+2t; -8+3t; t) \quad \text{و منه}$$

$$\overrightarrow{AM}(2+2t; -4+3t; t+1) \quad \text{و منه} \quad AM^2 = (2+2t)^2 + (-4+3t)^2 + (t+1)^2 \quad \text{بالنشر و}$$

$$\text{التبسيط نجد} \quad AM^2 = 14t^2 - 14t + 21 \quad \text{و هو المطلوب .}$$

$$(3) \text{ لتكن } f \text{ الدالة العددية المعرفة على } R \text{ ب : } f(t) = 14t^2 - 14t + 21$$

دراسة تغيرات الدالة  $f$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{النهايات}$$

المشتقة :  $f'(x) = 28t - 14$  تنعدم عند  $\frac{1}{2}$  و منه  $f$  متزايدة على المجال  $[0; +\infty[$  و متناقصة على المجال  
] $-\infty; 0]$  .



$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{35}{2}$	$+\infty$

أستنتاج إحداثيات  $M$  التي تكون فيها المسافة  $AM$  أصغرية و نرمل لها في هذه

الحالة ب  $H$  : من جدول تغيرات  $f$  نستنتج أن قيمة  $t = \frac{1}{2}$  و  $AH = \sqrt{\frac{35}{2}}$  و منه  $H\left(-6; -\frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right)$

(4) ليكن  $(Q)$  المستوي العمودي على  $(D)$  و المار من النقطة  $A$  الشعاع الناظيمي للمستوي  $(Q)$  هو شعاع توجيه للمستقيم  $(D)$  و منه شعاعه الناظيمي هو  $\vec{n}''(2; 3; 1)$  معادلته الديكارتية من الشكل  $2x + 3y + z + d = 0$  بما انه مار بالنقطة  $A$  يعني أن  $2(-9) + 3(-4) + (-1) + d = 0$  و منه  $d = 31$  و منه المعادلة الديكارتية للمستوي  $(Q)$  هي  $2x + 3y + z + 31 = 0$ .

البرهان أن  $H$  هي المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستقيم  $(D)$  : يجب أن تكون  $H$  نقطة من  $(D)$  و الشعاع  $\overrightarrow{AH}$  هو شعاع عمودي على شعاع توجيه هذا المستقيم

$\overrightarrow{AH}\left(3; -\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$  و شعاع توجيه المستقيم  $(D)$  هو  $\vec{n}''(2; 3; 1)$  نحسب الجداء السلمي

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}'' = 6 - \frac{15}{2} + \frac{3}{2} = \frac{-12 + 12}{2} = 0 \text{ و منه محققة}$$

### التمرين الثالث (4 نقاط) :

$(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $N$  كما يلي :  $u_0 = 2$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$

$$(1) \text{ حساب : } u_1 = 5 - \frac{4}{2} = 3 \text{ و } u_2 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $2 \leq u_n \leq 4$

لدينا  $2 \leq u_1 \leq 4$  محققة

نفرض أن  $2 \leq u_n \leq 4$  و لنبرهن أن  $2 \leq u_{n+1} \leq 4$

$2 \leq u_n \leq 4$  بالقلب نجد  $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{4}$  بالضرب في  $-4$  نجد  $-2 \leq -\frac{4}{u_n} \leq -1$  بإضافة 5 نجد

$3 \leq 5 - \frac{4}{u_n} \leq 4$  أي ان  $2 \leq 3 \leq u_{n+1} \leq 4$  و منه  $2 \leq u_{n+1} \leq 4$  إذن من اجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $2 \leq u_n \leq 4$ .

(2) تبين أن  $(u_n)$  متزايدة : نحسب الفرق

$$u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{4}{u_n} - u_n = \frac{5u_n - 4 - u_n^2}{u_n} = \frac{(4 - u_n)(-1 + u_n)}{u_n}$$

الفرق موجب لان  $2 \leq u_n \leq 4$  فإن  $4 - u_n \geq 0$  و  $-1 + u_n \geq 0$  و هو المطلوب .

استنتاج أنها متقاربة : بما المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة .

$$(3) \text{ البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$$

$$\text{لدينا } 4 - u_{n+1} = 4 - 5 + \frac{4}{u_n} = -1 + \frac{4}{u_n} = \frac{-u_n + 4}{u_n} = \frac{1}{u_n}(4 - u_n)$$

$$\text{و منه } 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) \text{ , } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$$

$$(4) \text{ استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ مما سبق نجد أن } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$$

$$\text{و منه } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}(4 - u_{n-1}) \right] \text{ أي } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2}(4 - u_{n-1}) \text{ و ها كذا}$$

$$\text{... إلى أن } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^3}(4 - u_{n-2}) \text{ أي ان } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2}(4 - u_{n-1}) \leq \frac{1}{2^2} \left[ \frac{1}{2}(4 - u_{n-2}) \right]$$

$$\text{نصل إلى التعميم } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4 - u_0) \text{ و منه } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4 - u_0) \text{ اي ان}$$

$$(2) 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \text{ اي ان } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n} \text{ بتعويض نجد } 0 \leq 4 - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ و هو المطلوب .}$$

$$\text{بحساب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{ بما أن } 0 \leq 4 - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ } n' = n + 1 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0 \text{ فحسب الحصر}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ نجد}$$

التمرين الرابع (7 نقاط) :

لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$  .

حيث  $a$  ؛  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- تعيين الأعداد الحقيقية  $a$  ؛  $b$  و  $c$  بحيث يقبل  $(C_f)$  عند النقطة  $A(0; -3)$  مماسا معلم توجيهه 3 و العدد

$$\sqrt{3} \text{ حل للمعادلة } f(x) = 0$$

$$f(0) = -3 \text{ و هذا يعني } c = -3$$

$$\text{ولدينا } f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$$

$$f'(0) = 3 \text{ يعني أن } b - c = 3 \text{ ; و منه } b = 0$$

$$f(\sqrt{3}) = 0 \text{ يعني ان } f(\sqrt{3}) = (3a - 3)e^{-\sqrt{3}} = 0 \text{ و منه } a = 1$$

2- نضع  $a = 1$  ،  $b = 0$  ،  $c = -3$  تصبح  $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$

حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$  لأنه بوضع  $x = 2t$  نجد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{4t^2}{e^{2t}} \right] = 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{t}{e^t} \right)^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)e^{-x} = +\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  : المشتقة :  $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$  إشارتها من إشارة  $(-x^2 + 2x + 3)$  تتعدم عند العددين 3 و -1 و منه  $f$  متناقصة على المجالين  $]-\infty; -1]$  و  $[3; +\infty[$  متزايدة على المجال  $[-1; 3]$

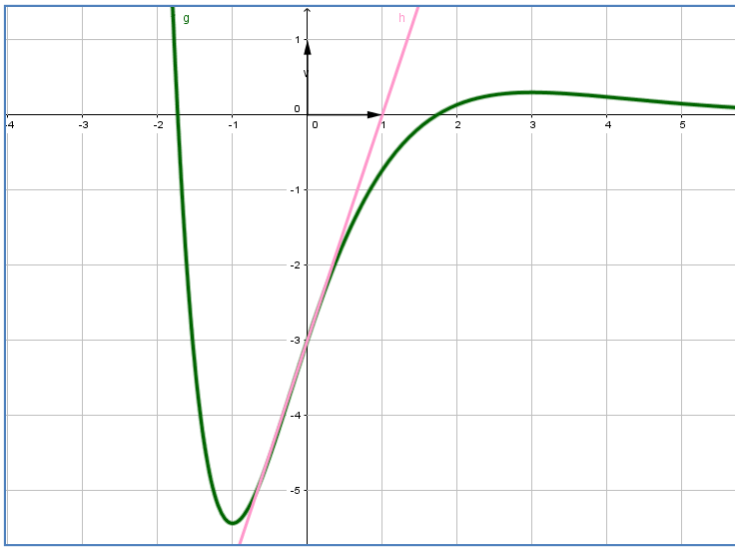
و شكل جدول تغيراتها :

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-2e$	$\frac{6}{e^3}$	$0$

3- كتابة معادلة لـ  $(T)$  مماس المنحنى  $(C_f)$  عند النقطة التي فاصلتها  $x = 0$  معادلة المماس هي  $y = 3x - 3$

تعيين إحداثيات نقط تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل

$f(x) = 0$  يكافئ  $x^2 - 3 = 0$  اي ان  $x = \sqrt{3}$  او  $x = -\sqrt{3}$  نقطتي التقاطع هما  $B(\sqrt{3}; 0)$  و  $C(-\sqrt{3}; 0)$



4- رسم  $(T)$  و  $(C_f)$

5- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$$

$$\text{و } f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x^2 - 4x - 1)e^{-x} \text{ أي } f''(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$$

$$\text{و منه } f(x) + 2f'(x) + f''(x) = (x^2 - 3 - 2x^2 + 4x + 6 + x^2 - 4x - 1)e^{-x} = 2e^{-x}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

الدالة  $F(x) = -2f(x) - f'(x) - 2e^{-x}$  حيث  $F(x) = -2f(x) - f'(x) - 2e^{-x}$  أي  $F(x) = -2(x^2 - 3)e^{-x} - (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} - 2e^{-x}$  و منه الدالة الأصلية للدالة  $f$  هي

$$F(x) = -2(x^2 - 3)e^{-x} - (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} - 2e^{-x}$$

$$\text{أي } F(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x} \text{ و } F(x) = (-2x^2 + 6)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x} - 2e^{-x}$$

6- حساب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني  $(C_f)$  ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتاهما  $x=1$  و  $x=3$  هي

$$A = \int_1^{\sqrt{3}} -f(x)dx + \int_{\sqrt{3}}^3 f(x)dx = [-F(x)]_1^{\sqrt{3}} + [F(x)]_{\sqrt{3}}^3 = (4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}$$

$$A = [(4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}]u.a$$

7-  $m$  وسيط حقيقي ناقش بيانها وحسب قيم  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $x^2 - 3 + me^x = 0$

$$\text{المعادلة تكافئ } me^x = -(x^2 - 3) \text{ أي أن } -m = (x^2 - 3)e^{-x} \text{ يكافئ } -m = f(x)$$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحني  $(C_f)$  المستقيم  $(\Delta_m)$  ذو المعادلة  $y = -m$

**المناقشة**

لما  $-m < -2e$  أي أن  $m > 2e$  نلاحظ أن  $(C_f)$  و  $(\Delta_m)$  لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

لما  $-m = -2e$  أي أن  $m = 2e$  نلاحظ أن  $(C_f)$  و  $(\Delta_m)$  يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة و منه

للمعادلة حل وحيد سالب.

لما  $-m > -2e$  أي أن  $3 < m < 2e$  نلاحظ أن  $(C_f)$  و  $(\Delta_m)$  يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبتان

ومنه للمعادلة حلين سالبين

لما  $-m = -3$  أي أن  $m = 3$  نلاحظ أن  $(C_f)$  و  $(\Delta_m)$  يتقاطعان في نقطتين إحداها فاصلتها معدومة و الأخرى

فاصلتها سالبة و منه للمعادلة حلين إحداها معدوم و الآخر سالب .

لما  $-3 > -m \geq 0$  أي ان  $0 \leq m < 3$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة .

لما  $0 > -m > \frac{6}{e^3}$  أي ان  $-\frac{6}{e^3} < m < 0$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

لما  $-\frac{6}{e^3} = -m$  أي أن  $m = -\frac{6}{e^3}$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة

لما  $\frac{6}{e^3} > -m$  أي ان  $m < -\frac{6}{e^3}$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .

انتهى الموضوع الثاني

اختبار بكالوريا تجريبي شعبة الثالثة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التنقيط		عناصر الإجابة	التمارين
كاملة	مجزأة		
04 ن		<p>(1) اثبات أن الرباعي <math>ABCD</math> متوازي الأضلاع معناه ان <math>\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}</math> ولدينا <math>\overrightarrow{AD}(-2; 3; 0)</math> و <math>\overrightarrow{BC}(-2; 3; 0)</math> و منه محففة</p> <p>اثبات أن المعادلة ديكارتية للمستوي <math>(ABC)</math> هي <math>3x + 2y + z - 5 = 0</math> لنبين أن النقط الثلاثة تنتمي إلى هذا المستوي <math>A</math> و <math>B</math> و <math>C</math></p> <p>(2) تعين معادلة ديكارتية للمستوي <math>(Q)</math> الذي يحوي المستقيم <math>(AB)</math> و يُعامد المستوي <math>(ABC)</math> ليكن شعاع الناظمي للمستوي <math>(Q)</math> هو <math>\vec{n}(1; -4; 5)</math> و منه معادلة <math>(Q)</math> هي <math>x - 4y + 5z + 3 = 0</math></p> <p>(3) تعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من النقطة <math>H(-2; 0; -3)</math> و العمودي على المستوي <math>(Q)</math></p> $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = -4t : t \in \mathbb{R} \\ z = 5t - 3 \end{cases}$ <p>(4) كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة <math>S</math> الذي مركزه <math>H</math> و مماس للمستوي <math>(ABC)</math> نحسب</p> $d(H; ABC) = \frac{ 3(-2) + 2(0) + (-3) - 5 }{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{14}$ $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6z - 1 = 0$ <p>دراسة الوضع النسبي بين سطح الكرة <math>S</math> و المستقيم <math>(CD)</math></p> $\begin{cases} x = -t \\ y = t + 3 : t \in \mathbb{R} \\ z = t - 1 \end{cases}$ <p>و منه نعوض في المعادلة الديكارتية للسطح <math>S</math> نجد <math>t^2 + (t+3)^2 + (t-1)^2 - 4t + 6(t-1) - 1 = 0</math> و منه <math>3t^2 + 6t + 3 = 0</math> و هذا يكافئ <math>t^2 + 2t + 1 = 0</math> و منه للمعادلة حل مضاعف هو <math>t = -1</math> إذن سطح الكرة يتقاطع مع المستقيم في نقطة أي انه مماس للسطح في النقطة <math>K(1; 2; -2)</math>.</p>	التمرين الأول
05 ن		<p>(1) حلول المعادلة <math>z = \sqrt{3}</math> و نحسب المميز <math>\Delta = -1</math> للمعادلة حلين هما <math>z' = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i</math> و <math>z'' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i</math></p> <p>(2) اثبات أن <math>z_A^{1962} + z_C^{2016} = 0</math> نكتب العدان على الشكل الأسّي <math>z_A = e^{-i\frac{\pi}{6}}</math> و <math>z_C = e^{i\frac{\pi}{6}}</math> و <math>z_A^{1962} = e^{-327\pi} = -1</math> و <math>z_C = e^{i\frac{\pi}{6}}</math> و <math>z_C^{2016} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2016} = 1</math> و منه <math>-1 + 1 = 0</math></p> <p>تعيين قيم العد الطبيعي <math>n</math> بحيث يكون <math>\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n</math> حقيقي موجب</p>	التمرين الثاني

	0.5	$n = 6k$ و $k$ عدد طبيعي	
	0.5	(3) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$	
	0.5	المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.	
	0.5	(4) تعيين $z_E$ لاحقة النقطة $E$ : $z_E = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$	
	1	اثبات أن النقط $A$ ؛ $C$ و $E$ في استقامية لدينا $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$ و منه النقط $A$ ؛ $C$ و $E$ في استقامية.	
	0.5	(5) تعين مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ بحيث يكون $\frac{z - z_A}{z - z_C}$ تخيليا صرفا	
	1	$(z \neq z_C)$ يعني أن $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$ و منه مجموعة النقط $M$ هي الدائرة ذات القطر $[AC]$ .	
4 ن	0.25	(1) تعيين العددين الحقيقيين $a$ ، $b$ : $a = 3$ ، $b = -10$	<u>التمرين الثالث</u>
	0.25	البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $-2 < u_n < 1$	
	0.5	لدينا $u_0 = \frac{1}{4}$ و منه $-2 < u_0 < 1$ محققة نفرض أن $-2 < u_n < 1$ و لنبرهن أن $-2 < u_{n+1} < 1$ نبرهن أن $-2 < u_{n+1}$ أي $2 + u_{n+1} > 0$ $2 + u_{n+1} = 2 + 3 - \frac{10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 12 - 10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 2}{u_n + 4}$ نبرهن أن $u_{n+1} < 1$ أي $u_{n+1} - 1 < 0$ لان $u_{n+1} - 1 = 3 - \frac{10}{u_n + 4} - 1 = \frac{2u_n + 8 - 10}{u_n + 4} = \frac{2u_n - 2}{u_n + 4} = 2\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 4}\right)$ $-2 < u_n < 1$ و منه $u_{n+1} < 1$ و منه $-2 < u_{n+1} < 1$ إذن من أجل عدد طبيعي $n$ فإن $-2 < u_n < 1$	
	0.25	(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ : $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$ الفرق موجب لأن $-2 < u_n < 1$ و منه المتتالية متزايدة.	
	0.25	استنتاج أن $(u_n)$ متقاربة : بما ان المتتالية متزايدة و محدودة من الاسفل فهي متقاربة .	
	0.25	(3) لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$	
	0.25	تبيين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول لدينا $v_{n+1} = \frac{5}{2}v_n$ و منه المتتالية	
	0.25	$(v_n)$ هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ و حدها الأول $v_0 = 3$	
	0.25	كتابة $v_n$ و $u_n$ بدلالة $n$ : $v_n = 3\left(\frac{5}{2}\right)^n$	
	0.25		

0.25

$$u_n = \frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n - 2}{1 + 3\left(\frac{5}{2}\right)^n} \text{ و منه}$$

0.25

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \text{ حساب}$$

1

$$S_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1) \text{ منه} \quad S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \dots + \frac{5^n}{v_n} \text{ حساب المجموع: (4)}$$

7 ن

التمرين الرابع

(I) لنكن الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  بـ :  $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$

0.5

$$-1 \text{ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x > 0 : g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

0.5

استنتاج اتجاه تغير الدالة  $g$  مما سبق نجد أن  $g'(x) \geq 0$  و منه الدالة  $g$  متزايدة على  $]0, +\infty[$ .

-2 دراسة إشارة  $g(x)$  بما أن  $g(1) = 0$  و الدالة  $g$  متزايدة على  $]0, +\infty[$  نتلخص الإشارة في

الجدول الموالي

0.5

$x$	0	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	-	0	+

(II) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  بـ :  $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$  اثبات أن

0.5

$$-1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0 \text{ نضع } t = \sqrt{x} \text{ و منه } \lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty \text{ و منه}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln(t)}{t} \right] = 0 \text{ لان } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2 \ln(t)}{t} \right]^2 = 0$$

0.25

$$\text{حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

0.25

التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0, +\infty[$  :  $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$  ؛ ل

0.25

حساب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  و منه المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيماً مقارب

0.25

عمودياً معادلته  $x = 0$ .

0.5

-2 تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0, +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$  ؛

0.5

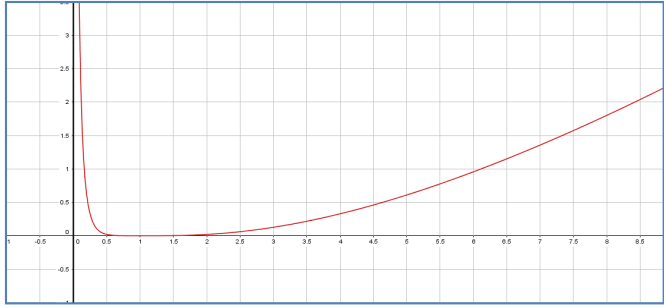
جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

-3 رسم المنحنى  $(C)$  :

-4 بين أن الدالة  $h : x \mapsto x \ln x - x$  هي دالة أصلية للدالة  $\ln(x) \mapsto x$  على  $]0, +\infty[$

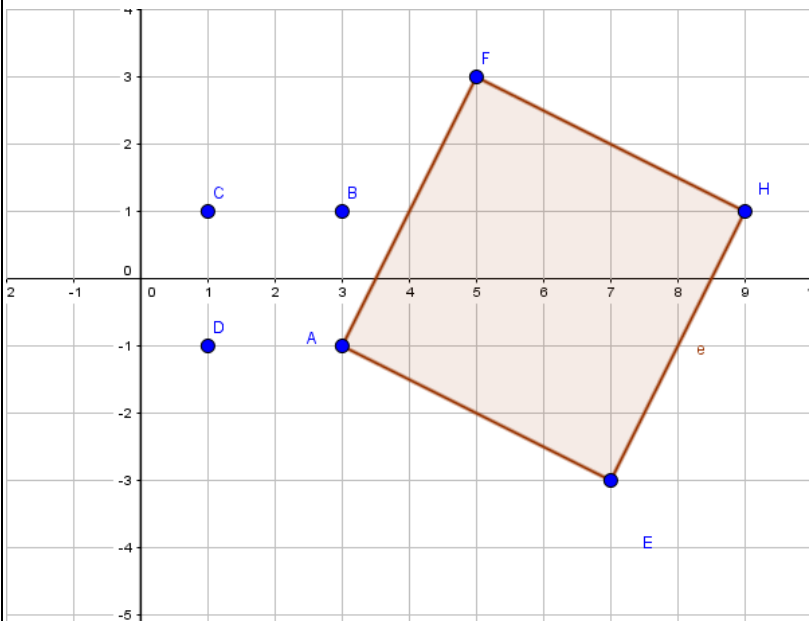


1	<p>0.25</p> <p>0.75</p> <p>1</p>	 <p>محقة <math>h'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x</math>      باستعمال التكامل بالتجزئة</p> <p>تبين أن <math>\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2</math> بوضع <math>u'(x) = 1</math> و <math>v(x) = (\ln x)^2</math> و منه <math>u(x) = x</math> و</p> <p>و <math>u'(x) = 1</math> و منه <math>v'(x) = \frac{2}{x}(\ln x)</math></p> <p><math>\int_1^e u'(x)v(x)dx = \left[ x (\ln(x))^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln(x)dx = e - 2 \left[ x \ln x - x \right]_1^e = e - 2</math></p> <p>5- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما <math>x = e</math> و <math>x = 1</math></p> <p><math>\int_1^e f(x)dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 + \ln(x) - 2x \right]_1^e - e + 2</math> و منه <math>\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left[ x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 \right] dx</math></p> <p><math>\int_1^e f(x)dx = \frac{e^2}{2} + 1 - 2e + \frac{3}{2} - e + 2 = \left( \frac{e^2}{2} - 3e + \frac{9}{2} \right) u.a</math></p>	
---	----------------------------------	--	--

الموضوع الثاني

التنقيط		عناصر الإجابة	التمارين
كاملة	مجزأة		
04 ن		<p><u>التمرين الأول (5 نقاط):</u></p> <p>(1) حلو المعادلتين في نحسب المميز <math>\Delta = -4</math> للمعادلة حلين هما <math>z' = 3 - i</math> و <math>z'' = 3 + i</math></p> <p>استنتاج حلول المعادلة <math>0 = 10 - 6(\bar{z} + 2) + (\bar{z} + 2)^2</math> مما سبق نجد أن منه <math>z = 1 + i</math> او <math>z = 1 - i</math> هما حلي المعادلة الأخيرة</p> <p>(2) تعيين الكتابة المركبة للدوران <math>r</math> الذي مركزه <math>A</math> وزاويته <math>\frac{\pi}{2}</math> : هي</p> <p><math>z' = iz + 2 - 4i</math> و منه <math>z' - 3 + i = i(z - 3 + i)</math> أي <math>z' - z_A = i(z - z_A)</math></p> <p>(3) التحقق أن لاحقة <math>F</math> هي <math>z_F = 5 + 3i</math> لدينا <math>z_F = 5 + 3i</math> محقة</p> <p>تعيين لاحقة النقطة <math>H</math> صورة <math>F</math> بالانسحاب الذي شعاعه <math>\overline{AE}</math> أي <math>z_H = 9 + i</math>.</p>	التمرين الأول

0.5



4) تمثيل النقاط  $A, B, E, F, H$

تعيين بدقة طبيعة  
الرباعي  
 $AEFH$   
متوازي أضلاع  
فيه زاوية قائمة و  
فيه ضلعان  
متجاورتان  
متقايسان فهو  
مربع .

5) تعيين المجموعة

$(\Gamma)$  هي

نصف مستقيم

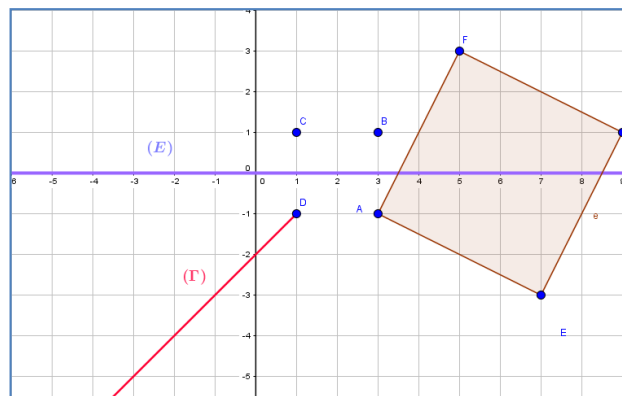
$[DM]$  و الذي معامل توجيهه  $-1$  ( أي موازي للمنصف الثاني ذي المعادلة  $y = -x$  )

تعيين المجموعة  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  حيث :  $|z-1-i| = |z-1+i|$

تكافئ  $CM = DM$  مجموعة النقط

هي محور القطعة المستقيمة  $[CD]$

0.5



4

0.5

1- تبين أن  $(p_1)$  و  $(p_2)$  متعامدان : شعاعيهما الناظميان  $\vec{n}(-2; 1; 1)$  و

$\vec{n}(1; -2; 4)$  على الترتيب نحسب الجداء السلمي نجد

$1(-2) + (-2)(1) + 4(1) = 0$  و منه متعامدان .

نرمز بـ  $(D)$  إلى مستقيم تقاطع المستويين  $(p_1)$  و  $(p_2)$  .

0.25

تبين أن تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(D)$  هو :  $t \in R$  :  $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases}$

0.25

$(D)$  محتواة في  $(p_1)$  يعني  $(-7 + 2t) - 2(-8 + 3t) + 4(t) - 9 = 0$  يعني ان  $0 = 0$  محققة .

0.25

$(D)$  محتواة في  $(p_2)$  يعني  $-2(-7 + 2t) + (-8 + 3t) + (t) - 6 = 0$  يعني ان  $0 = 0$  محققة و منه  $(D)$  هو تقاطعهما .

0.25

2- التحقق أن النقطة  $A$  لا تنتمي إلى المستوي  $(p_1)$  و لا إلى المستوي  $(p_2)$

التمرين  
الثاني:

0.5

تبيين أن :  $AM^2 = 14t^2 - 14t + 21$  .  
 (3) لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $R$  بـ :  $f(t) = 14t^2 - 14t + 21$   
 دراسة تغيرات الدالة  $f$  :  
 النهايات  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

0.5

المشتقة :  $f'(x) = 28t - 14$  تنعدم عند  $\frac{1}{2}$  و منه  $f$  متزايدة على المجال  $[0; +\infty[$  و متناقصة على المجال  $]-\infty; 0]$  .  
 جدول تغيراتها

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{35}{2}$	$+\infty$

أستنتاج إحداثيات  $M$  التي تكون فيها المسافة  $AM$  أصغرية و نرملها في هذه

0.5

$$H\left(-6; -\frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

0.5

(4) المعادلة الديكارنية للمستوي  $(Q)$  هي  $2x + 3y + z + 31 = 0$

0.5

البرهان أن  $H$  هي المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستقيم  $(D)$  :

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = 6 - \frac{15}{2} + \frac{3}{2} = \frac{-12 + 12}{2} = 0$$

الجداء السلمي  $= 0$  و منه محققة

4

+0.25

0.25

$$(1) \text{ حساب : } u_1 = 5 - \frac{4}{2} = 3 \text{ و } u_2 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $2 \leq u_n \leq 4$

0.5

لدينا  $2 \leq u_1 \leq 4$  محققة

نفرض أن  $2 \leq u_n \leq 4$  و لنبرهن أن  $2 \leq u_{n+1} \leq 4$

$$2 \leq u_n \leq 4 \text{ بالقلب نجد } \frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{4} \text{ بالضرب في } -4 \text{ نجد } -2 \leq -\frac{4}{u_n} \leq -1$$

0.5

بإضافة 5 نجد  $3 \leq 5 - \frac{4}{u_n} \leq 4$  أي ان  $2 \leq 3 \leq u_{n+1} \leq 4$  و منه  $2 \leq u_{n+1} \leq 4$  إذن

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $2 \leq u_n \leq 4$  .

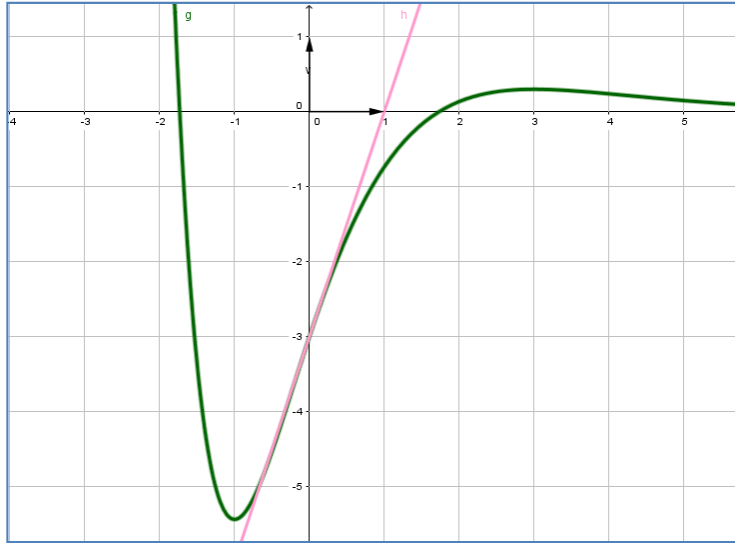
التمرين  
الثالث

0.5	<p>(2) تبين أن <math>(u_n)</math> متزايدة : نحسب الفرق الفرق موجب.</p> <p>استنتاج أنها متقاربة : بما المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة .</p> <p>3- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> : <math>4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}</math></p> <p>لدينا <math>4 - u_{n+1} = \frac{1}{u_n}(4 - u_n)</math> و بما ان <math>2 \leq u_n \leq 4</math> بالقلب نجد</p> <p><math>\frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}</math> , و منه <math>4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)</math> .</p> <p>4- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> : <math>0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}</math> مما سبق نجد أن</p> <p>0.5 <math>0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)</math> و منه</p> <p><math>0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}(4 - u_{n-1}) \right]</math> أي</p> <p><math>0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2}(4 - u_{n-1})</math> و ها كذا</p> <p><math>0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2} \left[ \frac{1}{2}(4 - u_{n-2}) \right]</math> أي ان</p> <p><math>0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^3}(4 - u_{n-2})</math> .... إلى أن نصل إلى التعميم</p> <p><math>0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4 - u_0)</math> و منه <math>0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4 - u_0)</math> أي</p> <p>ان <math>0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(2)</math> أي ان <math>0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}</math> بتعويض نجد</p> <p><math>0 \leq 4 - u_{n'} \leq \frac{1}{2^{n'-1}}</math> و هو المطلوب .</p> <p>حساب <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n</math> بما أن <math>0 \leq 4 - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}</math> <math>n' = n + 1</math></p> <p>0.5 <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0</math> فحسب الحصر نجد <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0</math></p>	
<p><u>7</u> نقاط ) :</p>	<p>1</p> <p>1- تعيين الأعداد الحقيقية <math>a</math> ؛ <math>b</math> و <math>c</math> : <math>a = -3</math> و <math>a = 1</math> و <math>b = 0</math></p> <p>2- <math>f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}</math> ..... حساب <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty</math> و <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0</math></p>	<p><u>التمرين</u> <u>الرابع</u></p>
	<p>+0.25 0.25</p>	

0.25 دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  : المشتقة :  $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$  إشارتها من إشارة  $(-x^2 + 2x + 3)$  تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه  $f$  متناقصة على المجالين  $]-\infty; -1]$  و  $[3; +\infty[$  متزايدة على المجال  $]-1; 3]$  و شكل جدول تغيراتها :

0.25	$x$	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
	$f(x)$	$+\infty$	$-2e$	$\frac{6}{e^3}$	0

0.5 3- كتابة معادلة لـ  $(T)$  مماس المنحنى  $(C_f)$  عند النقطة التي فاصلتها  $x = 0$  معادلة المماس هي  $y = 3x - 3$   
 تعيين إحداثيات نقط تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل  
 0.5  $f(x) = 0$  يكافئ  $x^2 - 3 = 0$  اي ان  $x = \sqrt{3}$  او  $x = -\sqrt{3}$  نقطتي التقاطع هما  $B(\sqrt{3}; 0)$  و  $C(-\sqrt{3}; 0)$



4- رسم  $(T)$  و  $(C_f)$   
 5- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن

0.5 
$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$$

$$f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} \text{ و } f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x^2 - 4x - 1)e^{-x}$$

و منه

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = (x^2 - 3 - 2x^2 + 4x + 6 + x^2 - 4x - 1)e^{-x} = 2e^{-x}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

منه الدالة الأصلية للدالة  $f$  هي الدالة  $F(x) = -2f(x) - f'(x) - 2e^{-x}$  حيث  $F(x) = -2f(x) - f'(x) - 2e^{-x}$  أي

0.5 
$$F(x) = -2(x^2 - 3)e^{-x} - (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} - 2e^{-x}$$

$$F(x) = (-2x^2 + 6)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x} - 2e^{-x}$$
 و منه

$$F(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x}$$

6- حساب بوحددة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني  $(C_f)$  ومحور

الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما  $x=1$  و  $x=3$  هي

$$A = \int_1^{\sqrt{3}} -f(x)dx + \int_{\sqrt{3}}^3 f(x)dx = [-F(x)]_1^{\sqrt{3}} + [F(x)]_{\sqrt{3}}^3 = (4+4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}$$

$$A = [(4+4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}]u.a$$

7-  $m$  وسيط حقيقي ناقش بيانها وحسب قيم  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة

$$x^2 - 3 + me^x = 0$$

0.25 المعادلة تكافئ  $me^x = -(x^2 - 3)$  أي ان  $-m = (x^2 - 3)e^{-x}$  يكافئ

$$-m = f(x)$$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحني  $(C_f)$  المستقيم  $(\Delta_m)$  ذو المعادلة

$$y = -m$$

0.75

المناقشة

لما  $-m < -2e$  أي ان  $m > 2e$  نلاحظ ان  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

لما  $-m = -2e$  أي ان  $m = 2e$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة و منه للمعادلة حل وحيد سالب.

لما  $-m > -2e$  أي ان  $3 < m < 2e$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبان و منه للمعادلة حلين سالبين

لما  $-m = -3$  أي ان  $m = 3$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة و منه للمعادلة حلين إحداهما معدوم و الأخر سالب .

لما  $-m > -3$  أي ان  $0 \leq m < 3$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة و منه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة .

لما  $-m > 0$  أي ان  $-\frac{6}{e^3} < m < 0$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة و منه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

لما  $-m = \frac{6}{e^3}$  أي أن  $m = -\frac{6}{e^3}$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة و منه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة

لما  $-m > \frac{6}{e^3}$  أي ان  $m < -\frac{6}{e^3}$  نلاحظ أن  $(\Delta_m)$  و  $(C_f)$  يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة و منه للمعادلة حل وحيد سالب .