الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة لوغارتمية

$\ln x$

⑥

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 26

◄ التمريـــــن

(I) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$		$\dots$		$\dots$	1		$\sqrt{3}$		$\dots$
$f'(x)$		$\dots$	0	$-$		‖	$\dots$	0	$+$	
$f(x)$			$-\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})$ ↘		$-\infty$	‖		$\dots$ ↗		$+\infty$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) علما أن الدالة f فردية:

أ/ عيّن إشارة $f'(x)$ مع التبرير ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب/ بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=-\infty$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}[f(x)]=+\infty$ وَ $f(\sqrt{3})=\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$

ج/ أكمل جدول تغيرات الدالة f السابق.

2) نقبل أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $\pm\infty$.

أ/ مثّل بيانيا كل من المستقيم (D) والمنحنى (C_f) . نأخذ: $f(\sqrt{3})\cong 3$ و $(\sqrt{3})\cong 1.7$

3) نفرض أن عبارة الدالة f هي من الشكل:

$$f(x)=ax+b+\ln\left(c+\frac{2}{x-1}\right)$$

حيث: c,b,a أعداد حقيقية.

- باستعمال نتائج الجدول أعلاه، بيّن أنّ : $a=1$ ، $b=0$ و $c=1$.

4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية:

$$x-\frac{e^m+e^x}{e^m-e^x}=0\dots(E)$$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=\ln(f(x))$$

- ادرس تغيرات الدالة g .

◄ حل التمريـــن

(I)

1) أ/ تعيين إشارة $f'(x)$ مع التبرير:

نضع γ, β, α حيث:

x	$-\infty$		α		β		1		$\sqrt{3}$		γ
$f'(x)$		...	0	$-$	‖		‖	...	0	$+$	

لدينا الدالة f فردية ، معناه:

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

ومنه:

$$-f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$$

لدينا من جدول التغيرات (المُعطى):

$f'(x) < 0$ لما $x \in]\alpha; \beta[$

$\Leftarrow \quad \underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} < 0 \quad$ لما $\quad -x \in]\alpha; \beta[$

$\Leftarrow \quad f'(x) < 0 \quad$ لما $\quad x \in]-\beta; -\alpha[$

ولدينا كذلك:

$f'(x) > 0$ لما $x \in]\sqrt{3}; \gamma[$

$\Leftarrow \quad \underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} > 0 \quad$ لما $\quad -x \in]\sqrt{3}; \gamma[$

$\Leftarrow \quad f'(x) > 0 \quad$ لما $\quad x \in]-\gamma; -\sqrt{3}[$

ولدينا: $f'(x) = 0$ لما $x = \sqrt{3}$ معناه $f'(-x) = 0$ لما $-x = \sqrt{3}$ ومنه $x = -\sqrt{3}$

ومنه: $\alpha = -\sqrt{3}$ و $\beta = -1$ و $\gamma = +\infty$

اذن:

$f'(x) > 0$ لما: $x \in \left]-\infty; -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}; +\infty\right[$

$f'(x) < 0$ لما: $x \in \left]-\sqrt{3}; -1\right[\cup \left]1; \sqrt{3}\right[$

ب/ تبيين أن $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)] = -\infty$:

لدينا من الجدول السابق: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)] = +\infty$

نضع $x = -t$ (الدالة f فردية أي: $f(-t) = -f(t)$)

ومنه:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x)] = \lim_{-t \to -\infty} [f(-t)]$$

$$= \lim_{t\to+\infty}[f(-t)]$$
$$= \lim_{t\to+\infty}[-f(t)]$$
$$= -\underbrace{\lim_{t\to+\infty}[f(t)]}_{\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=+\infty}$$
$$= -(+\infty)$$
$$= -\infty$$

- تبيين أن: $\lim_{\substack{x\to1\\>}}[f(x)] = +\infty$:

بنفس الفكرة السابقة (نضع $x = -t$) نجد: $\lim_{\substack{x\to1\\>}}[f(x)] = +\infty$

- تبيين أن: $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3})$:

لدينا:

$$\underbrace{f(-\sqrt{3})}_{f(-\sqrt{3})=-f(\sqrt{3})} = -\sqrt{3} - \ln(2+\sqrt{3})$$
$$\Rightarrow -f(\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - \ln(2+\sqrt{3})$$
$$\Rightarrow f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3})$$

ج/ اكمال جدول تغيرات الدالة f السابق:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖		‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\sqrt{3} - \ln(2+\sqrt{3})$	↘	$-\infty$ ‖		‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3})$	↗	$+\infty$

2) التمثيل البياني:

قبل أن نشرع في التمثيل البياني، نستخرج من جدول التغيرات المستقيمات المقاربة

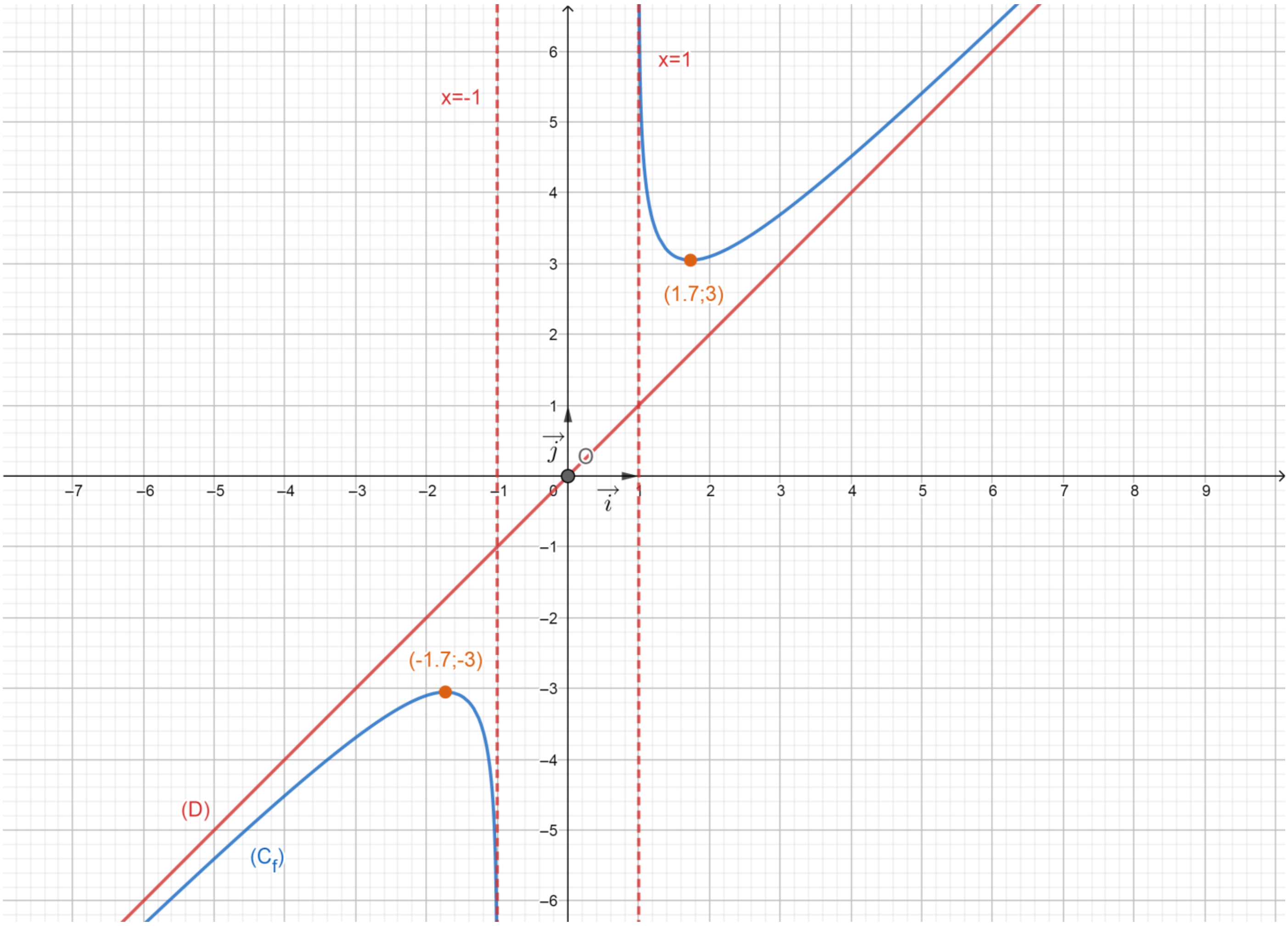
لدينا:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 1$.

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 1$ و $x = -1$
- نرسم المقارب المائل (D)
- نعين النقط الحدية

- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



3) تبيين أنّ: $a = 1$ ، $b = 0$ و $c = 1$:

لدينا:

$$f'(x) = a + \frac{-\dfrac{2}{(x-1)^2}}{c + \dfrac{2}{x-1}}$$

$$= a - \frac{\dfrac{2}{(x-1)^2}}{\dfrac{c(x-1)+2}{x-1}}$$

$$= a - \frac{\dfrac{2}{x-1}}{c(x-1)+2}$$

$$= a - \frac{2}{c(x-1)^2 + 2(x-1)}$$

ولدينا:

$$\begin{cases} f'(\sqrt{3}) = 0 \\ f'(-\sqrt{3}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - \dfrac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} = 0 \\ a - \dfrac{2}{c(-\sqrt{3}-1)^2 + 2(-\sqrt{3}-1)} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - \dfrac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} = 0 \ldots (*) \\ a - \dfrac{2}{c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)} = 0 \ldots (**) \end{cases}$$

بطرح $(*)$ من $(**)$ نجد:

$$-\frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} + \frac{2}{c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)} = 0$$

$$\Rightarrow c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1) = c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)$$

$$\Rightarrow c(4+2\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} - 2 = c(4-2\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - 2$$

$$\Rightarrow c(4+2\sqrt{3}) - c(4-2\sqrt{3}) - 4\sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow c(4\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 1}$$

نعوض قيمة c في $(*)$ نجد:

$$a - \frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{4-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 1}$$

ولدينا:

$$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}) \Rightarrow \sqrt{3} + b + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}-1}\right) = \sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow b+\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)=\ln(2+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow b=\ln(2+\sqrt{3})-\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)$$

$$\Rightarrow b=\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\frac{2}{\sqrt{3}-1}}\right)$$

$$\Rightarrow b=\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}\right)$$

$$\Rightarrow b=\ln\left(\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}\right)$$

$$\Rightarrow b=\ln\left(\frac{2\sqrt{3}-2+3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$$

$$\Rightarrow b=\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right)$$

$$\Rightarrow b=\ln(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{b=0}$$

4) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$x-\frac{e^m+e^x}{e^m-e^x}=0\Rightarrow\frac{xe^m-xe^x-e^m-e^x}{e^m-e^x}=0$$

$$\Rightarrow xe^m-xe^x-e^m-e^x=0$$

$$\Rightarrow e^m(x-1)-e^x(x+1)=0$$

$$\Rightarrow e^m(x-1)=e^x(x+1)$$

$$\Rightarrow e^m=e^x\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow m=\ln\left[e^x\times\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]$$

$$\Rightarrow m=\ln(e^x)+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow m=x+\ln\left(\frac{x+1+1-1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow m = x + \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$$
$$\Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = m$

ومنه:

لما $m < f(-\sqrt{3})$ أي $m \in]-\infty; f(-\sqrt{3})[$ للمعادلة حلان سالبان

لما $m = f(-\sqrt{3})$ للمعادلة حل مضاعف هو $x = -\sqrt{3}$

لما $f(-\sqrt{3}) < m < f(\sqrt{3})$ أي $m \in]f(-\sqrt{3}); f(\sqrt{3})[$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $m = f(\sqrt{3})$ للمعادلة حل مضاعف هو $x = \sqrt{3}$

لما $m > f(\sqrt{3})$ أي $m \in]f(\sqrt{3}); +\infty[$ للمعادلة حلان موجبان

(II) دراسة تغيرات الدالة g:

لدينا: $g(x) = \ln(f(x))$

نلاحظ أن : $g(x) = k \circ f = k(f(x))$ حيث: $k(x) = \ln x$

- حساب النهايات:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} [f(x)] = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [k(x)] = +\infty$

اذن:

- $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} [g(x)] = +\infty$

ولدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)] = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [k(x)] = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 1} [g(x)] = +\infty$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

لدينا: $f(x) > 0$ لما $x \in]1; +\infty[$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x)$

- جدول تغيرات الدالة g :

x	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$g(\sqrt{3})$	↗ $+\infty$

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►