تمرين جيد في الحساب للمراجعة و التدرب

نـــص التمرين :

1) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .

ب) إستنتج باقي قسمة العدد $1440^{(2019)^{2020}}$ على 7 .

2) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $4\left(5^{n-2}+5^{n-3}+.......+1\right)\equiv 3[7]$.

3) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2=2n^2+6n+6$.

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد : $2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2$ مضاعفا للعدد 7 .

4) فيما يلي نفرض : $n=9$.

نعتبر x و y عددين صحيحين و لتكن المعادلة (E) حيث : $C_{10}^2x-A_{12}^2y=15\ .....(E)$.

أ) عين $PGCD\left(C_{10}^2;A_{12}^2\right)$ ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x,y) .

ب) بين أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن : $y\equiv 0[5]$ ، ثم حل المعادلة (E) .

5) أ) إذا كان x و y عددين طبيعيين ، مـــاهي القيم الممكنة لـــ d ؟ ، حيث : $d=PGCD(x,y)$.

ب) عين الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E) بحيث يكون العددين x و y أوليان فيما بينهما .

حل مقترح للتمرين :

1) أ) بواقي قسمة العدد 5^n على 7 .

نجد : $5^0\equiv 1[7]$ ، $5^1\equiv 5[7]$ ، $5^2\equiv 4[7]$ ، $5^3\equiv 6[7]$ ، $5^4\equiv 2[7]$ ، $5^5\equiv 3[7]$ و $5^6\equiv 1[7]$

و نلخصها في الجدول التالي :

قيم العدد الطبيعي n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي قسمة العدد 5^n على 7	1	5	4	6	2	3

ب) نعلم أن : $1440\equiv 5[7]$ أي أن : $1440^{(2019)^{2020}}\equiv 5^{(2019)^{2020}}[7]$.

*) لنعين باقي قسمة العدد 2019^{2020} على 6 : $2019\equiv 3[6]$ أي : $2019^{2020}\equiv 3^{2020}[6]$ لكن نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $\boxed{3^n\equiv 3[6]}$ و منه : $2019^{2020}\equiv 3[6]$ أي : $2019^{2020}=6k+3$.

إذن : $1440^{(2019)^{2020}}\equiv 5^{6k+3}[7]$ أي : $1440^{(2019)^{2020}}\equiv 6[7]$.

و منه باقي قسمة العدد $1440^{(2019)^{2020}}$ على 7 هو 6 .

2) لدينا : $4\left(5^{n-2}+5^{n-3}+.....+1\right)\equiv 3[7]$ ، نلاحظ أن : $\left(5^{n-2}+5^{n-3}+.....+1\right)$ هو مجموع حدود لمتتالية هندسية أساسها 5 عدد حدودها $(n-1)$ حدا و منه : $4\left(1\times\dfrac{5^{n-1}-1}{5-1}\right)\equiv 3[7]$ أي : $5^{n-1}-1\equiv 3[7]$ أي : $5^{n-1}\equiv 4[7]$

و منه يكون : $n-1=6k+2$ إذن : $\boxed{n=6k+3}$ مع $(k\in\mathbb{N})$.

3) أ) لنبين أن : $2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}=2n^{2}+6n+6$.

*) لنحسب $2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}$:

$$2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}=2\times\frac{(n+1)!}{(n+1-2)!\times 2!}+\frac{(n+3)!}{(n+3-2)!}=\frac{(n+1)\times n\times(n-1)!}{(n-1)!}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!}$$

و منه : $2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}=(n+1)n+(n+3)(n+2)=n^{2}+n+n^{2}+2n+3n+6$

إذن : $\boxed{2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}=2n^{2}+6n+6}$ هو المطلوب .

ب) لنعين قيم n بحيث يكون : $2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}\equiv 0[7]$.

لدينا : $2n^{2}+6n+6\equiv 0[7]$ أي : $2(n^{2}+3n+3)\equiv 0[7]$ بما أن 2 أولي مع 7 يكون : $n^{2}+3n+3\equiv 0[7]$

أي : $n^{2}+3n\equiv -3[7]$ و منه : $n^{2}+3n\equiv 4[7]$.

يمكن الإستعانة بالجدول التالي (الموافقة بترديد 7) :

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	$[7]$
$n^{2}\equiv$	0	1	4	2	2	4	1	$[7]$
$3n\equiv$	0	3	6	2	5	1	4	$[7]$
$n^{2}+3n\equiv$	0	4	3	4	0	5	5	$[7]$

و بالتالي يكون : $n\equiv 1[7]$ أو $n\equiv 3[7]$ أي : $\boxed{n=7k+1}$ أو $\boxed{n=7k+3}$ مع $(k\in\mathbb{N})$.

4) لدينا : $C_{10}^{2}x-A_{12}^{2}y=15\;.....(E)$.

أ) لنعين $PGCD(C_{10}^{2};A_{12}^{2})$:

نعلم أن : $C_{10}^{2}=\frac{10!}{8!\times 2!}=45$ و $A_{12}^{2}=\frac{12!}{10!}=132$ ، إذن المعادلة (E) تصبح : $45x-132y=15$

هذه الأخيرة تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^{2}$ لأن : $PGCD(45,132)=3$ و 3 يقسم 15 .

ب) لدينا : $45x-132y=15$ أي تصبح : $15x-44y=5$ أي : $44y=15x-5$ أي : $44y=5(3x-1)$

لدينا : 5 يقسم $44y$ و 5 أولي مع 44 حسب مبرهنة غــوص فإن : 5 يقسم y

و بالتالي يكون : $y=5k$ أي : $\boxed{y\equiv 0[5]}$ هو المطلوب .

*) لنحل المعادلة (E) :

نبحث أولا عن الحل الخاص أي : $y=5$ و منه : $44\times 5=5(3x-1)$ أي : $44=3x-1$ إذن : $x=15$.

و منه : $(x_{0},y_{0})=(5,15)$.

لدينا : $\begin{cases}15x-44y=5\\15(15)-44(5)=5\end{cases}$ بالطرح نجد : $15(x-15)=44(y-5)$ بما أن 15 أولي مع 44 و حسب مبرهنة

غــوص نستنتج أن : $\begin{cases}x-15=44k\\y-5=15k\end{cases}$ إذن : $\boxed{x=44k+15}$ و $\boxed{y=15k+5}$.

و منه : $\boxed{(x,y)=(44k+15,15k+5)}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.