# دراسة دالة أسية رقم 01 + 02

## المسألة 01 :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ .

$(C)$ هو المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1) أحسب نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ ، ثمّ بيّن أنّ المستقيم الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحني $(C)$ بجوار $-\infty$ .

2) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ تكون : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$ .

ب) إستنتج نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ ، و أنّ المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب للمنحني $(C)$ عند $+\infty$ .

3) حدّد وضعية المنحني $(C)$ بالنسبة إلى المقاربين .

4) أدرس إتجاه تغيّر الدالة $f$ ، و شكّل جدول تغيّراتها .

5) أنشئ المنحني $(C)$ و المستقيمات المقاربة .

6) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة : $(1-m)(e^x+1)-2e^x=0$ .

## المسألة 02 :

نعتبر الدالتان $f_0$ وَ $f_1$ المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_0(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ وَ $f_1(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ .

و ليكن $(C_0)$ وَ $(C_1)$ منحناهما البيانيين في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

I) 1) أحسب نهاية $f_0$ عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، ثمّ استنتج المستقيمات المقاربة للمنحني $(C_0)$ .

2) بيّن أنّ النقطة $K(0;\dfrac{1}{2})$ هي مركز التناظر للمنحني $(C_0)$ .

3) أدرس تغيّرات الدالة $f_0$ .

4) عيّن معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C_0)$ عند النقطة $K$ .

5) أ) بيّن أنّه لدراسة وضعية $(T)$ بالنسبة إلى $(C_0)$ يكفي دراسة إشارة العبارة : $g(x)=2e^x-xe^x-2-x$

ب) أحسب كلا من $g'(x)$ وَ $g''(x)$ ، ثمّ عيّن مع التبرير إشارة $g''(x)$ ، $g'(x)$ ، $g(x)$ ، و ذلك حسب قيم $x$ .

ج) إستنتج و ضعية المنحني $(C_0)$ بالنسبة إلى المماس $(T)$ .

د) أنشئ المماس $(T)$ وَ المنحني $(C_0)$ .

II) 1) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ تكون النقطتان : $M(x;f_0(x))$ وَ $M'(x;f_1(x))$ متناظرتان بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=\dfrac{1}{2}$ .

2) شكّل جدول تغيّرات الدالة $f_1$ ، ثمّ أنشئ المنحني $(C_1)$ في نفس المعلم السابق .

# حــل مختصر للمسألة رقم 01

❖) لدينا : $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ .

1) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-\dfrac{2e^x}{e^x+1})=0\end{cases}$ .

❖) بما أنّ : $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\dfrac{2e^x}{e^x+1})=0$ ، .

إذن المستقيم ذو المعادلة : $y=x+1$ مقارب مائل للمنحني $(C)$ بجوار $-\infty$ .

2) أ) التحقّق أنّ : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$ .

لدينا : $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ ، إذن يمكن كتابة : $f(x)=x-1+2-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ ، أي :

$f(x)=x-1+\dfrac{2e^x+2-2e^x}{e^x+1}$ ، و منه : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$ ، و هو المطلوب .

ب) حساب النهاية عند $+\infty$ (نستعمل العبارة الثانية ) .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{2}{e^x+1})=0\end{cases}$ .

❖) بما أنّ : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{2}{e^x+1})=0$ .

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحني $(C)$ بجوار $+\infty$ .

3) تحديد الوضع النسبي للمنحني $(C)$ بالنسبة للمقاربين :

❖) ندرس إشارة : $f(x)-(x+1)=-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ ، نلاحظ أنّ : $-\dfrac{2e^x}{e^x+1}<0$ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ .

إذن : المنحني $(C)$ يقع تحت المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ .

❖) ندرس إشارة : $f(x)-(x-1)=\dfrac{2}{e^x+1}$ ، نلاحظ أنّ : $\dfrac{2}{e^x+1}>0$ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ .

إذن : المنحني $(C)$ يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ .

4) دراسة إتجاه تغيّر الدالة $f$ : (نختار الشكل $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$ ).

❖) الدالة المشتقة : $f'(x)=1+\dfrac{-2e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{(e^x+1)^2-2e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^{2x}+2e^x+1-2e^x}{(e^x+1)^2}$ ،

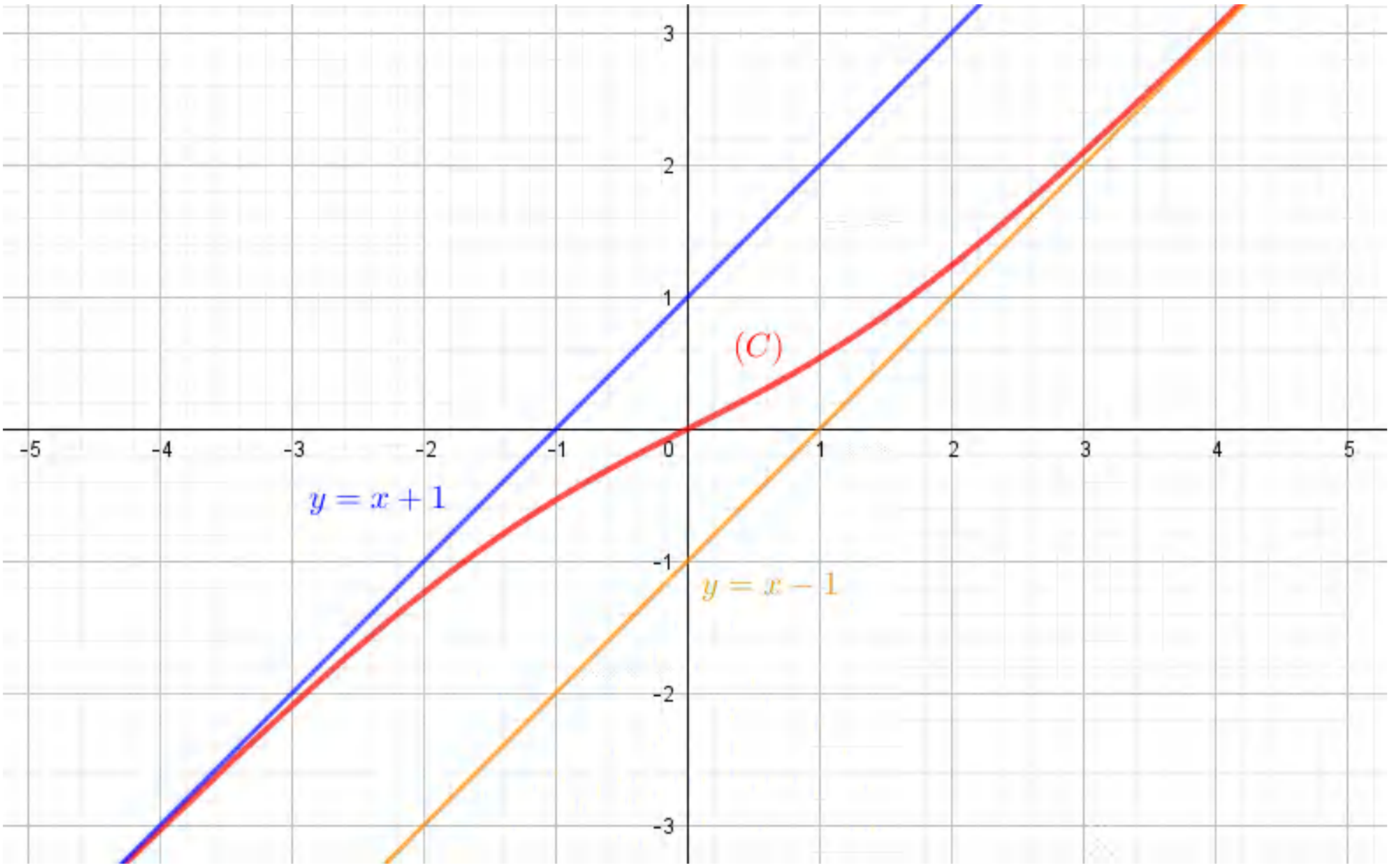
و منه : $f'(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$ ، نلاحظ أنّ : $f'(x)>0$ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ .

إذن : الدالة $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ .

❖) جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow +\infty$ |

5) الإنشـــــــــاء :




6) المناقشة البيانية :

لدينا : $(1-m)(e^x+1) - 2e^x = 0$ ، أي : $(1-m)(e^x+1) = 2e^x$ ، أي : $\dfrac{2e^x}{e^x+1} = 1-m$ ، أي :

$-\dfrac{2e^x}{e^x+1} = m-1$ ، (بإضافة $x+1$) : $x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1} = x+m$ ، و منه : $f(x) = x+m$ .

إذن : عدد حلول المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحني $(C)$ مع المستقيم ذو المعادلة $y = x+m$ و الذي يوازي المقاربين للمنحني $(C)$ هما : $y = x+1$ وَ $y = x-1$ .

أي أنّ المناقشة البيانية تكون كما يلي :

❖) لما : $m \in \left]-\infty;-1\right]$ ، المعادلة لا تقبل حلول .

❖) لما : $m \in \left[1;+\infty\right[$ ، المعادلة لا تقبل حلول .

❖) لما : $m \in \left]-1;1\right[$ ، المعادلة تقبل حل وحيد .

## حــل مختصر للمسألة رقم 02

I) 1) حساب نهايات الدالة $f_0$ :

❖) $\begin{cases}0\\1\end{cases}$ .... $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=0$ . المنحني $(C_0)$ يقبل حامل محور الفواصل كمقارب بجوار $-\infty$

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{e^x}+1}=1$ . المنحني $(C_0)$ يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $y=1$ ، بجوار $+\infty$ .

2) لدينا النقطة $K(0;\dfrac{1}{2})$ .

❖) أوّلا : $D_{f_0}$ متناظرة بالنسبة إلى $0$ .

❖) ثانيا : نبيّن أنّ : $f_0(2a-x)+f_0(x)=2b$ ، مع : $\begin{cases}a=0\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ، أي : $f_0(-x)+f_0(x)=1$ .

❖) لنحسب : $f_0(-x)+f_0(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}+\dfrac{e^x}{1+e^x}$ ، أي : $f_0(-x)+f_0(x)=\dfrac{e^{-x}\times e^x}{(1+e^{-x})e^x}+\dfrac{e^x}{1+e^x}$ ،

أي : $f_0(-x)+f_0(x)=\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{e^x}{1+e^x}$ ، أي : $f_0(-x)+f_0(x)=\dfrac{1+e^x}{1+e^x}=1$ .

إذن : النقطة $K$ هي مركز التناظر للمنحني $(C_0)$ .

3) دراسة تغيّرات الدالة $f_0$ :

❖) حساب $f_0'(x)$ : $f_0'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(1+e^x)^2}=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ .

نلاحظ أنّ : $f_0'(x)>0$ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، إذن : الدالة $f_0$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ .

❖) جدول التغيّرات :

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f_0'(x)$ | $+$ |
| $f_0(x)$ | $0 \nearrow 1$ |

4) كتابة معادلة المماس $(T)$ عند النقطة $K$ :

$(T): y=f_0'(0)(x-0)+f_0(0)$ ، و منه : $(T): y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$ ، لأنّ : $\begin{cases}f_0'(0)=\dfrac{1}{4}\\ f_0(0)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ .

5) أ) دراسة وضعية $(C_0)$ بالنسبة إلى $(T)$ : ندرس إشارة الفرق $f(x)-(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})$

أي ، $f(x)-(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{x-2}{4}=\frac{4e^x-x-xe^x-2-2e^x}{4(e^x+1)}$ :

$f(x)-(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{x-2}{4}=\frac{2e^x-xe^x-x-2}{4(e^x+1)}$ ، و منه : $f(x)-(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})=\frac{g(x)}{4(1+e^x)}$ .

❖) لدينا : $4(1+e^x)>0$ ، إذن : لدراسة إشارة الفرق يكفي دراسة إشارة $g(x)$ .

ب) حساب $g'(x)$ وَ $g''(x)$ :

❖) $g'(x)=2e^x-(e^x+xe^x)-1=2e^x-e^x-xe^x-1$ ، و منه : $g'(x)=e^x-xe^x-1$ .

❖) $g''(x)=e^x-(e^x+xe^x)=e^x-e^x-xe^x$ ، و منه : $g''(x)=-xe^x$ .

- إذن إشارة $g''(x)$ من إشارة $-x$ .

❖) إشارة $g''(x)$ :

$g''(0)=0$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g'(x)$ | $-$ ↗ | $0$ | ↘ $-$ |

❖) إشارة $g'(x)$ :

$g'(0)=0$

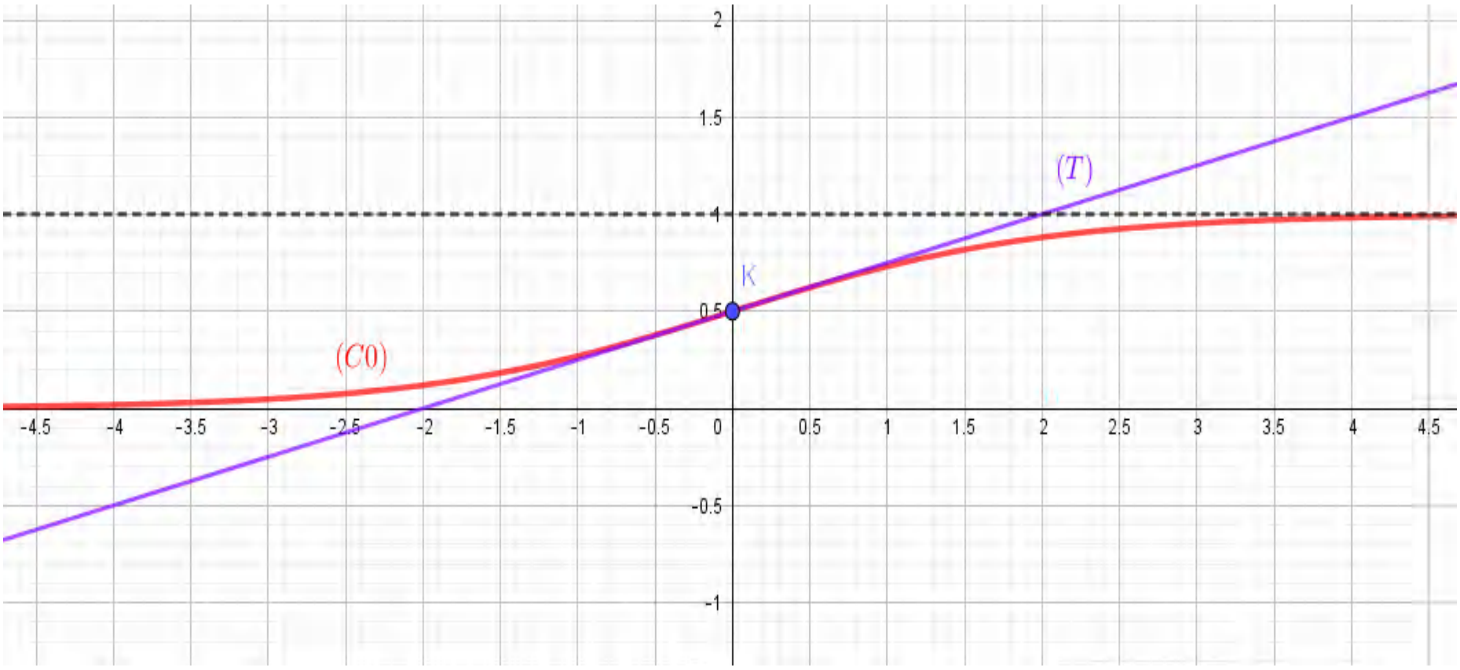
| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $g(x)$ | ↘ $+$ | $0$ | ↘ $-$ |

ج) إشارة : $g(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $+$ | | $-$ |
| الوضعية | $(C_0)$ يقع فوق $(T)$ | $(C_0)$ يخترق $(T)$ عند النقطة $K$ | $(C_0)$ يقع تحت $(T)$ |

❖) إستنتاج : النقطة $K$ تعتبر نقطة إنعطاف للمنحني $(C_0)$ .

د) الإنشـــــاء :




II) 1) تكون النقطتان : $M(x;f_0(x))$ وَ $M'(x;f_1(x))$ متناظرتان بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}$ ،

إذا كان : $\frac{1}{2}=\frac{f_0(x)+f_1(x)}{2}$ .

❖) نحسب : $\frac{1}{2}=\frac{\frac{e^x+1}{e^x+1}}{2}=\frac{\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{1}{e^x+1}}{2}=\frac{f_0(x)+f_1(x)}{2}$ .

و منه : $M$ وَ $M'$ متناظرتان بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة : $y=\frac{1}{2}$ .

أي أنّ : $(C_0)$ وَ $(C_1)$ متناظران بالنسبة لهذا المستقيم .

2) تشكيل جدول تغيّرات الدالة $f_1$ :

بما أنّ $(C_0)$ وَ $(C_1)$ متناظران بالنسبة للمستقيم $y=\frac{1}{2}$ فإنّ : $\frac{1}{2}=\frac{f_0(x)+f_1(x)}{2}$ ،

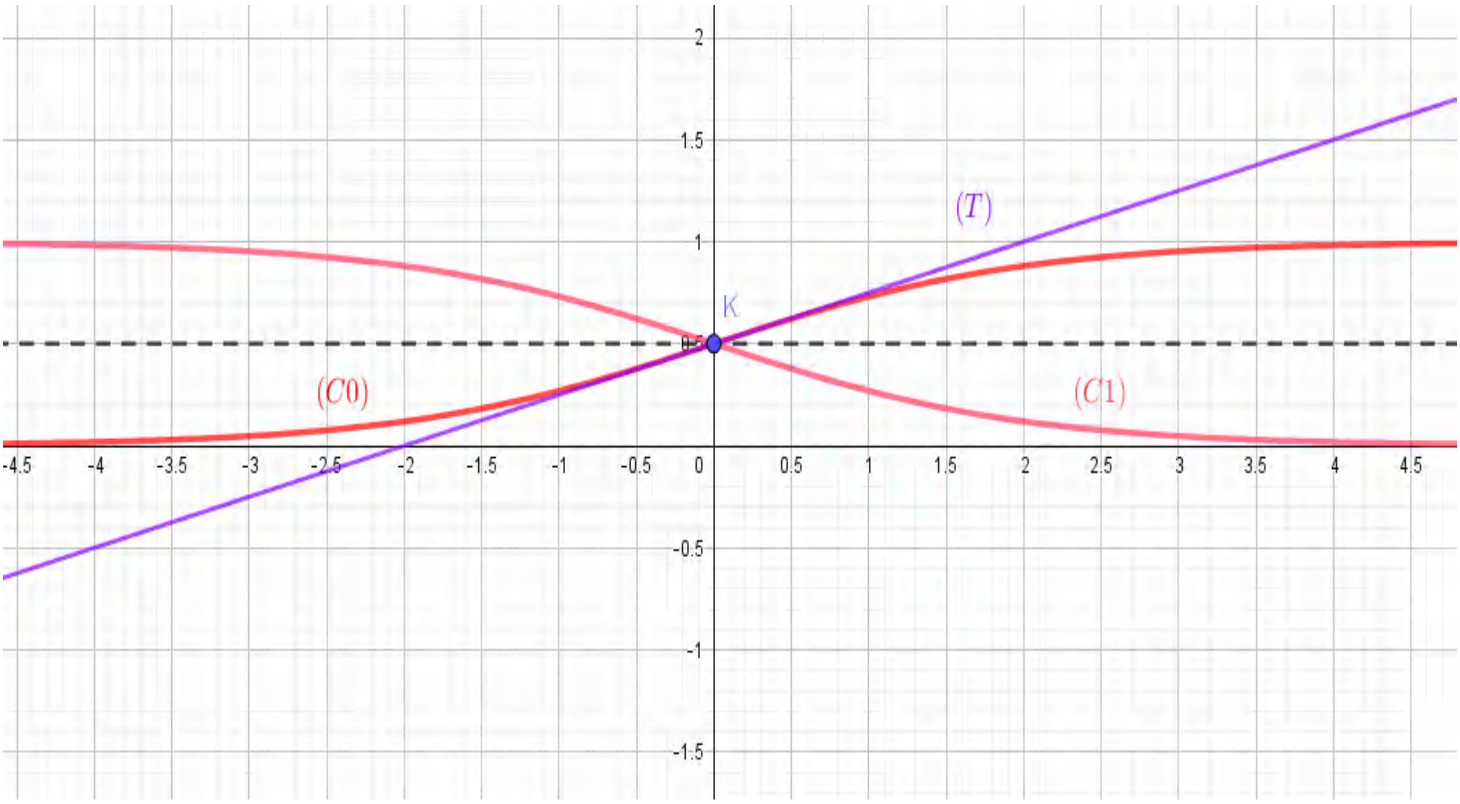
إذن : $\frac{1}{2}=\frac{f_0+f_1}{2}$ ، أي : $f_0+f_1=1$ ، و منه : $f_1=1-f_0$ .

و عليه فإنّ : إتجاه تغيّر الدالة $f_1$ هو عكس إتجاه تغيّر الدالة $f_0$ .

❖) جدول التغيّرات :

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | $-$ | |
| $f_1(x)$ | $1$ ↘ | $0$ |

❖ ) الإنشـــــاء :




كتابة الأستاذ : ب . ع

# دراسة دالة أسية رقم 03 + 04

**المسألة 03 :**

I) لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = e^x - x - 1$ .

1) أحسب نهايات الدالة $g$ عند $-\infty$ وَ عند $+\infty$ .

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة $g$ ، و شكّل جدول تغيّراتها .

3) أحسب $g(0)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ .

II) نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$ .

$(C)$ هو المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1) أحسب نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ وَ عند $+\infty$ ، ثمّ فسّر النتائج هندسياً .

2) أحسب $f'(x)$ ، ثمّ أدرس إتجاه تغيّر الدالة الدالة $f$ وَ شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ) عيّن معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

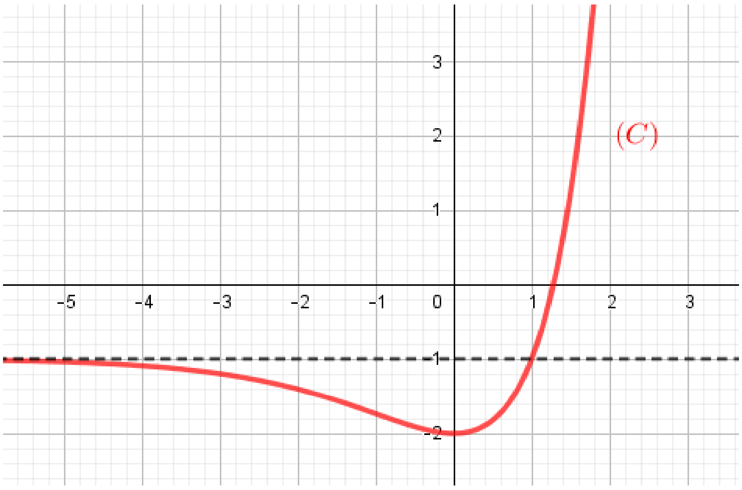
ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني $(C)$ بالنسبة إلى المماس $(T)$ .

4) انشئ المماس $(T)$، وَ المستقيمات المقاربة، وَ المنحني $(C)$ .

5) $m$ وسيط حقيقي، ناقش بيانياً و حسب قيم $m$ حلول المعادلة : $f(x) = mx$ .

**المسألة 04 :**

I) في الشكل المقابل : $(C)$ هو المنحنى الممثل للدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (ax + b)e^x + c$ .




1) بقراءة بيانية :

أ) عيّن $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ ، ثمّ استنتج قيمة $c$ .

ب) عيّن نهاية الدالة $g$ عند $+\infty$ .

ج) عيّن كلاً من : $g(0)$ وَ $g'(0)$ ، ثم استنتج قيمتي كل من $a$ وَ $b$ .

2) نفرض فيما يلي : $g(x) = (x - 1)e^x - 1$ .

أ) شكّل جدول تغيّرات الدالة $g$ .

ب) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ محصور بين : $1,2$ وَ $1,3$ .

ج) إستنتج إشارة $g(x)$ .

II) نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1}$ ، و ليكن $(C_f)$ منحناها البياني في م.م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1) أحسب نهايات الدالة $f$ عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، ثم حدّد المستقيم المقارب بجوار $+\infty$ .

2) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ $(C_f)$ بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ .

3) أدرس إتجاه تغيّر الدالة $f$ ، وَ شكّل جدول تغيّراتها .

4) بيّن أنّ : $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، ثمّ استنتج حصراً لـ $f(\alpha)$ .

5) أنشئ المنحني $(C_f)$ .

6) ناقش بيانياَ و حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة : $f(x) = f(m)$ .

## حل مختصر للمسألة رقم 03

I) لدينا : $g(x)=e^x-x-1$ .

1) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-x-1)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty\end{cases}$ .

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{x})=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{e^x}{x})=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x})=0\end{cases}$ .

2) دراسة تغيرات الدالة $g$ ، و تشكيل جدول تغيّراتها :

❖) الدالة المشتقة : $g'(x)=e^x-1$ .

- تكون $g'(x)\geq 0$ ، أي : $(e^x-1\geq 0)$ ، أي : $e^x\geq 1$ )، إذا كان : $x\geq 0$ .

- تكون $g'(x)\leq 0$ ، أي : $(e^x-1\leq 0)$ ، أي : $e^x\leq 1$ ) ، أذا كان : $x\leq 0$ .

إذن الدالة $g$ متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ ، و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$ .

❖) جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ $+$ | $0$ | $+$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

3) نحسب : $g(0)=0$ ، و عليه نستنتج و نلخص إشارة $g(x)$ في الجدول التالي :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

II) لدينا : $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$ :

1) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x(\frac{e^x}{x}-1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-1}=-1$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$ .

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x(\frac{e^x}{x}-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-1}=0$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ .

❖) التفسير الهندسي :

- بجوار $-\infty$ المنحنى $(C)$ يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $y=-1$ .

- بجوار $+\infty$ المنحني $(C)$ يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .

2) ❖ حساب $f'(x)$ : $f'(x) = \dfrac{(e^x - x) - (e^x - 1)\times x}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x - xe^x}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$ .

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-x)$ ، أي :

تكون : $f'(x) \geq 0$ إذا كان : $x \leq 1$ وَ تكون : $f'(x) \leq 0$ ، إذا كان : $x \geq 1$ .

❖) و عليه : الدالة $f$ متزايدة على المجال $]-\infty;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$ .

❖) جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $f(1)$ | $\searrow$ | $0$ |

. $f(1) = \dfrac{1}{e-1} \approx 0,58$

3) أ) معادلة المماس $(T)$ :

$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ، و منه : $(T): y = x$ ، لأنّ : $\begin{cases} f'(0) = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ .

ب) الوضع النسبي للمنحني $(C)$ بالنسبة إلى $(T)$ : أي ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$ :

$$f(x) - x = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - xe^x + x^2}{e^x - x} = \frac{x(1 - e^x + x)}{e^x - x} = \frac{-x(e^x - x - 1)}{e^x - x} = \frac{-x \times g(x)}{e^x - x} .$$

❖) لدينا من الجزء الأول : $g(x) \geq 0$ ، أي : $e^x - x - 1 \geq 0$ ، أي : $e^x - x \geq 1$ ، و منه : $e^x - x \geq 0$ .

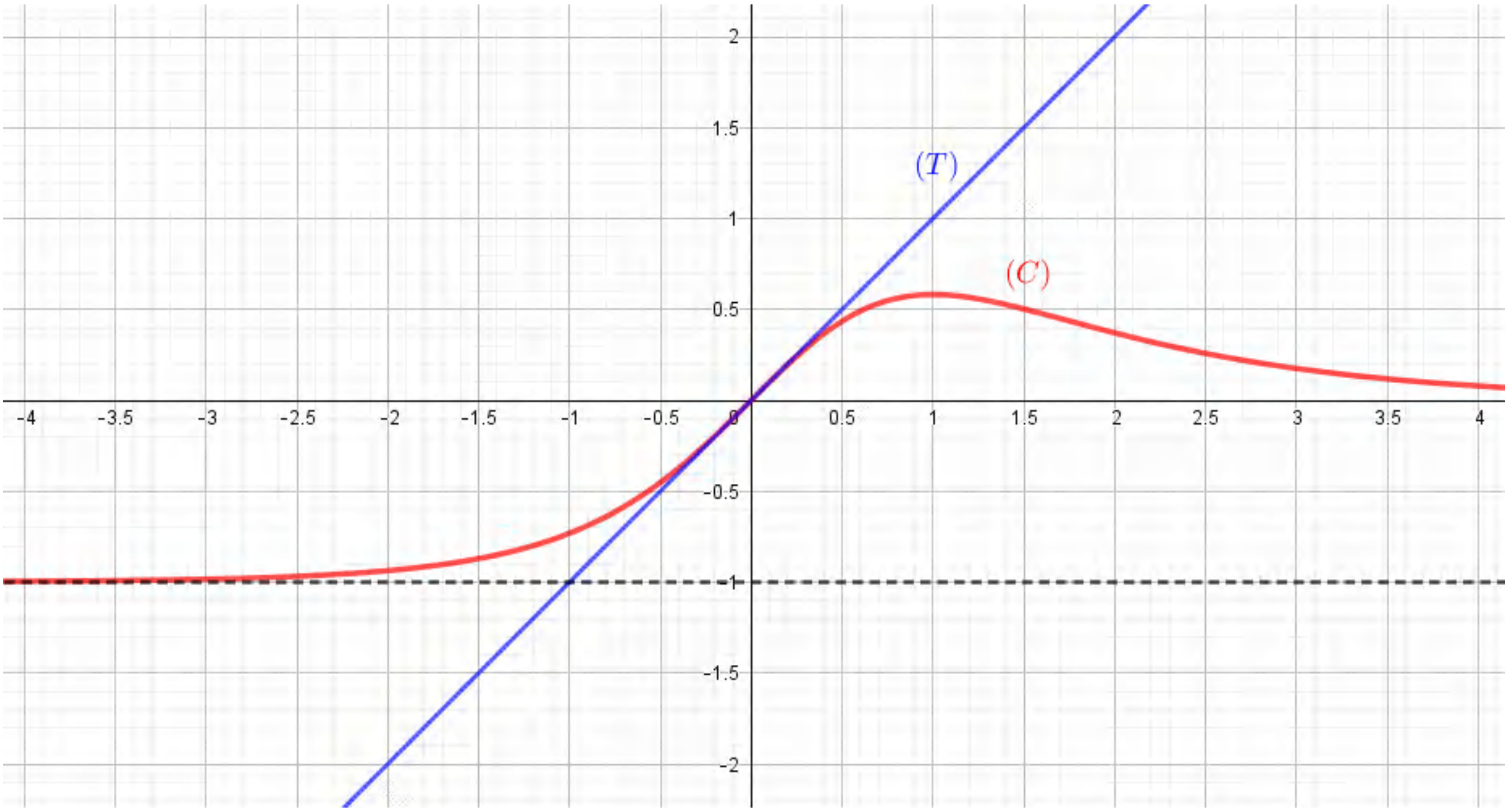
إذن : إشارة $(f(x) - x)$ من إشارة $(-x \times g(x))$ ، و بما أنّ : $g(x) \geq 0$ ، فالإشارة من إشارة $(-x)$ .

❖) نلخص الوضعية في الجدول التالي :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الوضعية | | $(C)$ يقع فوق $(T)$ | $(C)$ يخترق $(T)$ في النقطة $O$ | $(C)$ يقع تحت $(T)$ | |

ملاحظة : المبدأ $O$ يعتبر نقطة إنعطاف للمنحني $(C)$ .

4) الإنشـــــــاء :




5) المناقشة البيانية :

لدينا : $f(x) = mx$ ، عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحني $(C)$ مع المستقيم ذو المعادلة $y = mx$ هذا الأخير يمرّ بالمبدأ $O$ ، (مناقشة دورانية) .

❖) إذا كان : $0 < m < 1$ ، فإنّ : المعادلة تقبل ثلاث حلول .

❖) إذا كان : $m \geq 1$ أو $m \leq 0$ فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد .

# حل مختصر للمسألة رقم 04

I) 1) بقراءة بيانية :

أ) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1$ ، و نعلم أنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(ax+b)e^x+c\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}(\underbrace{axe^x}_{0}+\underbrace{be^x}_{0}+c)=c$ .

إذن نستنتج أنّ : $c=-1$ .

ب) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ .

ج) لدينا : $g(0)=-2$ و $g'(0)=0$ .

- لدينا : $g(0)=-2$ ، أي : $(a\times 0+b)e^0-1=-2$ ، أي : $b-1=-2$ ، و منه : $b=-1$ .
- نحسب $g'(x)$ : $g'(x)=a\times e^x+(ax+b)e^x=e^x(a+ax+b)$ ، لدينا : $g'(0)=0$ ، أي :

$e^0(a+a\times 0-1)=0$ ، أي : $a-1=0$ ، و منه : $a=1$ .

إذن : $g(x)=(x-1)e^x-1$ .

2) أ) تشكيل جدول تغيّرات الدالة $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-1$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

ب) الدالة $g$ مستمرة و رتيبة على المجال $[1,2;1,3]$ ، و بما أنّ : $\begin{cases} g(1,2)=-\dots \\ g(1,3)=+\dots \end{cases}$ ، أي : $g(1,2)\times g(1,3)<0$ .

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ محصور بين : $1,2$ و $1,3$ .

ج) إشارة $g(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

II) لدينا : $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$ .

1) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x+1}=-\infty$ .

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}=0$ .

❖) بجوار $+\infty$ المنحنى $(C_f)$ يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .

2) لدينا : $(\Delta): y=x$ ، نحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{e^x+1}-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-xe^x-x}{e^x+1}$ ،

و منه : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\dfrac{-xe^x}{e^x+1}=0$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(-xe^x)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)=1\end{cases}$

إذن : المستقيم $(\Delta)$ مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ بجوار $-\infty$ .

❖) الوضعية : أي ندرس إشارة $\dfrac{-xe^x}{e^x+1}$ ، إذن : الإشارة من إشارة $(-x)$ .

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-x$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| الوضعية | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $O$ | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ |

3) دراسة إتجاه تغيّر الدالة $f$ :

❖) نحسب $f'(x)$ :

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)-xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(-x+1)e^x+1}{(e^x+1)^2}=\frac{-\left[(x-1)e^x-1\right]}{(e^x+1)^2}=\frac{-g(x)}{(e^x+1)^2}\ .$$

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ .

❖) جدول التغيّرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $0$ |

4) إثبات أنّ : $f(\alpha)=\alpha-1$ .

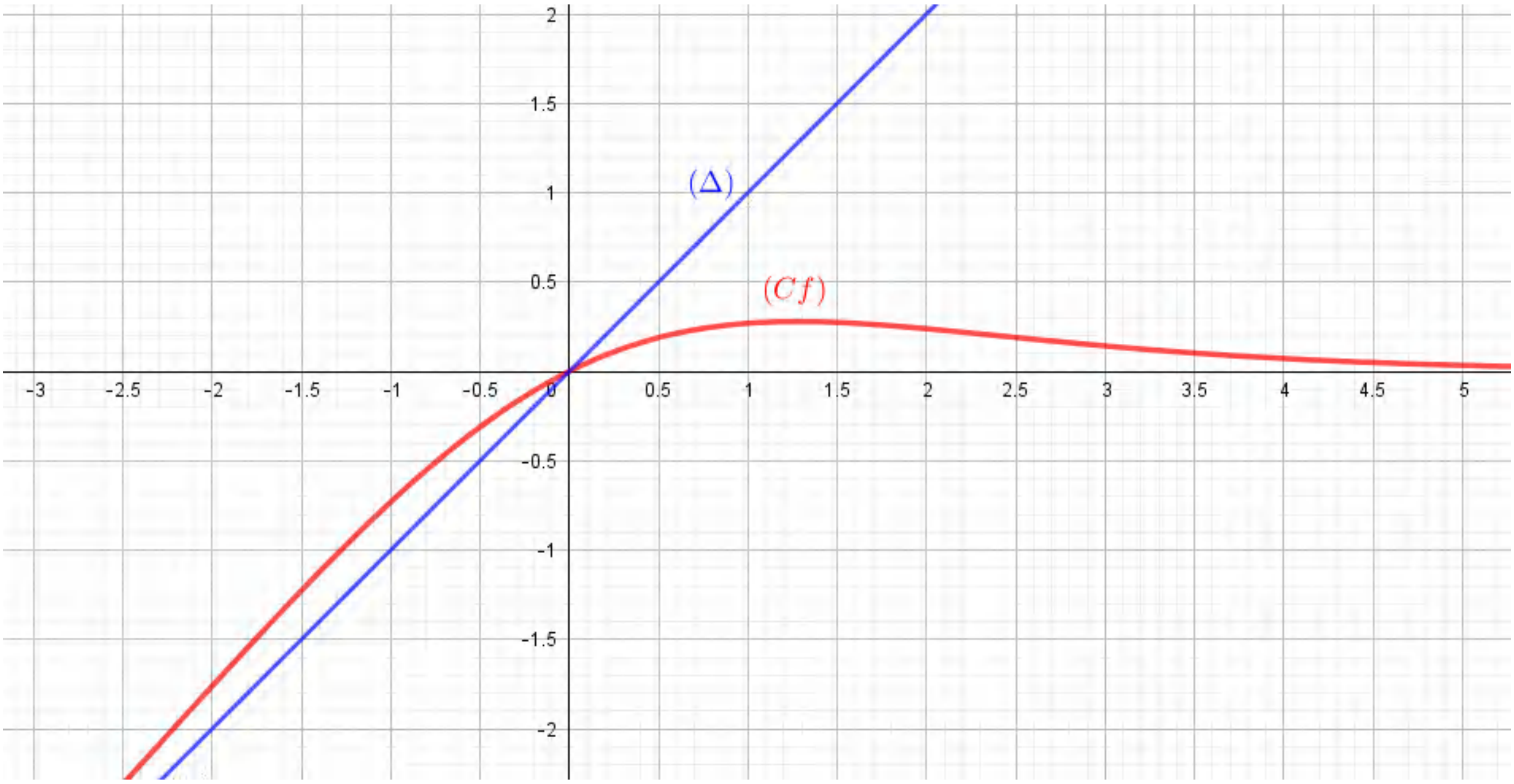
نعلم أنّ : $g(\alpha)=0$ ، أي : $(\alpha-1)e^\alpha-1=0$ ، أي : $(\alpha-1)e^\alpha=1$ ، و منه : $e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$ .

❖) لنحسب $f(\alpha)$ : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{e^\alpha+1}$ ، أي : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1}=\dfrac{\alpha}{\dfrac{1+\alpha-1}{\alpha-1}}=\dfrac{\alpha}{\dfrac{\alpha}{\alpha-1}}=\alpha\times\dfrac{\alpha-1}{\alpha}$ ،

و منه : $f(\alpha)=\alpha-1$ ، و هو المطلوب .

❖) حصر $f(\alpha)$ : لدينا : $1,2<\alpha<1,3$ ، أي : $0,2<\alpha-1<0,3$ ، و منه : $0,2<f(\alpha)<0,3$ .

5) الإنشــــــــاء :




6) المناقشة البيانية :

لدينا المعادلة : $f(x)=f(m)$ ، عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل و الذي معادلته : $y=f(m)$ .

- ❖ إذا كان : $m\in\left]-\infty;0\right]$ ، فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد .
- ❖) إذا كان : $m\in\left]0;\alpha\right[\cup\left]\alpha;+\infty\right[$ ، فإنّ : المعادلة تقبل حلان متمايزان .
- ❖) إذا كان : $m=\alpha$ ، فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد .

كتابة الأستاذ : ب . ع

# دراسة دالة أسية رقم 05

## المسألة 05 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\left[0;+\infty\right[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \quad ....;x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ .

$(C)$ هو المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

### الجزء الأوّل :

1) برهن أنّ المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحني $(C)$ .

2) أ) أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ ، و ذلك من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ .

ب) ماذا يمكن إستنتاجه بالنسبة للدالة $f$ ، و بالنسبة للمنحني $(C)$ ؟ .

3) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\left]0;+\infty\right[$ تكون : $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$ .

4) أدرس تغيّرات الدالة $f$ ، و شكل جدول تغيّراتها .

### الجزء الثاني :

نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $\left]0;+\infty\right[$ كما يلي : $g(x)=f(x)-xf'(x)$ .

1) بيّن أنّه في المجال $\left]0;+\infty\right[$ المعادلتان : $g(x)=0$ وَ $x^3+x^2+2x-1=0$ متكافئتان .

2) برهن أنّ المعادلة $x^3+x^2+2x-1=0$ تقبل حلاًّ وحيداً $\alpha$ ، حيث : $0,39<\alpha<0,40$ .

3) نفرض $(T_a)$ هو المماس للمنحني $(C)$ عند النقطة ذات الفاصلة $a$ ، حيث : $a>0$ .

أ) بيّن أنّ المماس $(T_a)$ يشمل المبدأ $O$ ، إذا وافقط إذا كان : $f(a)-af'(a)=0$ .

ب) إستنتج أنّ المماس $(T_a)$ المّـــار بالمبدأ يمسّ المنحني $(C)$ في النقطة ذات الفاصلة $\alpha$ .

ج) أنشئ المماس $(T_a)$ ، و المنحني $(C)$ .

4) بقراءة بيانية ، أعط عدد حلول المعادلة : $f(x)=mx$ ، و ذلك حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ .

❖ تعطى النتيـــــجة : $f'(\alpha)\approx 2,029$ .

# حل مختصر للمسألة رقم 05

لدينا : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \;....;x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ .

**الجزء الأول :**

1) حساب النهاية عند $+\infty$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x^2+x+1}{x^2})=\lim\limits_{x\to+\infty}=\dfrac{x^2}{x^2}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-\frac{1}{x}})=1 \end{cases}$ .

و منه : عند $+\infty$ المنحني $(C)$ يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $(\Delta): y=1$ .

2) أ) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}......(*)$ .

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x^2+x+1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}(\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3})e^{-\frac{1}{x}}$$ ، أي :

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[(\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}})+(\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}})+(\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}})\right]$$ ، أي :

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[-(-\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}})+(-\frac{1}{x})^2e^{-\frac{1}{x}}-(-\frac{1}{x})^3e^{-\frac{1}{x}}\right]$$ ، بوضع $t=-\dfrac{1}{x}$ ، $\begin{cases} x\to 0 \\ t\to-\infty \end{cases}$ نجد :

$\lim\limits_{t\to-\infty}(*)=\lim\limits_{t\to-\infty}(-te^t+t^2e^t-t^3e^t)=0$ ، لأنّ : $\lim\limits_{t\to-\infty} t^n\times e^t=0$ . إذن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ .

ب) نستنتج أنّ الدالة $f$ تقبل الإشتقاق عند $0$ ، و المنحني $(C)$ يقبل عند المبدأ $O$ مماساً هو حامل محور الفواصل .

3) حساب $f'(x)$ :

$$f'(x)=\frac{(2x+1)x^2-2x(x^2+x+1)}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}(\frac{x^2+x+1}{x^2})$$ ، أي :

$f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\left[\dfrac{2x^3+x^2-2x^3-2x^2-2x}{x^4}+\dfrac{x^2+x+1}{x^4}\right]$ ، و منه : $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$ ، و هو المطلوب .

4) دراسة تغيرات الدالة $f$ :

❖) لدينا : $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$ ، إشارة $f'(x)$ من إشارة : $(1-x)$ .

إذن : الدالة $f$ متزايدة على المجال $[0;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$ .

❖) جدول التغيّرات :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $3e^{-1}$ | $\searrow$ | $1$ |

**الجزء الثاني :** $g(x)=f(x)-xf'(x)$ .

1) لدينا : $g(x)=0$ معناه : $f(x)-xf'(x)=0$ ، أي : $\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}-x\frac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}=0$ ،

أي : $\left[\frac{x^2+x+1}{x^2}-\frac{1-x}{x^3}\right]e^{-\frac{1}{x}}=0$ ، أي : $\left[\frac{x^3+x^2+x}{x^3}-\frac{1-x}{x^3}\right]e^{-\frac{1}{x}}=0$ ، أي : $\left[\frac{x^3+x^2+2x-1}{x^3}\right]e^{-\frac{1}{x}}=0$

أي : $\frac{x^3+x^2+2x-1}{x^3}=0$ ، و منه : $x^3+x^2+2x-1=0$ .

إذن : المعادلتان $g(x)=0$ وَ $x^3+x^2+2x-1=0$ متكافئتان من أجل كل $x\in\left]0;+\infty\right[$ .

2) لنضع : $h(x)=x^3+x^2+2x-1$ ، أي : $h'(x)=3x^2+2x+2$ ، نلاحظ أنّ : $\Delta<0$ ، و منه إشارة $h'(x)$ موجبة تماما ، إذن : الدالة $h$ متزايدة تماما على المجال $\left]0;+\infty\right[$ .

❖) الدالة $h$ مستمرة و رتيبة على المجال $\left]0,39;0,40\right[$ وَ $\begin{cases}h(0,39)=-...\\h(0,40)=+...\end{cases}$ ، أي : $h(0,39)\times h(0,40)<0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ محصور بين : $0,39$ و $0,40$ .

3) أ) معادلة المماس $(T_a)$ هي : $(T_a):y=f'(a)(x-a)+f(a)$ .

لدينا : $(T_a)$ يمر بالمبدأ $O$ معناه أنّ : $O\in(T_a)$ ، أي : $0=f'(a)(0-a)+f(a)$ ، و منه : $f(a)-af'(a)=0$

إذن هي محققة.

ب) لدينا : $f(a)=\frac{a^2+a+1}{a^2}e^{-\frac{1}{a}}$ وَ $f'(a)=\frac{1-a}{a^4}e^{-\frac{1}{a}}$ ، و علماً أنّ : $f(a)-af'(a)=0$ .

إذن : $\frac{a^2+a+1}{a^2}e^{-\frac{1}{a}}-a\frac{1-a}{a^4}e^{-\frac{1}{a}}=0$ ، أي : $\left[\frac{a^2+a+1}{a^2}-\frac{1-a}{a^3}\right]e^{-\frac{1}{a}}=0$ ، أي :

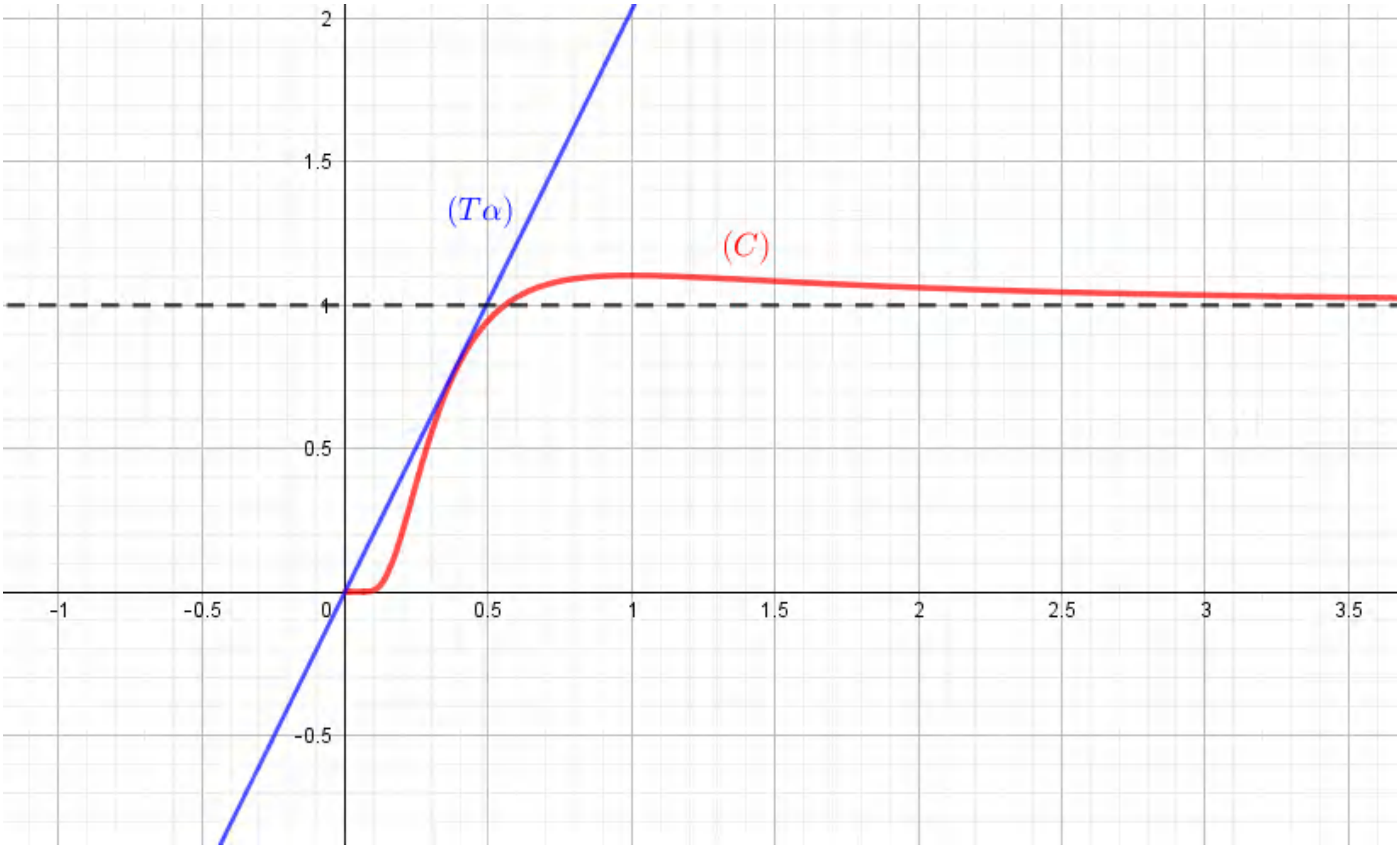
$\left[\frac{a^3+a^2+a}{a^3}-\frac{1-a}{a^3}\right]e^{-\frac{1}{a}}=0$ ، أي : $\frac{a^3+a^2+2a-1}{a^3}=0$ ، و منه : $a^3+a^2+2a-1=0$ .

و هذه الأخيرة تقبل حلا وحيدا $\alpha$ ، إذن : $a=\alpha$ .

و عليه : فإنّ المماس $(T_a)$ المار بالمبدأ $O$ يمسّ المنحني $(C)$ في النقطة ذات الفاصلة $\alpha$ .

❖) معادلة المماس : $(T_\alpha):y=2,029x$ .

ج) الإنشـــــاء :




4) المناقشة البيانية :

لدينا المعادلة : $f(x) = mx$ .

عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحني $(C)$ مع المستقيم ذو المعادلة $y = mx$ هذا الأخير المار بالمبدأ $O$ ، إذن : هناك مناقشة بيانية دورانية .

❖ إذا كان : $0 < m < 2,029$ فإنّ : المعادلة تقبل حلين متمايزين .

❖ إذا كان : $m \geq 2,029$ أو $m \leq 0$ فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد .

كتابة الأستاذ : ب . ع

# دراسة دالة أسية ذات الأساس $a$ (رقم 06)

**الجزء الأوّل :**

1) نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$ كما يلي : $g(x) = 3^x - x\ln 3 - 1$ .

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ تكون : $g'(x) > 0$ ، ثمّ استنتج إتجاه تغيّر الدالة $g$ على $\mathbb{R}^+$ .

ب) أحسب : $g(0)$ ، ثم استنتج أنّ : $g(x) > 0$ ، و هذا من أجل كل $x > 0$ .

2) لتكن الدالة $h$ المعرّفة على $\mathbb{R}^+$ بـ : $h(x) = (2 - x\ln 3)3^x - 1$ .

أ) أدرس تغيّرات الدالة $h$ ، وَ شكل جدولٍ تغيّراتها .

ب) بيّن أنّ المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ محصور بين : $1{,}6$ وَ $1{,}7$ .

ج) إستنتج إشارة الدالة $h$ على $\mathbb{R}^+$ .

**الجزء الثّاني :**

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{3^x - 1}{3^x - x\ln 3}$ .

و ليكن $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x \geq 0$ تكون : $f(x) = \dfrac{1 - 3^{-x}}{1 - x\ln 3 \times 3^{-x}}$ .

ب) إستنتج نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسياً .

ج) بيّن أنّه من أجل كل $x \geq 0$ تكون : $f'(x) = \dfrac{h(x) \times \ln 3}{(3^x - x\ln 3)^2}$ .

د) أدرس إتجاه تغيّر الدالة $f$ ، و شكل جدول تغيّراتها .

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x \geq 0$ يكون : $f(x) - x\ln 3 = \dfrac{(1 - x\ln 3) \times g(x)}{3^x - x\ln 3}$ .

ب) إستنتج الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ مع المستقيم $(D)$ ذو المعادلة : $y = x\ln 3$ .

3) أ) حدّد معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $0$ .

ب) أنشئ المماس $(T)$ وَ المنحني $(C_f)$ . (الوحدة : $5\ cm$)

# حل مختصر للمسألة رقم 06

**الجزء الأوّل :**

1) لدينا: $g(x)=3^x-x\ln 3-1$ ، أي: $g(x)=e^{x\ln 3}-x\ln 3-1$ .

أ) حساب: $g(x)'$ : $g(x)'=\ln 3\times e^{x\ln 3}-\ln 3$ ، أي: $g(x)'=\ln 3(e^{x\ln 3}-1)$ .

من أجل $x>0$ يكون: $x\ln 3>0$ ، أي: $e^{x\ln 3}>e^0$ ، أي: $e^{x\ln 3}>1$ ، و منه: $e^{x\ln 3}-1>0$ .

و بالتالي: $g(x)'>0$ ، و منه: الدالة $g$ متزايدة على $\mathbb{R}^+$ .

ب) لدينا: $g(0)=0$ ، من أجل كل: $x>0$ ، يكون: $g(x)>g(0)$ ، و منه: $g(x)>0$ .

2) لدينا: $h(x)=(2-x\ln 3)3^x-1$ ، أي: $h(x)=(2-x\ln 3)e^{x\ln 3}-1$ .

أ) دراسة تغيّرات الدالة $h$ :

❖) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2-x\ln 3)3^x-1\right]=-\infty$ ، لأنّ: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x\ln 3)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(3^x)=+\infty\end{cases}$ .

❖) حساب $h'(x)$ : $h'(x)=-\ln 3\times e^{x\ln 3}+\ln 3\times e^{x\ln 3}(2-x\ln 3)=\ln 3\times e^{x\ln 3}\left[-1+(2-x\ln 3)\right]$ ،

و منه: $h'(x)=\ln 3\times e^{x\ln 3}(1-x\ln 3)$ ، إذن: إشارة $h'(x)$ من إشارة: $(1-x\ln 3)$ .

لدينا: $1-x\ln 3\geq 0$ ، أي: $-x\ln 3\geq -1$ ، أي: $x\ln 3\leq 1$ ، و منه: $x\leq\dfrac{1}{\ln 3}$ .

❖) جدول التغيرات :

| $x$ | $0$ | | $\dfrac{1}{\ln 3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | $1$ | ↗ | $\approx 1,7$ | ↘ | $-\infty$ |

ب) الدالة $h$ مستمرة و رتيبة على المجال $\left[1,6;1,7\right]$ ، وَ $\begin{cases}h(1,6)=+\ldots\\ h(1,7)=-\ldots\end{cases}$ ، أي: $h(1,6)\times h(1,7)<0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ محصور بين: $1,6$ وَ $1,7$ .

ج) إشارة $h(x)$ :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

**الجزء الثاني :** $f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x-x\ln 3}$ .

1) أ) لدينا : $f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x-x\ln 3}=\dfrac{(3^x-1)3^{-x}}{(3^x-x\ln 3)3^{-x}}$ ، و منه : $f(x)=\dfrac{1-3^{-x}}{1-x\ln 3\times 3^{-x}}$ .

ب) حساب النهاية عند $+\infty$ :

نعلم أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{-x}=0$ وَ أيضاً : $\lim\limits_{x\to+\infty}-x\times 3^{-x}=0$ ، إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3^{-x}}{1-x\ln 3\times 3^{-x}}=1$ .

❖) **التفسير الهندسي :** عند $+\infty$ المنحني $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $y=1$

ج) حساب $f'(x)$ : لدينا : $f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x-x\ln 3}=\dfrac{e^{x\ln 3}-1}{e^{x\ln 3}-x\ln 3}$ .

$f'(x)=\dfrac{\ln 3\times e^{x\ln 3}(e^{x\ln 3}-x\ln 3)-(\ln 3\times e^{x\ln 3}-\ln 3)(e^{x\ln 3}-1)}{(e^{x\ln 3}-x\ln 3)^2}$ ، أي :

$f'(x)=\dfrac{\ln 3\times 3^x(3^x-x\ln 3)-(\ln 3\times 3^x-\ln 3)(3^x-1)}{(3^x-x\ln 3)^2}$ ، أي :

$f'(x)=\dfrac{\ln 3\times 3^x(3^x-x\ln 3)-\ln 3(3^x-1)(3^x-1)}{(3^x-x\ln 3)^2}$ ، أي :

$f'(x)=\dfrac{\ln 3\left[3^{2x}-3^x\times x\ln 3-3^{2x}+3^x+3^x-1\right]}{(3^x-x\ln 3)^2}$ ، أي :

$f'(x)=\dfrac{\ln 3(-3^x\times x\ln 3+2\times 3^x-1)}{(3^x-x\ln 3)^2}=\dfrac{\ln 3\left[(2-x\ln 3)3^x-1\right]}{(3^x-x\ln 3)^2}$ .

و منه : $f'(x)=\dfrac{\ln 3\times h(x)}{(3^x-x\ln 3)^2}$ ، و هو المطلوب .

د) دراسة إتجاه تغيّر الدالة $f$ :

❖) لدينا : $f'(x)=\dfrac{\ln 3\times h(x)}{(3^x-x\ln 3)^2}$ ، إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$ .

❖) جدول التغيّرات :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ | $\searrow$ | $1$ |

2) أ) $f(x)-x\ln 3=\dfrac{3^x-1}{3^x-x\ln 3}-x\ln 3=\dfrac{3^x-1-3^x\times x\ln 3+(x\ln 3)^2}{3^x-x\ln 3}$ ، أي :

$f(x)-x\ln 3=\dfrac{3^x-3^x\times x\ln 3-\left[1-(x\ln 3)^2\right]}{3^x-x\ln 3}=\dfrac{3^x(1-x\ln 3)-(1-x\ln 3)(1+x\ln 3)}{3^x-x\ln 3}$ ، أي :

$f(x)-x\ln 3=\dfrac{(1-x\ln 3)(3^x-1-x\ln 3)}{3^x-x\ln 3}$ ، و منه : $f(x)-x\ln 3=\dfrac{(1-x\ln 3)\times g(x)}{3^x-x\ln 3}$ .

ب) لدراسة الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ مع المستقيم $(D)$ يكفي دراسة إشارة : $(1-x\ln 3)$ لأنّه من أجل كل $x>0$ تكون : $g(x)>0$ وَ $(3^x-x\ln x)>0$ .

❖) نلخص الوضعية في الجدول التالي :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{\ln 3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-x\ln 3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الوضعية | | $(C_f)$ يقع فوق $(D)$ | $(C_f)$ يقطع $(D)$ في النقطة $A(\frac{1}{\ln 3};1)$ | $(C_f)$ يقع تحت $(D)$ | |

3) أ) كتابة معادلة المماس $(T)$ :

$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، لدينا : $\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=\ln 3 \end{cases}$ ، و منه : $(T): y=(\ln 3)x$ .

❖) نلاحظ أنّ : المماس $(T)$ هو نفسه المستقيم $(D)$ .

ب) الإنشـــــاء :


كتابة الأستاذ : ب . ع