# تمرين جيد في الحساب للمراجعة و التدرب

## نـــص التمرين :

نعتبر المتتالية $(a_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $a_n = 2\times 5^n + 7$ .

1) أ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون : $a_n$ فردي .

ب - عين حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليدية للعدد $5^n$ على 8 .

ج - إستنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون : $a_n \equiv 1[8]$ .

2) أ - برهن أنه إذا كان : $\begin{cases} x\equiv 1[8] \\ x\equiv 7[125] \end{cases}$ فإن : $x\equiv 257[1000]$ .

ب - بين أنه من أجل كل $n\geq 3$ يكون : $a_n \equiv 257[1000]$ .

ج - ما هي الأرقام الثلاث الأخيرة للعدد $\left(2\times 5^{2021}+7\right)\left(2\times 5^{2020}+7\right)$ ؟ .

3) أ - تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون : $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$ .

ب - نعتبر $PGCD\left(a_{2n};a_{2n+1}\right) = d$ ، بين أن $d$ يختلف عن 7 .

ج - جـــــد عندئذ $d$ .

## حل مقترح للتمرين :

لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ : $a_n = 2\times 5^n + 7$ .

1) أ – نلاحظ أن $a_n$ هو عبارة عن مجموع عددين أحدهما زوجي $(2\times 5^n)$ و الآخر فردي $(7)$ إذن : هو فردي .

**<u>أو كطريقة أخرى</u>** لدينا : $a_n = 2\times 5^n + 7$ أي : $a_n = 2\times 5^n + 2\times 3 + 1$ و منه : $a_n = 2\left(5^n+3\right)+1$ و هذا ما يدل على أن $a_n$ فردي .

ب – نجد : $5^0 \equiv 1[8]$ ، $5^1\equiv 5[8]$ ، $5^2 \equiv 1[8]$ .

إذن : من أجل $n=2k$ يكون : $\boxed{5^n\equiv 1[8]}$ و من أجل $n=2k+1$ يكون : $\boxed{5^n \equiv 5[8]}$ .

ج – نميز حالتين :

حالة : $n=2k$ (زوجي) فإن : $5^n\equiv 1[8]$ أي : $2\times 5^n \equiv 2[8]$ أي : $2\times 5^n + 7\equiv 9[8]$ و منه : $\boxed{a_n\equiv 1[8]}$ .

حالة : $n=2k+1$ (فردي) فإن : $5^n\equiv 5[8]$ أي : $2\times 5^n\equiv 10[8]$ أي : $2\times 5^n+7\equiv 17[8]$ و منه : $\boxed{a_n\equiv 1[8]}$ .

من الحالتين السابقتين نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن : $\boxed{a_n\equiv 1[8]}$ .

2) أ– لنبرهن أنه إذا كان : $\begin{cases} x\equiv 1[8] \\ x\equiv 7[125] \end{cases}$ فإن : $x\equiv 257[1000]$ .

لدينا : $\begin{cases} x\equiv 1[8] & \times 125 \\ x\equiv 7[125] & \times 8 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 125x\equiv 125[1000] \\ 8x\equiv 56[1000] & \times 16 \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} 125x\equiv 125[1000] \\ 128x\equiv 896[1000] \end{cases}$ بالطرح نجد : $3x\equiv 771[1000]$

بضرب هذه الأخيرة في 3 نجد : $9x \equiv 2313[1000]$ و نعلم أن : $2313 \equiv 313[1000]$ أي : $9x \equiv 313[1000]$

و منه تصبح : $\begin{cases} 9x \equiv 313[1000] \\ 8x \equiv 56[1000] \end{cases}$ بالطرح نتحصل على : $\boxed{x \equiv 257[1000]}$ هو المطلوب .

**<u>أو كطريقة أخرى :</u>**

لدينا : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 7[125] \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = 8\alpha + 1 \\ x = 125\beta + 1 \end{cases}$ و منه : $8\alpha + 1 = 125\beta + 7$ أي : $8\alpha = 125\beta + 6$ أي : $8\alpha \equiv 6[125]$

و منه : $4\alpha \equiv 3[125]$ أي : $124\alpha \equiv 93[125]$ و نعلم أن : $125\alpha \equiv 0[125]$ بالطرح نجد : $\alpha \equiv -93[125]$ و منه :

$\alpha \equiv 32[125]$ أي : $\boxed{\alpha = 125k + 32}$ نعوض قيمة $\alpha$ في : $x = 8\alpha + 1$ نجد : $x = 8(125k + 32) + 1$ أي :

$x = 1000k + 257$ و هذا ما يدل على أن : $\boxed{x \equiv 257[1000]}$ .

ب – لدينا من أجل $n \geq 3$ يكون : $5^n$ مضاعفا لــ 125 مثلا $(5^3 = 125)$ .

إذن : من أجل $n \geq 3$ فإن : $5^n \equiv 0[125]$ أي : $2 \times 5^n + 7 \equiv 7[125]$ و بالتالي يكون : $\boxed{a_n \equiv 7[125]}$ .

لدينا مما سبق أن : $a_n \equiv 1[8]$ و $a_n \equiv 7[125]$ إذن حسب السؤال (أ) فإن : $\boxed{a_n \equiv 257[1000]}$ هو المطلوب .

ج – لدينا : $a_{2020} \times a_{2021} = (2 \times 5^{2020} + 7)(2 \times 5^{2021} + 7)$ .

حسب ما سبق لدينا : $\begin{cases} a_{2020} \equiv 257[1000] \\ a_{2021} \equiv 257[1000] \end{cases}$ أي : $a_{2020} \times a_{2021} \equiv 257^2[1000]$ و منه : $a_{2020} \times a_{2021} \equiv 66049[1000]$

إذن : $\boxed{a_{2020} \times a_{2021} \equiv 49[1000]}$ و هذا ما يدل على أن آخر ثلاث أرقام للعدد $(2 \times 5^{2021} + 7)(2 \times 5^{2020} + 7)$ هي : $\boxed{049}$

3) أ – لدينا : $5a_{2n} - a_{2n+1} = 5(2 \times 5^{2n} + 7) - (2 \times 5^{2n+1} + 7)$ أي : $5a_{2n} - a_{2n+1} = 2 \times 5^{2n+1} + 35 - 2 \times 5^{2n+1} - 7$

إذن : $\boxed{5a_{2n} - a_{2n+1} = 28}$ .

ب – لدينا : $PGCD(a_{2n}, a_{2n+1}) = d$ أي أن : $d / a_{2n}$ و $d / a_{2n+1}$ ، لكن : $a_{2n} = 2 \times 5^{2n} + 7$ و نعلم أن : $(2 \times 5^{2n})$

ليس مضاعفا لــ 7 إذن : $a_{2n}$ فردي و لا يقبل القسمة على 7 إذن : $\boxed{d \neq 7}$ .

ج – إيجاد قيم $d$ :

لدينا : $PGCD(a_{2n}, a_{2n+1}) = d$ أي أن : $d / a_{2n}$ و $d / a_{2n+1}$ إذن : $d / 5a_{2n} - a_{2n+1}$ و منه : $\boxed{d / 28}$ .

و بالتالي قيم $d$ الممكنة هي : 28,14,7,4,2,1 لكن $d \neq 7$ و أيضا حسب السؤال (1) (أ) فإن : $a_n$ فردي

بالتالي فحسب الشروط السابقة نستنتج أن : $\boxed{d = 1}$ .

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق