مجلة Maths 5 min

الدوال الأصلية
Primitive Functions

الحساب التكاملي
Integral calculation

موجهة للشعب:

- علوم تجريبية
- تقني رياضي
- رياضيات
- تسيير و اقتصاد

انجاز الأستاذ: شعبان أسامة Mr.CHABANE Oussama.

مارس 2020 - تلمسان

وفقني الله عز و جل في اتمام هذا العمل البسيط خلال فترة عطلة الربيع ليكون لكم مرجعا متواضعا .

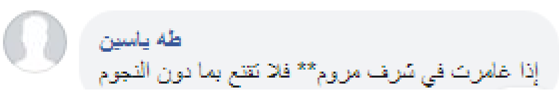
أتمنى لكم من صميم قلبي النجاح و التوفيق في المشوار الدراسي

أقدم هذا العمل كهدية علمية لجميع محبي للمادة

تحياتي لعائلتي الحبيبة

أ.شعبان

✏للدكتور: **شقرون طه**



اصنع نفسك بنفسك

تعليقاتكم

......

Accompagnateur Pedago
تقبل ألمك وتفوق في عملك تحقق حلمك.
تحياتي للأستاذين أ. شعبان و خ. بخاخشة...
الاستاذ م.ط
1

Super fan
Brothers DZ
امشي صحيح لا تزعزع لا طيح

You NNess
العلم نور و الجهل ضلام.......

Hal Bens
أشك في كل شيء ما عدا في أنني أشك
1

تسبية نوي
"من نفسك كن واثقا وبلا وجل"

Super fan
Hind Fihakhir
لا بأس مع الحياة ولا حياة مع اليأس 💜💙

Super fan
Rî Hâb
انت تستطيع ما دمت تثق بذلك
صبرا فكل ما يحدث لصالحك فلا يكلف الله نفسا إلا وسعها

Himoud Roumaissa
لا تطمح أن تكون أفضل من الآخرين ولكن إطمح أن تكون أفضل من نفسك سابقا

طه ياسين
إذا غامرت في شرف مروم** فلا تقنع بما دون النجوم

رؤوف سليمان
هل تريد تدريب عقلك ادن تمتع بالرياضيات الرياضيات لغة وفن

Sam Souma
قطيع جهل ما يجري .... و أفظع منه أن تدري

سليمان الفشتالي
من جد وجد ومن زرع حصد

Feriel Fertikh Bouattoura
بالجد و العمل يحقق الامل

Super fan
Řõuñ Łøûŕta
الم الاجتهاد اهون بكثير من الم الندم

Ryad Slimani
العلم صندوق مفتاحه السؤال

صابر بشيري
لكي تنجح يجب ان تكون رغبة النجاح اكبر من خوفك من الفشل

Super fan
Sãrãb Messaï
لا تستسلم ..أتعب الآن ثم عش "بطلا" بقية حياتك 😊

Rahaf Célia
سيمضي ما كان صعباً بلطف دون أن تشعر 💛 فالحلم ليس سهلا ولكنه ممكنا

نور حياة
ليس العيب ان تسقط ولكن العيب ان تبقى حيث سقطنا
1

Sal Sa Bil
بعد الضيق يجي الفرج

Super fan
Rî Hâb
انت تستطيع ما دمت تثق بذلك
صبرا فكل ما يحدث لصالحك فلا يكلف الله نفسا إلا وسعها

Super fan
سامية سامية
الارادة مطرقة جبارة تكسر صخرة المستحيل

Bouhdid Fatiha
من سلك طريقا يلتمس به علما سهل الله اليه طريقا الى الجنة

قريشي رمزي سيد علي
اما ان تنجح وأما ان تنجح
1

Nour Mi
علمتني الرياضيات: أن لكل متغير قيمة تؤدي إلى نتيجة فأختر متغيراتك جيدًا لتصل إلى ما يرضي الله.

Super fan
Physi Ker
بقدر همتك تجد نتيجتك ولو اردت القمر لنلته بقدر جهدك
#Physi_Ker

عبد المغيث
"نصف ما نحلم به، كان من الممكن أن نحصل عليه لو أننا لم نضيع نصف وقتنا في الأحلام 🍁
"
Flissi

Super fan
Mĩ Lã
فوض أمرك إلى الله ولن يخذلك أبداً 🖤
1

صابر بشيري
لكي تنجح يجب ان تكون رغبة النجاح اكبر من خوفك من الفشل

Nadia Harti
تعلم لا أدري فإن قلت لا أدري علموك حتى تدري وإن قلت أدري سألوك حتى لا تدري .

Abd Eldjalil Euldji
على قدر أهل العزم تأتي العزائم****
وتأتي على قدر الكرام المكارم
وتعظم في عين الصغير صغارها****
و تصغر في عين العظيم العظائم

Soumia Khelifi Si tu oses, ton courage grandira. Si tu hésites, c'est la peur qui prendra toute la place.

Abou Yacine
لا يوجد مصعد كهربائي للنجاح.....
عليك أن تصعد السلالم.....
4

Lon Ely
"هناك ساعة حرجة يبلغ الباطل فيها ذروة قوته ، ويبلغ الحق فيها أقصى محنته ، والثبات في هذه الساعة الشديدة هو نقطة التحول "

Super fan
سامية سامية
الارادة مطرقة جبارة تكسر صخرة المستحيل 1

Himoud Roumaissa
لا تطمح أن تكون أفضل من الآخرين ولكن إطمح أن تكون أفضل من نفسك سابقا

Aymen Boucenna
اذا كنت تبحث عن السعادة والثراء فابحث بعيدا عن التوظيف ولا تتحجج بالظروف 💪

لحزتي رواية
لا تحكم على مستقبلك من الآن ..فالأنبياء رعو الغنم ثم قادو الأمم
كلام الناس مثل الصخور ...اما ان تحطمها على ظهرك وتنكسر ... Voir plus

Amani Talbi
النجاح سلالم لا تستطيع ان ترتقيها ويديك في جيبك

Jazayria Warda
اطلب العلم ولو بالصين 1

Feriel Sci
نقاوم ما نحب ونتحمل ما نكره ، فالفوز في الحرب يسبقه الإنتصار على النفس ..

Super fan
Soraya Raya
فاقد الشيء يعطيه و بقوة

Salim Ali
الرياضيات مثل النبات يوميا يسقى من أجل الحياة 1

Hiwa Hiwa Khiwa
الله عند حسن ثقة عبده به 1

Super fan
Čhæyoum Zr
أزهر بتفاصيلك الصغيرة دون أن يسقيك أحد 😊

Djezairi Djezairi
ضع بصمتك

Akram Garel Metred
انجح للذي ينتظر فشلك 1

Ahlem Bkr
لا يمكنك صعود سلم النجاح و يديك في جيبك . 1

Nasr Eddine Bekhouche
خيرا تعمل
خيرا تلقى

Merime MiMi
مالاتتعب عليه الأيدي لاتحزن عليه القلوب

Mimi Rayane
"تنتهي المستحيلات عندما أقرأ "ان الله على كل شيء قدير
مريم ريان.م

Meriem Ghanem
أفضل أن أفشل على شرف أن أنجح بالغش 👌 2

Soumia Khelifi
اطمئن..
ما اشتدّت وتعسّرت واستحالت،
إلا واستُسهلت وتيسّرت واستهانت

Ali Bey
القناعة تغنيك عن الدنيا 1

Super fan
Marcos Stat La vie aide ceux qui aident la vie.

Islam Ferahtia
لطالما أمنت بأن الالم هو ما يدفعنا لأن نبدع ولأن نكبر.... و نزداد عظمة

بناتي قرة عيني
الى متى ستظل تحلم بغيرك الذي لايهتم بك انضر الى نفسك قبل الاخرين

Ritage Setif
ان مع العسر يسرا

Soumia Khelifi Si tu oses, ton courage grandira. Si tu hésites, c'est la peur qui prendra toute la place.

Super fan
Flø Rã
لم نُخلق للبقاء ، فأصنع لـ روحك أثرا طيبا يبقى من بعدك.. 👌

Super fan
Hal Ooma If you can dream it.. You can do it 💪

رؤوف رؤوف
ليس النجاح أن تكون الأول إنما النجاح أن تكون أحسن من ذي قبل

فرح فرح
لن تستسلم ابدا الا إذا توقفت عن المحاولة

Nadia Harti Hadjer Bedrouni الابتعاد عن صغار العقول لاعلاقة له بالغرور
فهناك فرق كبير بين الترفع والتكبر
الجمال يعيش داخل الأشياء البسيطة

Jazayria Warda
اطلب العلم ولو بالصين 1

مجلة Maths 5 min

تجدون فيها:

ملخص الدرس

تطبيقات

QCM

تمارين + الحل

من البكالوريا

Summary-ملخص الدرس

I. الدالة الأصلية.

1.الدالة الأصلية لدالة على مجال:

تعريف: f دالة معرفة على مجال I.

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I مشتقتها F' هي f.

من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$

خواص:

* إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالا أصلية على I.
* إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال $x \mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

2.الدوال الأصلية لِ $f+g$ و kf (k عدد حقيقي)

خواص:

* إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لدالتين f و g على مجال I فإن $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I.
* إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على I $(k \in \mathbb{R})$

3. الدوال الأصلية لدوال مألوفة:

c عددا حقيقي كيفي.

f دالة معرفة على I بِ $f(x)=$	الدوال الأصلية لِ f على I هي الدوال المعرفة بِ $F(x)=$	المجال I هو
a (a عدد حقيقي)	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x+c	$\mathbb{R}$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+c,(a\neq 0)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+c$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$-\cos x+c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x+c$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k\in\mathbb{Z})$

4.الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2+c$	
($n\in\mathbb{N}^*$) $u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$(n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N})\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)>0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$

II. الحساب التكاملي

1.الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحن:

خاصية

f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان

من I حيث $a\leq b$. (C_f) منحنى f في معلم متعامد $(O;A,B)$ و F دالة أصلية لِـ f على I.

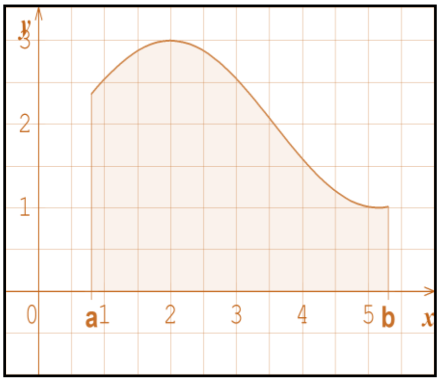
مساحة الحيز تحت المنحنى (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.

ملاحظات:

الحيز تحت المنحنى (C_f) بين العددين a و b هو

الحيز المحدد بالمنحني (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين

اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$.



تعريف:

f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I.

يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$، حيث F دالة أصلية لـ f على I،

التكامل من a إلى b لِـ f و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$.

ملاحظات:

1. عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x)dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F للدالة f على مجال I يشمل العددين a و b ثم

نكتب: $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

2. يمكن تبديل المتغير x بأحد الحروف t، q،... فيكون لدينا مثلا $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$

نتيجة:

f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a\leq b$. (C_f) منحنى f في

معلم متعامد $(O;A,B)$ و F دالة أصلية لِـ f على I.

مساحة الحيز تحت المنحنى (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$

2. خواص التكامل:

f و g دالتان معرفتان و مستمرتان على مجال I.

أ-الخطية

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I و من أجل كل عدد حقيقي k لدينا:

$$(1)\quad \int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

$$(2)\quad \int_a^b k f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$

ب- الترتيب

خواص: a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \le b$.

(1) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x) \ge 0$ فإن $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

(2) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x) \le g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

ج- علاقة شال

خواص: من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c من I لدينا:

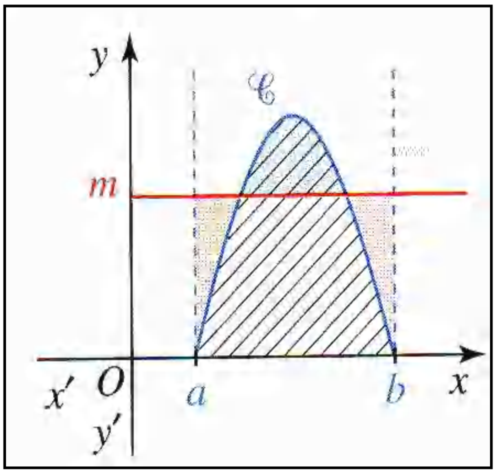
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

3.القيمة المتوسطة لدالة على مجال:

تعريف:

f دالة معرفة و مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a<b$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي: $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.



التفسير البياني:

نفرض أن الدالة f موجبة على المجال $[a;b]$.

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;I,J)$.

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad \text{يعني} \quad m(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

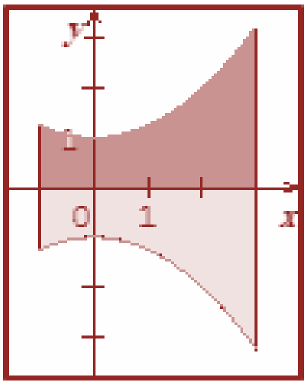
نعلم أن $\int_a^b f(x)dx$ هو مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b.

$m(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعداه $b-a$ و m (القيمة المتوسطة).

و هكذا فإن m، القيمة المتوسطة لِ f على $[a;b]$، هي " ارتفاع " المستطيل

الذي قاعدته $b-a$ و الذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b.

نلاحظ أن للحيزين الملونين بالأزرق و الأحمر نفس المساحة.



حصر القيمة المتوسطة

خواص: f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$.

إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a;b]$، $m \le f(x) \le M$ فإن:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكان a و b عددان حقيقيان من I و وجد عدد حقيقي M

بحيث من أجل كل x من I، $|f(x)|\le M$ فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le M|b-a|$.

4.تكامل دالة سالبة على مجال

لتكن f دالة مستمرة و سالبة على مجال $[a;b]$. و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نرمز بِ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها

$x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ و بِ A' إلى مساحة D' الحيز المحدد بالمنحني (C_{-f})

و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$.

بما أن f سالبة على $[a;b]$ فإن $-f$ موجبة على $[a;b]$ و بالتالي $A'=\int_a^b -f(x)dx$

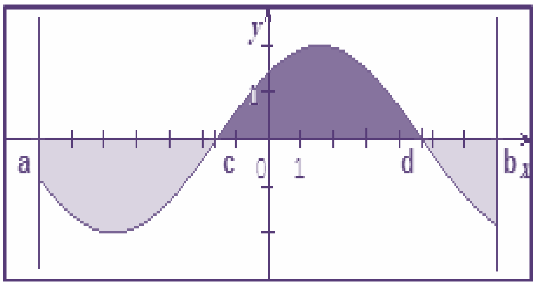
الحيزان D و D' متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل فمساحتاهما متساويتان أي $A'=A$.

و بالتالي فإن $A=\int_a^b -f(x)dx$ أو $\int_a^b f(x)dx=-A$. نقول أحيانا أن $\int_a^b f(x)dx$ هي

المساحة الجبرية للحيز D

فتكون سالبة إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ و تكون موجبة إذا كانت f موجبة على $[a;b]$.

5.تكامل دالة تغير إشارتها على مجال



لتكن مثلا f دالة مستمرة و تغير إشارتها على مجال $[a;b]$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نرمز بِ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$.

نلاحظ مثلا في الشكل أعلاه أن f موجبة على $[c;d]$ و سالبة على المجالين $[a;c]$ و $[d;b]$.

نرمز بِ A_1 إلى مساحة الحيز D_1، بِ A_2 إلى مساحة الحيز D_2 و بِ A_3 إلى مساحة الحيز D_3. لدينا $A=A_1+A_2+A_3$ و بما أن $A_1=-\int_a^C f(x)dx$

، $A_2=\int_c^d f(x)dx$ و $A_3=-\int_d^b f(x)dx$. فإن $A=-\int_a^C f(x)dx+\int_c^d f(x)dx-\int_d^b f(x)dx$

ملاحظة:

بصفة عامة لحساب مساحة حيز محدد بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ و بمنحن ممثل لدالة f

تغير إشارتها على $[a;b]$ نقوم أولا بتحديد المجالات التي تحتفظ فيها الدالة بإشارة ثابتة (سالبة أو موجبة) ثم نطبق النتيجة المناسبة على كل مجال من هذه المجالات.

6. المكاملة بالتجزئة (التكامل بالتجزئة)

مبرهنة:

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين u' و v' مستمرتان على I.

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

خواص

خاصية1: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن:

- الدالة $f: x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
- الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على I.

خاصية2: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن:

- الدالة $f: x \mapsto \ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ على I.

✓ تطبيقات

Applications

تطبيق 1:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$F(x)=\frac{x-1}{x+1}-2x \quad \text{و} \quad f(x)=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

الحل:

طريقة: لإثبات أن F دالة أصلية لِ f على مجال I يكفي أن نثبت أن F قابلة للاشتقاق على I و أن من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$.

F دالة ناطقة معرفة على $]-1;+\infty[$ فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ و من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ لدينا:

$$F'(x)=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}-2=\frac{2}{(x+1)^2}-2$$

و منه:

$$F'(x)=\frac{2-2(x+1)^2}{(x+1)^2}=\frac{2\left[1-(x+1)^2\right]}{(x+1)^2}=\frac{2\left[(1-x-1)(1+x+1)\right]}{(x+1)^2}=\frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2}$$

و بالتالي:

$$F'(x)=\frac{-2x^2-4x}{(x+1)^2}=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}=f(x)$$

و هكذا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $F'(x)=f(x)$. إذن F دالة أصلية لِ f على المجال $]-1;+\infty[$.

تطبيق 2:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=2x-1$

1. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
2. عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $F(2)=-1$.

الحل:

1. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x\mapsto x^2-x+k$ حيث k عدد حقيقي.

2. لدينا من جهة $F(x)=x^2-x+k$ و لدينا من جهة ثانية $F(2)=-1$.

$F(2)=-1$ يعني $2^2-2+k=-1$ و منه $k=-3$. نجد هكذا أن $F(x)=x^2-x-3$

تطبيق 3:

نعتبر الدالتين F و G المعرفتين على $]2;+\infty[$ كما يلي:

$$F(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-2} \quad \text{و} \quad G(x)=\frac{2x-1}{x-2}+x$$

باستعمال طريقتين مختلفتين بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الحل:

__الطريقة الأولى:__ نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x)=G'(x)$

من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x)=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ و $G'(x)=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$

إذن من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x)=G'(x)$. الدالتان هما إذن دالتان أصليتان لنفس الدالة.

__الطريقة الثانية:__ نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F(x)-G(x)=k$ حيث k عدد حقيقي.

من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F(x)-G(x)=\left(\frac{x^2-2x+3}{x-2}\right)-\left(\frac{2x-1}{x-2}+x\right)=\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$.

تطبيق 4:

عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

* $f(x)=x^3-3x+5$ و $I=\mathbb{R}$ * $g(x)=\frac{2}{x^2}$ و $I=]-\infty;0[$ * $h(x)=\frac{3}{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $I=]0;+\infty[$

الحل:

* دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بـ: $F(x)=\frac{1}{3+1}x^{3+1}-3\times\frac{1}{2}x^2+5x=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+5x$

* دالة أصلية G للدالة g على $I=]-\infty;0[$ معرفة بـ: $G(x)=2\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{2}{x}$

* دالة أصلية H للدالة h على $I=]0;+\infty[$ معرفة بـ: $H(x)=3\left(-\frac{1}{(3-1)x^{3-1}}\right)-2\sqrt{x}=-\frac{3}{2x^2}-2\sqrt{x}$.

تطبيق 5:

عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

* $f(x)=(x+1)(x^2+2x+5)^2$ و $I=\mathbb{R}$ * $g(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$ و $I=\mathbb{R}$

الحل:

طريقة:لتعيين دالة أصلية على مجال I لدالة f يمكننا:

1. ملاحظة إذا كانت f تكتب على أحد الأشكال $u'u^n$ أو $\dfrac{u'}{u^n}$ أو $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ مع تحديد عبارة $u(x)$.
2. حساب $u'(x)$ ثم تحديد عددا حقيقيا k بحيث $f=k\times u'u^n$ أو $f=k\times\dfrac{u'}{u^n}$ أو $f=k\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.
3. تطبيق قواعد الدوال الأصلية.

- يظهر و أن الدالة f من الشكل $u'u^n$ مع $u(x)=x^2+2x+5$.

لدينا $u'(x)=2x+2$ أي أن $u'(x)=2(x+1)$ و منه $x+1=\dfrac{1}{2}u'(x)$

نجد هكذا أن: $f(x)=\dfrac{1}{2}u'(x)\times[u(x)]^2$ أي أن $f=\dfrac{1}{2}\times u'u^2$.

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}[u(x)]^3$ أي $F(x)=\dfrac{1}{6}(x^2+2x+5)^3$.

- يظهر و أن الدالة g من الشكل $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ مع $u(x)=x^2+1$.

لدينا $u'(x)=2x$ أي أن و منه $3x=\dfrac{3}{2}u'(x)$ نجد هكذا أن: $g(x)=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ أي أن $g=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $G(x)=\dfrac{3}{2}\times2\sqrt{u(x)}=3\sqrt{u(x)}$ أي $G(x)=3\sqrt{x^2+1}$.

تطبيق 6:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+\cos x$

1. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2. عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $F(\pi)=-1$.

الحل:

1. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x\mapsto x^2+\sin x+k$ حيث k عدد حقيقي.

2. لدينا من جهة $F(x)=x^2+\sin x+k$ و لدينا من جهة ثانية $F(\pi)=-1$.

$F(\pi)=-1$ يعني $\pi^2-0+k=-1$ و منه $k=-1-\pi^2$. نجد هكذا أن $F(x)=x^2+\sin x-1-\pi^2$.

تطبيق 7:

أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_{0}^{1}\left(x^{2}+1\right)dx$ **2)** $\int_{-1}^{1}\left(x^{3}-x\right)dx$ **3)** $\int_{-3}^{2}2x\,dx$

الحل:

1) $\int_{0}^{1}\left(x^{2}+1\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^{3}+x\right]_{0}^{1}=\left(\frac{1}{3}+1\right)-0=\frac{4}{3}$

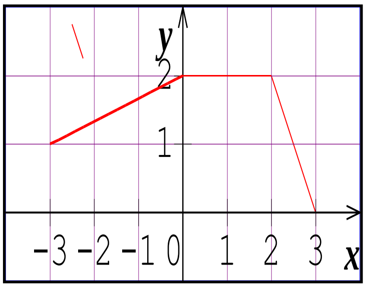
2) $\int_{-1}^{1}\left(x^{3}-x\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^{4}-\frac{1}{2}x^{2}\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=0$

3) $\int_{-3}^{2}2x\,dx=\left[x^{2}\right]_{-3}^{2}=(2)^{2}-(-3)^{2}=4-9=-5$.

تطبيق 7:

التمثيل البياني الذي بالأسفل هو لدالة f .

أحسب التكاملات التالية: **1)** $\int_{-3}^{2}f(x)dx$ **2)** $\int_{-3}^{3}f(x)dx$ **3)** $\int_{0}^{3}f(x)dx$.



الحل: نلاحظ أن الدالة f موجبة على المجال $[-3;3]$.

1) $\int_{-3}^{2}f(x)dx=3\times\frac{1+2}{2}+4=\frac{17}{2}$ 2) $\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{17}{2}+\frac{1\times2}{2}=\frac{19}{2}$ 3) $\int_{0}^{3}f(x)dx=2\times2+\frac{1\times2}{2}=5$.

تطبيق 7:

f و g دالتان مستمرتان على المجال $[1;3]$ حيث: $\int_{1}^{3}f(x)dx=2$ و $\int_{1}^{3}g(x)dx=-5$.

أحسب التكاملات التالية: أ) $\int_{1}^{3}\left[f(x)+g(x)\right]dx$ ، ب) $\int_{1}^{3}5f(x)dx$ ، جـ) $\int_{1}^{3}\left[2f(x)-3g(x)\right]dx$

الحل: أ) $\int_{1}^{3}\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_{1}^{3}f(x)dx+\int_{1}^{3}g(x)dx=2-5=-3$.

ب) $\int_1^3 5f(x)dx = 5\int_1^3 f(x)dx = 5\times 2 = 10$.

جـ) $\int_1^3 [2f(x)-3g(x)]dx = 2\int_1^3 f(x)dx - 3\int_1^3 g(x)dx = 2(2)-3(-5) = 19$.

تطبيق 7:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$ ، $f(x) \le 1$. استنتج أن $\int_0^1 f(x)dx \le 1$

الحل: من أجل كل x من $[0;1]$، $1+x^2 \ge 1$ و منه من أجل كل x من $[0;1]$، $\dfrac{1}{1+x^2} \le 1$.

نستنتج أن $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx \le \int_0^1 1dx$ و بما أن $\int_0^1 1dx = [x]_0^1 = 1$ فإن $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx \le 1$.

تطبيق 7:

f دالة معرفة على $[-1;2]$ بـ $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in [-1;1] \\ 2x-1 & , x \in [1;2] \end{cases}$.

أحسب $\int_{-1}^2 f(x)dx$.

الحل: $\int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 x^2dx + \int_1^2 (2x-1)dx$

لدينا: $\int_{-1}^1 x^2dx = \left[\dfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \left(\dfrac{1}{3}\right) - \left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$ و $\int_1^2 (2x-1)dx = [x^2-x]_1^2 = 2-0 = 2$

و منه $\int_{-1}^2 f(x)dx = \dfrac{2}{3} + 2 = \dfrac{8}{3}$.

تطبيق 7:

f دالة مستمرة على مجال I. a ، b عددان حقيقيان من I. بين أن:

$\int_a^a f(x)dx = 0$ (1) ، $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (2)

الحل: لتكن F دالة أصلية للدالة f على I.

$$\int_a^a f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^a=F(a)-F(a)=0 \quad :(1)$$

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^a f(x)dx=\int_a^a f(x)dx=0 \quad :(2)$$ و منه $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

تطبيق 7:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x-1$

أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;2]$.

الحل: القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;2]$ هي العدد الحقيقي m حيث:

$$m=\frac{1}{2-1}\int_1^2(2x-1)dx=\left[x^2-x\right]_1^2=(4-2)-(1-1)=2 .$$

تطبيق 7:

أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_{-1}^{2}\left(-3x^2+1\right)dx$ **2)** $\int_0^1 e^{2x-1}dx$ **3)** $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx$

الحل:

.1 $\int_{-1}^{2}\left(-3x^2+1\right)dx=\left[-x^3+x\right]_{-1}^{2}=(-6)-(0)=-6$.

.2 $\int_0^1 e^{2x-1}dx=\frac{1}{2}\left[e^{2x-1}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[(e)-\left(e^{-1}\right)\right]=\frac{e^2-1}{2e}$.

.3 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx=\left[-\cos x\right]_{-\pi}^{\pi}=(1)-(1)=0$.

تطبيق 7:

عين، باستعمال المكاملة بالتجزئة، الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ و التي تنعدم عند 1.

الحل:

طريقة: يمكننا دائما وضع $u(x)=u(x)v'(x)$ حيث $v'(x)=1$.

الدالة $x \mapsto \ln x$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$. و بالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند1 هي الدالة F المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بِـ $F(x)=\int_1^x \ln(t)dt$.

نضع $u(t)=\ln(t)$ ، $v'(t)=1$ و منه $u'(t)=\frac{1}{t}$ ، $v(t)=t$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $F(x)=[t\ln t]_1^x-\int_1^x \frac{1}{t}\times t\,dt = x\ln x-\int_1^x dt$

و منه $F(x)=x\ln x-[t]_1^x = x\ln x-(x-1)=x\ln x-x+1$

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بِـ $F(x)=x\ln x-x+1$.

ملاحظة:

الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ هي الدوال $x \mapsto x\ln x-x+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$

و بصفة عامة نثبت بإتباع نفس الطريقة أن الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \ln(x+a)$ على المجال $]-a;+\infty[$ هي الدوال $x \mapsto (x+a)\ln(x+a)-x+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

? أختبر معلوماتي QCM

لكل الأسئلة التالية ، إجابة واحدة صحيحة، ما هي ؟

❶. f هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $F(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-2}$ ، F هي دالة أصلية لدالة **f** على $]0;+\infty[$

أ) $G: x \mapsto \frac{x^2+x-1}{(x+-11)}-x$	ب) $G: x \mapsto \frac{x^2+x+1}{(x+1)}$	جـ) $G(x)=\frac{2x-1}{x-2}+x$

❷. **f** دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=2x-1-\frac{1}{(x+1)^2}$ دالة أصلية **F** للدالة **f** على $]-1;+\infty[$ معرفة بـ:

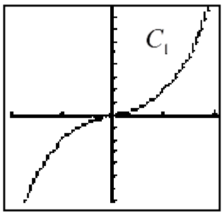
أ) $F(x)=\frac{x^3+x+1}{(x+1)^2}$	ب) $F(x)=\frac{-x+1}{(x+1)^2}$	جـ) $F(x)=\frac{x^3-x+1}{(x+1)^2}-1$

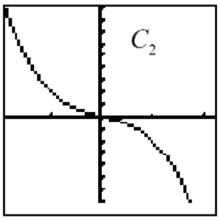
❸. **f** دالة موجبة على مجال **D** و **F** دالتها الأصلية على هذا المجال، إذن:

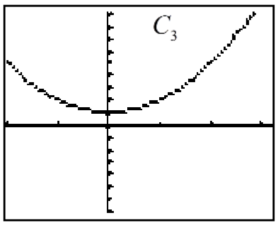
أ) **F** متزايدة تماما على **D**	ب) **F** متناقصة تماما على **D**	جـ) **F** ليست رتيبة تماما على **D**

❹. **f** دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-1-x^2$

أحد المنحنيات التالية C_1 ، C_2 و C_3 هو منحنى بياني لدالة أصلية للدالة **f** على $\mathbb{R}$







المنحنى (C) هو:

أ) C_1	ب) C_2	جـ) C_3

❺. لتكن **f** دالة معرفة و مستمرة على مجال **I** يشمل الأعداد الحقيقية **a** ، **b** و **c** :

$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_a^c (-f(x))dx$ (2	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (1
$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx$ (4	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$ (3

6. لتكن **f** دالة زوجية ، مستمرة و موجبة على $[-2;2]$:

$\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_0^2 f(x)dx$ (2	$\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$ (1
$\int_{-2}^{2} f(x)dx = -2\int_0^{-2} f(x)dx$ (4	$\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_0^{-2} f(x)dx$ (3

7. لتكن **M** القيمة المتوسطة للدالة **f** على مجال $[a;b]$

$M = \int_a^b \frac{f(x)}{b-a}dx$ (2	$M = \int_a^b \frac{f(b)-f(a)}{b-a}dx$ (1
$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ (4	$M = \frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)dx$ (3

8. $\int_1^2 \frac{3}{x^4}dx = ...$.

$\frac{9}{8}$ (3	$\frac{7}{8}$ (2	$-\frac{9}{8}$ (1

9. الدالة الأصلية للدالة $f : x \mapsto \frac{-x^3+ex}{x^2}$ التي تنعدم من أجل $x=1$.

$F(x) = \frac{-x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$ (3	$F(x) = \frac{-x^2}{2} + e\ln x + \frac{1}{2}$ (2	$F(x) = \frac{-x^2}{2} + e\ln x$ (1

	الاقتراح الصحيح	التعليل
1	ج)	لأن: $F(x)-G(x)=k, k=-2$
2	ج)	لأن: $F(x)=x^2-x+\frac{1}{x+1}=\frac{x^3-x+1}{(x+1)^2}-1$
3	أ)	اذا كانت الدالة المشتقة $(f'(x)>0)$ موجبة فتكون الدالة متزايدة تماما .
4	ب)	لأن نلاحظ أن: $f(x)=-1-x^2=-(1+x^2)<0$ و بالتالي الدالة F **متناقصة تماما**
5	3+1	**علاقة شال**
6	4+2	$\int_{-2}^{2} f(x)dx=2\int_{0}^{2} f(x)dx$ أو $\int_{-2}^{2} f(x)dx=-2\int_{0}^{-2} f(x)dx$
7	4+2	$M=\int_{a}^{b}\frac{f(x)}{b-a}dx$ أو $M=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx$
8	2	$\int_{1}^{2}\frac{3}{x^4}dx=\left[-3\frac{1}{3x^3}\right]_1^2=\left[-\frac{1}{x^3}\right]_1^2=-\frac{1}{8}+1=\frac{7}{8}$.
9	2	$f: x\mapsto \frac{-x^3+ex}{x^2}$ $f: x\mapsto -x+\frac{e}{x} \Rightarrow F(x)=-\frac{x^2}{2}+e\ln x+c, c\in\mathbb{R}$ $F(1)=0 \rightarrow c=\frac{1}{2}$ اذن: $F(x)=\frac{-x^2}{2}+e\ln x+\frac{1}{2}$

تمارين

Exercises

①

بين أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال D في كل حالة من الحالات التالية:

1). $F: x \mapsto x^2 - 3x + 1$ ، $f: x \mapsto 2x - 3$ ، $D = \mathbb{R}$

2). $F: x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x$ ، $f: x \mapsto 3x^2 - 12x + 9$ ، $D = \mathbb{R}$

3). $F: x \mapsto 2 + \dfrac{x+1}{x-1}$ ، $f: x \mapsto \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

②

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2}$

1. أعط دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2. أعط كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

3. جد الدالة الأصلية F للدالة f والتي تحقق: $F(1) = 2$.

③

f وF دالتان معرفتان على $]1;+\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 2}{(1-x)^2}$ و $F(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{1-x}$

عين الأعداد الحقيقية a ،b وc حتى تكون الدالة F أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$ حيث $F(0) = 3$.

④

f دالة معرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 4}{(x-2)^2}$

1. عين الأعداد الحقيقية a ، b وc حيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 2$: $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x-2)^2}$

2. استنتج دالة أصلية F للدالة f على $]2;+\infty[$ تحقق $F(3)=-1$.

⑤

جد الدوال الأصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ للدوال التالية:

1) $f(x)=2-\dfrac{1}{x^2}$ 2) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^4}$ 3) $f(x)=1+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}$ 4) $f(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}+x-1$

5) $f(x)=e^{-x}+\dfrac{2}{x}$ 6) $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-2}{3}$ 7) $f(x)=-3\sin x+2\cos x+1$

⑥

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{6e^x}{e^{2x}-1}$

1. عين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{\alpha e^x}{e^x-1}+\dfrac{\beta e^x}{e^x+1}$

2.استخدم النتيجة السابقة لإيجاد دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

⑦

أحسب التكاملات التالية:

1) $\displaystyle\int_0^3 (2x+3)\,dx$ 2) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^2\,dx$ 3) $\displaystyle\int_{-5}^5 (4-x)\,dx$ 4) $\displaystyle\int_0^2 (1-x^2)\,dx$

5) $\displaystyle\int_1^2 (x^2+x-2)\,dx$ 6) $\displaystyle\int_{-1}^0 (-3x^2+2x)\,dx$ 7) $\displaystyle\int_{-2}^2 -x^3\,dx$ 8) $\displaystyle\int_0^1 (x^3+2x+2)\,dx$

9) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)dx$ 10) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1-t^3+t^4}{t^2}\right)dt$ 11) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3}\,dx$ 12) $\displaystyle\int_0^1 \frac{-2}{(x-2)^3}\,dx$

⑧

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث $f(x)=\dfrac{2x^3+3x^2+4}{x^2}$ نرمز بـ (C) إلى التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1.عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x^2}$

2. احسب المساحة $S(\lambda)$ للحيز المحدد بالمنحني (C)

و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما:

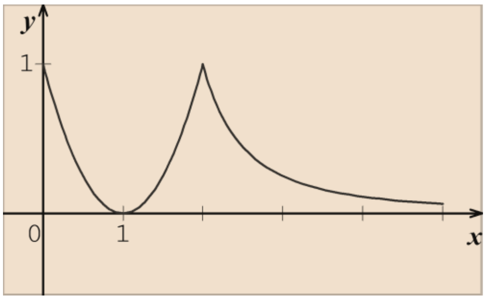
$x=1$ و $x=\lambda$ حيث λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1.

⑨

(C) هو المنحني البياني الممثل لدالة f في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$ الممثل لدالة f

معرفة على $[0;5]$ حيث : $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2;0\le x\le 2\\ f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2};2\le x\le 5\end{cases}$

احسب المساحة تحت المنحني (C) بين 0 و 5 مقدرة بـ cm^2.



⑩

1) أدرس تغيرات الدالتين f ، g حيث

$f(x)=x^2+2x+3$ ، $g(x)=-x^2+2x+8$

(2) أرسم (C_f) و (C_g)

(3) أحسب مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمات التي معادلتها $(x=-)$ و $(x=1)$

⑪

أحسب التكامل التالي: $\int_0^3 |x^2-1|dx$.

⑫

نعتبر التكاملين: $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$

أحسب $A+B$ و $A-B$ ثم استنتج A و B.

⑬

نعتبر التكامل $I=\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt$

1. بين أنه من أجل كل t من $[0;1]$ ، $\frac{1}{t^2+1}\le 1$.

2. استنتج حصرا للعدد I.

14

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;1]$ بـ $f(x)=x^2$

1. أرسم التمثيل البياني (C) للدالة f في معلم متعامد و متجانس ثم أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[-1;1]$.

2. فسر بيانيا النتيجة.

15

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بِـ $f(x)=1+\ln(x+1)$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;e-1]$.

2. استنتج حصرا لِـ $f(x)$.

3. استنتج حصرا للعدد الحقيقي $I=\int_1^{e-1} f(x)dx$

16

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;\pi]$ بِـ $f(x)=\frac{1}{2}+\cos x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم حدد حسب قيم x إشارة $f(x)$.

2. أرسم تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد و متجانس.

3. أحسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ،$x=\pi$ و $y=0$

17

باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب: $I=\int_0^1 (x-1)e^x\,dx$ و $J=\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin x\,dx$

18

برهن أن حجم كرة نصف قطرها R هو: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

19

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^x\cos x$

1.احسب $f'(x)$ وَ $f''(x)$

2. جد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=af''(x)+bf'(x)$

3.استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

I. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

1.بين أن f زوجية ثم ادرس تغيراتها.

2.بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x)=1+\dfrac{\alpha}{x-2}+\dfrac{\beta}{x+2}$

3.عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f .

II. لتكن الدالة g المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ: $g(x)=x+\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$

$\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

1.بين أن g فردية ثم ادرس تغيراتها .

2بين أن المنحني $\mathcal{C}$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له .

3. ارسم المنحني $\mathcal{C}$.

4.احسب مشتقة الدالة h المعرفة من أجل كل $x\neq -a$ حيث $h(x)=(x+a)\ln|x+a|-x$ ، a عدد حقيقي .

5.استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]2;+\infty[$.

حلول التمارين

Solutions

☑حل تمرين 1:

اثبات أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال D في كل حالة من الحالات التالية:

1). $F : x \mapsto x^2 - 3x + 1$ ،

F دالة قابلة للاشتقاق على المجال D حيث: $F'(x) = 2x - 3$

و بالتالي: $F'(x) = f(x)$.

2). $F : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x$ ،

F دالة قابلة للاشتقاق على المجال D حيث: $F'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

و بالتالي: $F'(x) = f(x)$.

$f : x \mapsto 3x^2 - 12x + 9$ ، $D = \mathbb{R}$

3). $F : x \mapsto 2 + \dfrac{x+1}{x-1}$ ،

F دالة قابلة للاشتقاق على المجال D حيث: $F'(x) = \dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

و بالتالي: $F'(x) = f(x)$. $\quad f : x \mapsto \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

☑حل تمرين 2:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2}$

1. الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$. $F(x) = 2\left(\dfrac{x^2}{2}\right) + \dfrac{1}{2}x + c, c \in \mathbb{R}$ أي: $F(x) = x^2 + \dfrac{1}{2}x + c$

2. ايجاد الدالة الأصلية F للدالة f والتي تحقق: $F(1) = 2$.

هدف هذا السؤال هو ايجاد قيمة c.

$F(1)=2$

$1+\frac{1}{2}+c=2 \Rightarrow c=\frac{1}{2}$ و بالتالي: $F(x)=x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

☑حل تمرين 3:

f و F دالتان معرفتان على $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{-x^2+2x+2}{(1-x)^2}$ و $F(x)=\frac{ax^2+bx+c}{1-x}$.

تعين الأعداد الحقيقية a، b و c حتى تكون الدالة F أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$ حيث $F(0)=3$.

F دالة أصلية للدالة f معناه: من أجل كل x عدد حقيقي من $]1;+\infty[$: $F'(x)=f(x)$

نشتق الدالة F بدلالة c,b,a نجد: $F'(x)=\frac{-ax^2+2ax+b+c}{(1-x)^2}$

بالمطابقة مع الدالة f نجد: $b=-1$,
$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} -a=-1 \\ 2a=2 \end{array}\right\rangle a=1 \\ b+c=2 \\ F(0)=3 \Rightarrow c=3 \end{cases}$$

و بالتالي: $F(x)=\frac{x^2-x+3}{1-x}$.

☑حل تمرين 4:

f دالة معرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x^3-6x^2+12x-4}{(x-2)^2}$

1. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي $x>2$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x-2)^2}$

بالمطابقة نجد: $a=1$, $b=-2$, $c=-4$ أي: $f(x)=x-2-\frac{3}{(x-2)^2}$

و نستنتج أن: $F(x)=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{3}{x-2}+c$ حيث: c عدد حقيقي.

2. استنتاج دالة أصلية F للدالة f على $]2;+\infty[$ تحقق
$$\begin{array}{l} F(3)=-1 \\ \frac{9}{2}-6+3+c=-1 \\ \frac{3}{2}+c=-1 \\ c=\frac{-5}{2} \end{array}$$
. و منه: $F(x)=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{3}{x-2}-\frac{5}{2}$

☑حل تمرين 5:

ايجاد الدوال الأصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ للدوال التالية:

1) $f(x)=2-\dfrac{1}{x^2}$.

دالتها الأصلية هي:

$$F(x)=2x+\frac{1}{x}+c$$

$c\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^4}$ دالتها الأصلية هي:

أولا علينا تبسط كتابة دستور الدالة f يعني:

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^4}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}$$

و منه: $F(x)=\dfrac{-1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{3x^3}+c,$ $c\in\mathbb{R}$

3) $f(x)=1+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}$

دالتها الأصلية هي:

$$F(x)=x-\frac{1}{2x^2}-2\frac{1}{3x^3}+c$$

$$=x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^3}\right)+c,$$

$c\in\mathbb{R}$

4) $f(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}+x-1$

$$F(x)=3\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}-x+c$$

$c\in\mathbb{R}$

5) $f(x)=e^{-x}+\dfrac{2}{x}$.

دالتها الأصلية هي:

$$F(x)=-e^{-x}+2\ln(x)+c$$

$$=-e^{-x}+\ln(x^2)+c, c\in\mathbb{R}$$

6) $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-2}{3}$.

أولا علينا تبسط كتابة دستور الدالة f

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(x^3+x^2-2\right)$$

دالتها الأصلية هي:

$$F(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-2x\right)+c, c\in\mathbb{R}$$

7)

$$f(x)=-3\sin x+2\cos x+1$$

دالتها الأصلية هي:

$$F(x)=3\cos x+2\sin x+x+c$$

$,c\in\mathbb{R}$

☑حل تمرين 6:

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{6e^x}{e^{2x}-1}$

1. تعين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{\alpha e^x}{e^x-1}+\dfrac{\beta e^x}{e^x+1}$.

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=6\end{cases}\Rightarrow \alpha=-3, \beta=3$ و بالتالي: $f(x)=\dfrac{-3e^x}{e^x-1}+\dfrac{3e^x}{e^x+1}$

2. استخدم النتيجة السابقة لإيجاد دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

نلاحظ أن الدالة f مكتوبة من الشكل : $f(x)=\dfrac{ag'(x)}{g(x)}+b\dfrac{h'(x)}{h(x)}$

اذن دالتها الأصلية تكتب من الشكل: $F(x)=-3\ln\left(e^x-1\right)+3\ln\left(e^x+1\right)+c$ يمكن استعمال خواص الدالة اللوغاريتمية لتبسيطها أكثر.

☑حل تمرين 7:

أحسب التكاملات التالية:

$\int_0^2 \left(1-x^2\right)dx$ (4 $=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=2-\frac{8}{3}$ $=\frac{-2}{3}$	$\int_{-5}^5 \left(4-x\right)dx$ (3 $=\left[4x-\frac{x^2}{2}\right]_{-5}^5$ $=\left(20-\frac{25}{2}\right)-\left(-20-\frac{25}{2}\right)$ $=40$	$\int_{-2}^1 x^2\,dx$ (2 $=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^1=\frac{1}{3}-\frac{-8}{3}$ $=3$	$\int_0^3 \left(2x+3\right)dx$ (1 $=\left[x^2+3x\right]_0^3$ $=18$
$\int_0^1 \left(x^3+2x+2\right)dx$ (8 $=\left[\frac{x^4}{4}+x^2+2x\right]_0^1$ $=\frac{1}{4}+1+2$ $=\frac{13}{4}$	$\int_{-2}^2 -x^3\,dx$ (7 $=\left[\frac{-x^4}{4}\right]_{-2}^2$ $=0$	$\int_{-1}^0 \left(-3x^2+2x\right)dx$ (6 $=\left[-x^3+x^2\right]_{-1}^0$ $=1+1$ $=2$	$\int_1^2 \left(x^2+x-2\right)dx$ (5 $=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2$ $=\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}-4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)$ $=\frac{-1}{2}$
$\int_0^1 \frac{-2}{\left(x-2\right)^3}dx$ (12 $=\left[-\frac{(-2)}{2\left(x-2\right)^2}\right]_0^1$ $=\left[\frac{1}{\left(x-2\right)^2}\right]_0^1$ $=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	$\int_0^1 \frac{1}{\left(x+1\right)^3}dx$ (11 $=\left[-\frac{1}{2\left(x+1\right)^2}\right]_0^1$ $=\frac{-1}{8}+\frac{1}{2}$ $=\frac{3}{4}$	$\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1-t^3+t^4}{t^2}\right)dt$ (10 $=\int_{-2}^{-1}\frac{1}{t^2}-t+t^2dt$ $=\left[-\frac{1}{t}-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{-1}$ $=\frac{13}{3}$	$\int_1^2\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)dx$ (9 $=\int_1^2 1-\frac{2}{x^2}dx$ $=\left[x-\frac{2}{x}\right]_1^2$ $=2$

☑حل تمرين 8:

1. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f\left(x\right)=ax+b+\frac{c}{x^2}$

$$f\left(x\right)=\frac{2x^3+3x^2+4}{x^2}=\frac{2x^3}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}=2x+3+\frac{4}{x^2}$$

إذن: $\left(a;b;c\right)=\left(2;3;4\right)$

2. حساب المساحة $S\left(\lambda\right)$:

$$S\left(\lambda\right)=\int_1^{\lambda} f\left(x\right)dx=\int_1^{\lambda}\left(2x+3+\frac{4}{x^2}\right)dx$$

$$=\left[x^2+3x-\frac{4}{x}\right]_1^{\lambda}$$

$$=\left[\lambda^2+3\lambda-\frac{4}{\lambda}\right]-\left[1^2+3-\frac{4}{1}\right]$$

$$=\left(\lambda^2+3\lambda-\frac{4}{\lambda}\right)u.a$$

• تعيين λ حتى يكون $S(\lambda)=\lambda^2$:

$S(\lambda)=\lambda^2$ معناه $\lambda^2+3\lambda-\frac{4}{\lambda}=\lambda^2$

أي $3\lambda=\frac{4}{\lambda}$

أي $\lambda^2=\frac{4}{3}$

و بالتالي $\left(\lambda=-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ أو $\left(\lambda=\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

إذن: $\lambda=\frac{2}{\sqrt{3}}$ لأن λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1

• يمكن كتابة $f(x)$ بعد توحيد المقامات على الشكل :

$f(x)=\frac{ax^3+bx^2+c}{x^2}$ ثم نساوي هذه العبارة مع العبارة

$$\frac{2x^3+3x^2+4}{x^2}$$

• لحساب المساحة نطبق خواص التكامل.

• $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

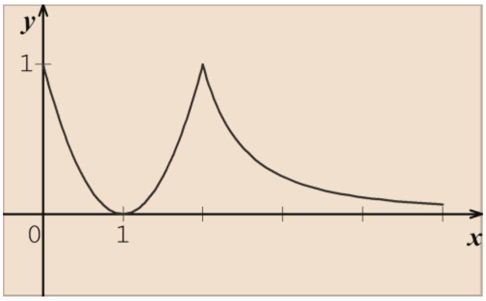
حيث F دالة أصلية للدالة f

• المعادلة $x^2=\alpha$ حيث $\alpha>0$ تقبل حلين متناظرين $-\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\alpha}$

☑حل تمرين 9:

(C) هو المنحني البياني الممثل لدالة f في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$ الممثل لدالة f

معرفة على $[0;5]$ حيث :
$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 ;0\le x\le 2\\ f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2} ;2\le x\le 5\end{cases}$$



حساب المساحة تحت المنحني (C) بين 0 و 5 مقدرة ب cm^2.

$$\int_0^5 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx$$

$$=\int_0^2 (x-1)^2\,dx+\int_2^5 \frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$=\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^2+\left[-\frac{1}{x-1}\right]_2^5$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{8+9}{12}$$

$$=\frac{17}{12}cm^2$$

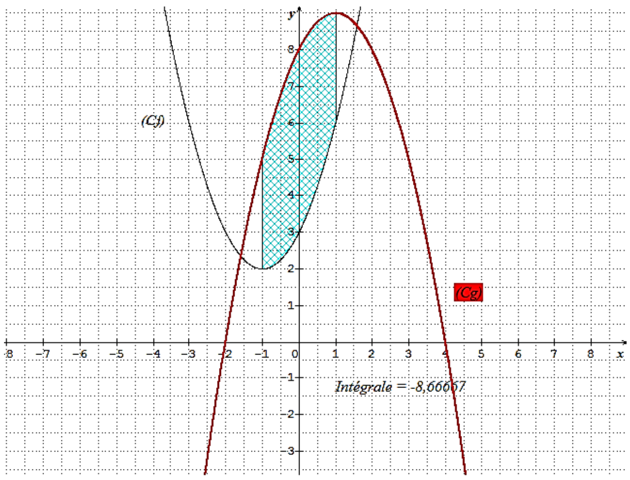
☑حل تمرين 10:

1) أدرس تغيرات الدالتين f ، g حيث

$g(x) = -x^2 + 2x + 8$ ، $f(x) = x^2 + 2x + 3$

هدف هذا السؤال هو الوضع النسبي للمنحنين (C_f) و (C_g). على المجال $[-1;1]$.

(2) رسم (C_f) و (C_g).



(3) حساب مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمات التي معادلتها $(x = -)$ و $(x = 1)$.

نلاحظ أن : أن المنحنى (C_g) يقع فوق المنحنى (C_f) على $[-1;1]$

و بالتالي:

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{1} g(x) - f(x)dx \\
&= \int_{-1}^{-1} -x^2 + 2x + 8 - x^2 - 2x - 3dx \\
&= \int_{-1}^{1} -2x^2 + 5dx \\
&= \left[-2\frac{x^3}{3} + 5x \right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{26}{3} ua
\end{aligned}
$$

☑حل تمرين 11:

حساب التكامل التالي: $\int_0^3 |x^2 - 1| dx$.

طريقة: نكتب، حسب قيم x، عبارة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة لنتمكن من تعيين دوال أصلية للدالة f .

$x^2 - 1$ كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه -1 ، 1 و بالتالي:

- من أجل كل x من $[0;1]$، $x^2-1\leq 0$ إذن $|x^2-1|=-x^2+1$.
- من أجل كل x من $[1;3]$، $x^2-1\geq 0$ إذن $|x^2-1|=x^2-1$.

باستعمال علاقة شال يكون لدينا: $\int_0^3 |x^2-1|dx=\int_0^1|x^2-1|dx+\int_1^3|x^2-1|dx=\int_0^1(-x^2+1)dx+\int_1^3(x^2-1)dx$

و منه $\int_0^3|x^2-1|dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^3=\left[\left(-\frac{1}{3}+1\right)-0\right]+\left[\left(\frac{27}{3}-3\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right]=\frac{22}{3}$

☑حل تمرين 12:

نعتبر التكاملين: $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$

حساب $A+B$ و $A-B$ ثم استنتج A و B.

$A+B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx=B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=[x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$.

$A-B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx=B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$

لدينا $A+B=\frac{\pi}{4}$ و $A-B=\frac{1}{2}$. بعد حل هذه الجملة نجد $A=\frac{\pi+2}{8}$ و $B=\frac{\pi-2}{8}$.

☑حل تمرين 13:

نعتبر التكامل $I=\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt$

1. اثبات أنه من أجل كل t من $[0;1]$ ، $\frac{1}{t^2+1}\leq 1$.

من أجل كل t من $[0;1]$، $1+t^2\geq 1$ و منه من أجل كل t من $[0;1]$، $\frac{1}{1+t^2}\leq 1$.

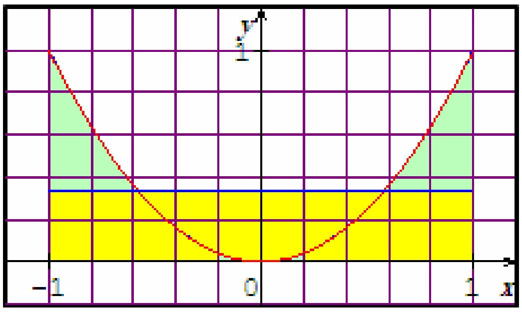
2. استنتج حصرا للعدد I.

بما أن $0<1$ و بتطبيق خاصية المحافظة على الترتيب نستنتج أن $\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt\leq\int_0^1 1dt$

و بما أن $\int_0^1 1dt=[t]_0^1=1$ فإن $\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt\leq 1$. من الواضح كذلك أنه من أجل كل t من $[0;1]$، $\frac{1}{1+t^2}>0$

و منه $I>0$. نستنتج هكذا الحصر التالي: $0<I\leq 1$.

☑حل تمرين 14:



1. $\mu=\dfrac{1}{1-(-1)}\displaystyle\int_{-1}^{1}x^{2}dx=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\left[x^{3}\right]_{-1}^{1}=\dfrac{1}{3}$.

2. مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات

التي معادلاتها $x=-1$، $x=1$ و $y=0$ تساوي مساحة المستطيل

$ABCD$ الذي بعداه 2 و $\dfrac{1}{3}$ علما أن $A(1;0)$، $B\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$، $C\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$ و $D(-1;0)$.

☑حل تمرين 15:

1. لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}>0$. إذن f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و منه على

المجال $[0;e-1]$.

2. نستنتج أنه من أجل كل x من $[0;e-1]$، $f(0)\le f(x)\le f(e-1)$ أي $1\le f(x)\le 2$.

3. بتطبيق حصر القيمة المتوسطة نجد $(e-2)\le\displaystyle\int_{1}^{e-1}f(x)dx\le 2(e-2)$.

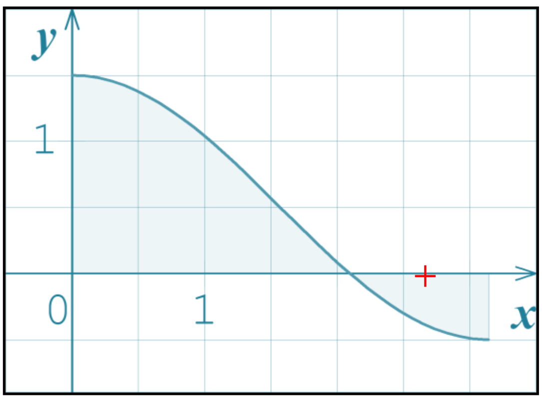
☑حل تمرين 16:

1. للدالة f نفس اتجاه تغير الدالة $x\mapsto\cos x$ فهي إذن متناقصة تماما على المجال $[0;\pi]$.

لدينا $f(0)=\dfrac{3}{2}$ و $f(\pi)=-\dfrac{1}{2}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا في $[0;\pi]$

$f(x)=0$ تعني $x=\dfrac{2\pi}{3}$. نستنتج أنه من أجل كل x من $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$، $f(x)\ge 0$

و من أجل كل x من $\left[\dfrac{2\pi}{3};\pi\right]$، $f(x)\le 0$.



2. أنظر الشكل المقابل.

3. لدينا $A=A_1+A_2$ حيث $A_1=\displaystyle\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}}f(x)dx$

و $A_2=\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}-f(x)dx$.

- π

$A_1=-\left[\frac{1}{2}x+\sin x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}u.a$ و $A_1=\left[\frac{1}{2}x+\sin x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}u.a$

و منه $A=\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)u.a$.

☑حل تمرين 17:

طريقة: لاستعمال المكاملة بالتجزئة نكتب f على الشكل $u\times v'$.

1. نضع $u(x)=x-1$ ، $v'(x)=e^x$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=e^x$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $I=\left[(x-1)e^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$

و منه $I=1-\left[e^x\right]_0^1=1-(e-1)=-e$. إذن $I=-e$.

ملاحظة: كان بالإمكان وضع $u(x)=e^x$ ، $v'(x)=x-1$ و من تم $u(x)=e^x$ ، $v(x)=\frac{1}{2}x^2-x$

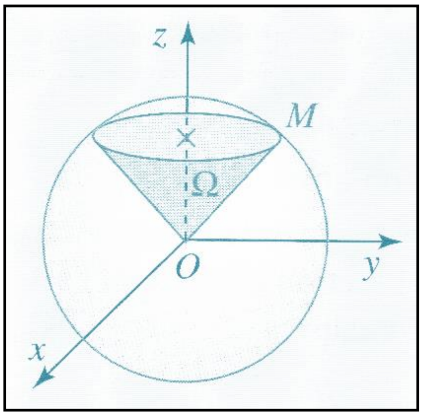
إلا أننا بعد التعويض نحصل على تكامل أكثر تعقيدا من الأول.

2. نضع $u(x)=x$ ، $v'(x)=\sin x$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=-\cos x$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $J=\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}-\cos x\,dx$

و منه $J=-\frac{\pi}{6}+\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. إذن $J=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

☑حل تمرين 18:



نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;I,J,K)$ محاوره

$(x'x)$، $(y'y)$ و $(z'z)$ الكرة التي مركزها O و نصف قطرها R.

مقطع هذه الكرة بمستو مواز للمستوي (xOy) و راقمه z حيث $-R<z<R$

هي دائرة مركزها $\Omega(0;0;z)$ و نصف قطرها $r=\Omega M$ مع $OM=R$.

لدينا في المثلث القائم $O\Omega M$: $r^2=R^2-z^2$ و منه مساحة القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره R هي:

$S(z)=\pi\left(R^2-z^2\right)$. الحجم هو إذن: $V=\int_{-R}^{R}S(z)\,dz=\int_{-R}^{R}\pi\left(R^2-z^2\right)dz$ و بالتالي:

$$V=\pi\left[R^2z-\frac{1}{3}z^3\right]_{-R}^{R}=\pi\left[\left(R^3-\frac{1}{3}R^3\right)-\left(-R^3+\frac{1}{3}R^3\right)\right]$$ و منه $V=\frac{4}{3}\pi R^3\,u.v$.

☑حل تمرين 19:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^x\cos x$

1.احسب $f'(x)$، الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=e^x\cos x+e^x\sin x$$
$$=e^x\left(\cos x+e\sin x\right)$$

وَ $f''(x)$ ، الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f''(x)=e^x\left(\cos x+\sin x\right)+e^x(-\sin x+\cos x)$$
$$f''(x)=2e^x\cos x$$

2. ايجفاد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=af''(x)+bf'(x)$

و بالتالي:

$$af''(x)+bf'(x)=2ae^x\cos x+be^x\cos x+be^x\sin x$$
$$=(2a+b)e^x\cos x+be^x\sin x$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}2a+b=1\\ b=0\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

اذن: $f(x)=\frac{1}{2}f''(x)$

3.استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

لدينا: $f(x)=\frac{1}{2}f''(x)$ و منه:

$$F(x)=\frac{1}{2}f'(x)+c,c\in\mathbb{R}$$
$$F(x)=\frac{1}{2}\left(e^x\left(\cos x+e\sin x\right)\right)+c,c\in\mathbb{R}$$

☑حل تمرين 20:

I. 1. من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ ، $-x$ ينتمي إلى $\mathbb{R}-\{-2;2\}$

وَ $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}=\frac{(-x)^2}{(-x)^2-4}=f(-x)$ و منه f دالة زوجية

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$: $f'(x)=\frac{-8x}{(x^2-4)^2}$

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجالين $[0;2[$ و $]2;+\infty[$ و متزايدة على المجالين على المجالين $]-\infty;-2[$ و $]-2;0]$

2. $f(x)=1+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

3. مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي: $F(x)=x+\ln|x-2|-\ln|x+2|=x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+k$ ، k ثابت حقيقي

II .1 $g'(x)=f(x)$ ، إذن $g'(x)$ تنعدم عند 0 ، تكون موجبة على $]-\infty;-2[$ و $]2;+\infty[$ و سالبة على $]-2;0[$ و $]2;+\infty[$.

2.لدينا $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=0$

إذن المنحني $\mathcal{C}$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته

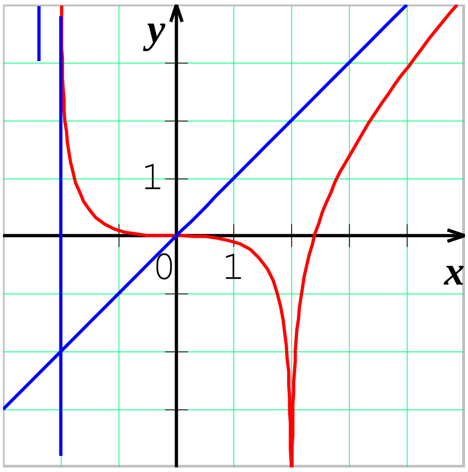
$y = x$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$

.4 $h'(x) = \ln|x+a|$

$g(x) = x + \ln|x-2| - \ln|x+2|$

فتكون دالة أصلية للدالة g على $]2;+\infty[$

هي: $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + (x-2)\ln|x-2| - (x+2)\ln|x+2|$



بكالوريا جوان 2008/ شعبة علوم تجريبية / الموضوع الأول

4.أ- أكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}$

حيث a و b عددان حقيقيان .

ب-عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=2$.

الحل:

بتوحيد المقامات و المطابقة مع العبارة الأولى للدالة f

نجد: $a=b=1$ أي: $f(x)=x+1+\frac{1}{(x+1)^2}$.

ب- تعين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$:

$F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x+1}+c$ ، $c\in\mathbb{R}$.

لدينا F تحقق: $F(1)=2$.

اذن: $c=1$ و منه: $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x+1}+1$ هي دالة الأصلية للدالة f .

بكالوريا جوان 2009/ شعبة تسيير واقتصاد / الموضوع الأول / التمرين 4

الدالة العددية f معرفة على المجال $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$ ، يرمز (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=1$ و $x=e^2-1$.

الحل:

حساب المساحة:

$S=\int_1^{e^2-1}[f(x)-(x-1)]dx=\int_1^{e^2-1}\frac{4}{x+1}dx=[4\ln(x+1)]_1^{e^2-1}ua.$ و منه: $S=4(\ln e^2-\ln 2)ua=(8-4\ln 2)ua$.

بكالوريا جوان 2010/ شعبة تسيير م اقتصاد / الموضوع الأول

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}$

عين الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق : $F(2)=-10$.

ب-أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين $x=1$ و $x=2$.

الحل:

تعين الدالة الأصلية F للدالة f :

$F(x)=\frac{1}{2}x^2-5x-4\frac{1}{x}+c$ ، حيث c عدد حقيقي.

لدينا F تحقق : $F(2)=-10$ معناه: $c=0$

اذن: $F(x)=\frac{1}{2}x^2-5x-4\frac{1}{x}$.

ب-المساحة:

<u>تذكير:</u> * اذا كانت f الدالة سالبة على المجال $[a;b]$ و S المساحة المحددة بالمنحنى $(C)_f$ و المستقيمان : $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ فان: $S=\int_a^b -f(x)dx$

$$\int_a^b -f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(x)dx \quad *$$

$$S=\int_1^2 -f(x)dx=-\int_1^2 f(x)dx=\int_2^1 f(x)dx$$

و منه: $S=F(1)-F(2)$ و بالتالي: $S=\frac{3}{2}ua$.

بكالوريا جوان 2011/ شعبة تسيير م اقتصاد / الموضوع الثاني

احسب التكامل: $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$.

ب-احسب بالسنتيمتر مربع مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى و محور الفاصل و المستقيمين اللذين معادلتهما: $x=0$ و $x=1$.

الحل:

حساب التكامل:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2 .$$

ب-المساحة: $S=4.\int_0^1 f(x)dx=4cm^2\times\left(\int_0^1 1-\frac{x}{x^2+1}dx\right)cm^2$

و منه: $S=4\times\left(1-\frac{1}{2}\ln 2\right)cm^2$ أي: $S=(4-2\ln 2)cm^2$.

بكالوريا جوان 2017/ شعبة تقني رياضي / الموضوع الثاني

نرمز ب S الى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=\alpha$ ، $x=0$ و $y=0$.

أثبت أن من أجل كل $x\in[\alpha;0]$ ، $-3\leq f(x)\leq f(\alpha)$

ثم بين ان $\frac{3}{2}\alpha^2\leq S\leq -3\alpha$.

الحل:

مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=\alpha$ ، $x=0$ و $y=0$ و بما أن الدالة سالبة على المجال $\alpha\leq x\leq 0$ اذن

$$-\int_{\alpha}^{0} f(\alpha)dx\leq -\int_{\alpha}^{0} f(x)dx\leq -\int_{\alpha}^{0}-3dx$$

أي: $$-\int_{\alpha}^{0}\frac{3}{2}\alpha dx\leq -\int_{\alpha}^{0} f(x)dx\leq -\int_{\alpha}^{0}-3dx$$

و منه: $$-\int_{\alpha}^{0}\frac{3}{2}\alpha dx\leq -\int_{\alpha}^{0} f(x)dx\leq -\int_{\alpha}^{0}-3dx$$

$$-\left[\frac{3}{2}\alpha x\right]_{\alpha}^{0}\leq S\leq -\left[-3x\right]_{\alpha}^{0}$$

و منه: $$\frac{3}{2}\alpha^2\leq S\leq -3\alpha$$

بكالوريا جوان 2011/ شعبة علوم تجريبية/ الموضوع الأول.

ب- α عدد حقيقي .

بين أن الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]1;+\infty[$.

جـ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=1-\frac{2}{x+1}$ ثم عين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

الحل:

ب- الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ تقبل الاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ كونها عبارة عن مجموع و مركب و جداء دوال قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ، كما أن مشتقتها هي الدالة: $x\mapsto 1\times\ln(x-\alpha)+\cancel{(x-\alpha)}\times\frac{1}{\cancel{(x-\alpha)}}-1$

اي الدالة: $x\mapsto\ln(x-\alpha)$

ومنه الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]1;+\infty[$.

جـ- من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$:

$$1-\frac{2}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=\frac{x-1}{x+1}=g(x).$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$:

$$f(x)=1-\frac{2}{x+1}+\ln(x-1)-\ln(x+1)$$

وبالتالي الدالة F حيث:

$$F(x)=x-2\ln(x-1)+\left[(x-1)\ln(x-1)-x\right]-\left[(x+1)\ln(x+1)-x\right]$$

أي: $F(x)=x+\left[(x-1)\ln(x-1)\right]-\left[(x+3)\ln(x+1)-x\right]$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

بكالوريا جوان 2012/ شعبة علوم تجريبية/ الموضوع الأول

لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي:

$$g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$$

بين g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

الحل:

الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ لأنها عبارة عن مجموع و جداء و مركب دوال قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;0[$.

- لدينا من أجل كل x من المجال $]-\infty;0[$:

$$g'(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\cancel{x}\times\frac{(-1)}{\cancel{x}(x-1)}+6\times\frac{(-1)}{1-x}$$

$$=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+\frac{-6}{1-x}+\frac{-6}{1-x}$$

$$=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+\frac{-6}{x-1}+\frac{6}{x-1}$$

$$=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$=f(x)$$

ومنه g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

بكالوريا جوان 2012/ شعبة علوم تجريبية/ الموضوع الثاني

لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=(ax+b)e^x$.

أ – عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

ب – استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

الحل:

$.h(x)=(ax+b)e^x$

أ- h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$ معناه: من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$.h'(x)=xe^x$

$h'(x)=xe^x$ تكافئ $ae^x+(ax+b)e^x=xe^x$، أي $axe^x+a+b=xe^x$

بالمطابقة نجد: $a=1$ و $a+b=0$، ومنه: $a=1$ و $b=-1$.

إذن: $.h(x)=(x-1)e^x$

ب- لدينا: $g(x)=1-xe^x$، ومنه G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ معرفة بـ: $G(x)=x-h(x)$. إذن: $.G(x)=x-(x-1)e^x$

احسب التكامل: $I=\int \frac{x}{x+1}dx$

$$I=\int \frac{x}{x+1}dx=\int \frac{x+1-1}{x+1}dx=\int \frac{x+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}dx$$
$$=\int 1-\frac{1}{x+1}dx=x-\ln(x+1)+c,c\in\mathbb{R}$$

مغزى هذا التكامل هو سحر الرياضيات عندما أضفت 1 طرحته لم أغير شيئ لكنني بسطت شكل العبارة أكثر.

بالتوفيق للجميع

أستاذ المادة: شعبان أسامة

تجدون هذا الملف على صفحتي الشخصية: 5min Maths

🕮اصدارات سابقة