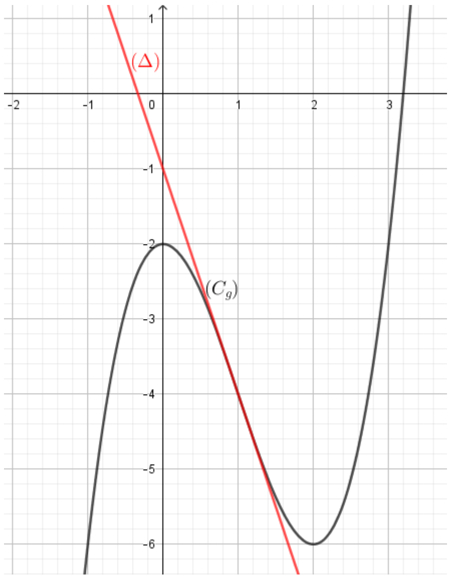
✍ الجزء الأول :



✍ g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x^3-3x^2-2$ و (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل.

المستقيم (D) هو مماس للمنحنى (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 1.

بقراءة بيانية :

1) أحسب كل من : $g'(0)$, $g'(2)$, $g'(1)$ و $g''(1)$.

2) شكل جدول تغيرات الدالة g.

3) حدد إشارة $g(3)$ و $g\left(\frac{7}{2}\right)$ ثم إستنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]3;\frac{7}{2}\right[$ بحيث $g(\alpha)=0$ ثم تحقق أن : $3.1<\alpha<3.2$.

4) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

✍ الجزء الثاني :

✍ f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\frac{x^3+1}{(x-1)^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, أحسب $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2) بين أنه من أجل كل $x\neq1$: $f'(x)=\frac{(x-1)\times g(x)}{(x-1)^4}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) أحسب $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)$ ثم إستنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

4) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5) عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

6) بين أن : $f(\alpha)=3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ثم أعط حصر لـ $f(\alpha)$ تدور النتائج إلى 10^{-2}.

7) أكتب معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $-\frac{1}{3}$.

8) جد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.

9) أنشئ (Δ) , (C_f).

10) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=x+m$.

✍ الجزء الثالث :

✍ h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $h(x)=\frac{|x^3+1|}{(x-1)^2}$ و (C_h) تمثيلها البياني .

1) أكتب $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

2) أدرس قابلية إشتقاق الدالة h عند القيمة -1 ثم فسر النتيجة هندسيا.

3) إستنتج رسم المنحنى (C_h) إنطلاقا من (C_f).

الحـــــل

✍ الجزء الأول :

1) حساب $g''(1), g'(1), g'(2), g'(0)$:

✍ $g'(0)=g'(2)=0$ قيم حدية محلية .

✍$g'(1)$ ميل المماس (D) نختار نقطتين كيفيتين من المماس $A(1;-4)$ و $B(0;-1)$ و منه : $g'(1)=\dfrac{-1-(-4)}{0-1}=-3$.

✍ $g''(1)=0$ المماس (D) يغير وضعيته عند نقطة التماس و بالتالي فهو يخترق المنحنى (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 1 التي تعتبر نقطة إنعطاف .

2) تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

3) تحديد إشارة $g(3)$ و $g\left(\frac{7}{2}\right)$:

من البيان نلاحظ أن : $g(3)<0$ و $g\left(\frac{7}{2}\right)>0$.

إستنتاج وجود عدد حقيقي α وحيد من $\left]3;\frac{7}{2}\right[$ بحيث : $g(\alpha)=0$:

الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على $\left]3;\frac{7}{2}\right[$ و $g(3)\times g\left(\frac{7}{2}\right)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $3<\alpha<\frac{7}{2}$ يحقق : $g(\alpha)=0$.

التحقق أن : $3.1<\alpha<3.2$:

لدينا : $\left]3;\frac{7}{2}\right[\subset]3.1;3.2[$ إذن الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[3.1;3.2]$ و $g(3.1)\approx-1.039$ و $g(3.2)\approx 0.048$ أي : $g(3.1)\times g(3.2)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث : $3.1<\alpha<3.2$ يحقق $g(\alpha)=0$.

4) إستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

✍ الجزء الثاني :

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

2) حساب $\lim_{x\to 1} f(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا :

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$.

التفسير الهندسي : وجود مستقيم مقارب عمودي (موازي لمحور التراتيب) للمنحنى (C_f) معادلته $x=1$.

3) تبيان أنه من أجل كل $x \neq 1$: $f'(x) = \frac{(x-1)\times g(x)}{(x-1)^4}$ ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3+1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(3x^2)(x-1) - 2(x^3+1)]}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(3x^3-3x^2-2x^3-2)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(x^3-3x^2-2)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)\times g(x)}{(x-1)^4}$$

إشارة المشتقة : إشارتها من إشارة $(x-1)$ و $g(x)$ لأن $(x-1)^4 > 0$

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$(x-1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;1[$ و $[\alpha;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]1;\alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) حساب $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-x]$ ثم إستنتاج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته :

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1-x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1-x(x^2-2x+1)}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-x+1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x] = 2$ أي : $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x-2] = 0$ أي : $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+2)] = 0$ و منه نستنتج أن المستقيم $(\Delta): y = x+2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

5) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

$$f(x) - y = f(x) - (x+2) = \frac{x^3+1}{(x-1)^2} - (x+2) = \frac{x^3+1-(x+2)(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^3+1-(x+2)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{x^3+1-x^3+2x^2-x-2x^2+4x-2}{(x-1)^2}=\frac{3x-1}{(x-1)^2}$$

إذن : إشارة الفرق من إشارة البسط $3x-1$ لأن المقام موجب تماما $(x-1)^2>0$.

$3x-1=0$ أي : $3x=1$ أي : $x=\frac{1}{3}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$	‖	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(\frac{1}{3};\frac{7}{3})$	(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)

6) تعيين دون حساب $\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا :

طريقة 1 : $f'(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$, بما أن الدالة f تقبل قيمة حدية عند $x=\alpha$ فإن : $f'(\alpha)=0$.

طريقة 2 : $\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)=f'(\alpha)=\frac{(\alpha-1)\times g(\alpha)}{(\alpha-1)^4}=0$ لأن $g(\alpha)=0$.

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل مماسا أفقيا معادلته : $y=f(\alpha)$.

7) تبيان أن : $f(\alpha)=3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ثم إعطاء حصرا لـ $f(\alpha)$:

$f(\alpha)=3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ معناه : $f(\alpha)-\left[3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}\right]=0$ و منه :

$$f(\alpha)-\left[3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}\right]=\frac{\alpha^3+1}{(\alpha-1)^2}-3-\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}=\frac{\alpha^3+1-3(\alpha-1)^2-6\alpha}{(\alpha-1)^2}=\frac{\alpha^3-3\alpha^2-2}{(\alpha-1)^2}=\frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^2}=0$$

إذن : $f(\alpha)=3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$.

حصر لـ $f(\alpha)$:

نعلم أن : $3.1<\alpha<3.2$ أي : $(3.1-1)^2<(\alpha-1)^2<(3.2-1)^2$ أي : $4.41<(\alpha-1)^2<4.84$ أي : $\frac{1}{4.84}<\frac{1}{(\alpha-1)^2}<\frac{1}{4.41}$

أي : $0.2<\frac{1}{(\alpha-1)^2}<0.23$ و لدينا أيضا : $18.6<6\alpha<19.2$ و منه : $0.2\times 18.6<\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}<0.23\times 19.2$ أي :

$3+3.72<3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}<3+4.42$ أي : $6.72<3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}<7.42$ إذن : $6.72<f(\alpha)<7.42$.

8) كتابة معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $-\frac{1}{3}$:

$(T): y=f'\left(\frac{-1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{-1}{3}\right)$ و $f'\left(\frac{-1}{3}\right)=1$ و $f\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{13}{24}$ و منه :

$(T): y=1\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{13}{24}=x+\frac{1}{3}+\frac{13}{24}=x+\frac{8}{24}+\frac{13}{24}=x+\frac{21}{24}=x+\frac{7}{8}$.

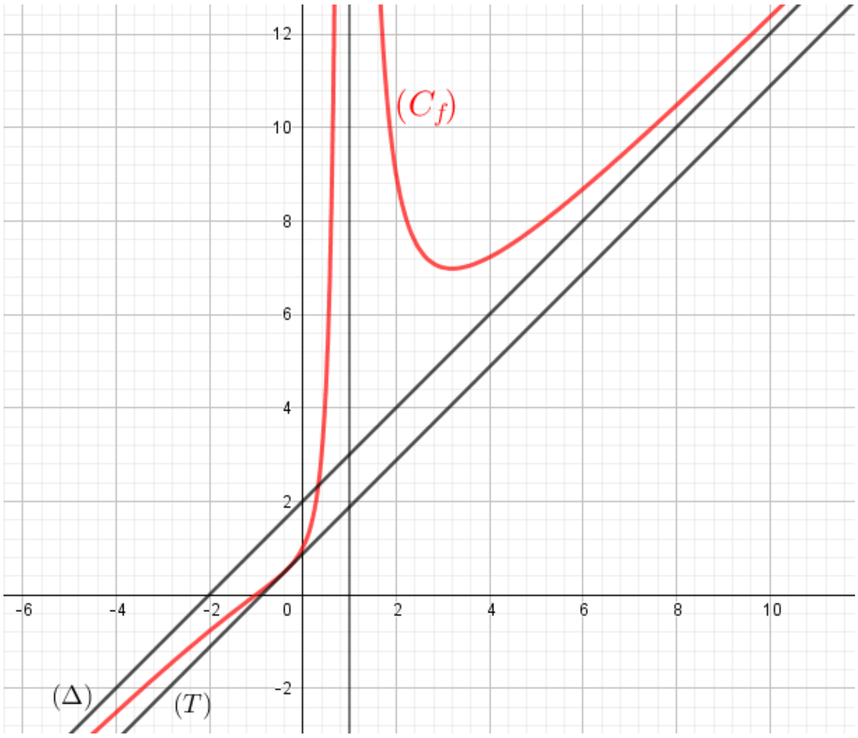
9) إيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات :

مع محور الفواصل : نحل المعادلة $f(x)=0$

أي : $\frac{x^3+1}{(x-1)^2}=0$ أي : $x^3+1=0$ و منه : $x=-1$ إذن : $(C_f)\cap(xx')=\{A(-1;0)\}$.

مع محور التراتيب : نحسب $f(0)$ أي : $f(0)=\frac{0^3+1}{(0-1)^2}$ و منه : $f(0)=1$ إذن : $(C_f)\cap(yy')=\{B(0;1)\}$.

إنشاء المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) :



10) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$:

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ بيانيا هي نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = x + m$.

- ✍ $m < \frac{7}{8}$: لا توجد حلول .
- ✍ $m = \frac{7}{8}$: حل مضاعف سالب .
- ✍ $m = 1$: حلين أحدهما معدوم و الآخر سالب .
- ✍ $1 < m < 2$: حلين مختلفين في الإشارة .
- ✍ $m = 2$: حل وحيد موجب .
- ✍ $m > 2$: حلين موجبين .

الجزء الثالث :

1) كتابة الدالة h بدون رمز القيمة المطلقة :

إشارة $x^3 + 1$ من إشارة $x + 1$ لأن : $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ و $x^2 - x + 1 > 0$ إذن :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x^3 + 1$	$-$	0	$+$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+1}{(x-1)^2} = f(x) : x \in [-1;1[\cup]1;+\infty[\\ -\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2} = -f(x) : x \in]-\infty;-1[\end{cases}$$

دراسة قابلية إشتقاق الدالة h عند (-1) :

دراسة قابلية إشتقاق الدالة h عند القيمة (-1) من اليمين :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{f(x) - f(1)}{x - (-1)} = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{\frac{x^3+1}{(x-1)^2} - 0}{x+1} = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{x^3+1}{(x+1)(x-1)^2} = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x-1)^2} = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{x^2-x+1}{(x-1)^2} = \frac{3}{4}$$

و منه الدالة h تقبل الإشتقاق عند (-1) من اليمين .

دراسة قابلية إشتقاق الدالة h عند القيمة (-1) من اليسار :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{f(x)-f(1)}{x-(-1)} = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{-\frac{x^3+1}{(x-1)^2}}{x+1} = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{-(x^3+1)}{(x+1)(x-1)^2} = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{-(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x-1)^2} = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{-(x^2-x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{4}$$

و منه الدالة h تقبل الإشتقاق عند (-1) من اليسار .

بما أن : $\lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{f(x)-f(1)}{x-(-1)} \neq \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{f(x)-f(1)}{x-(-1)}$ فإن الدالة h لا تقبل الإشتقاق عند القيمة (-1).

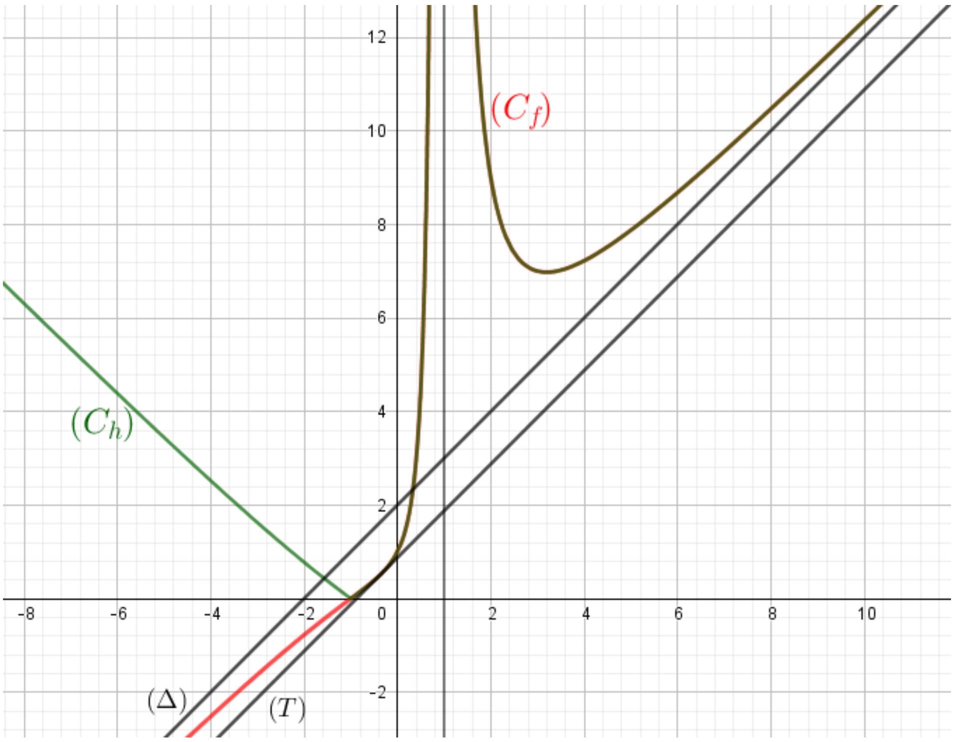
التفسير الهندسي :

المنحنى (C_h) يقبل عند النقطة $A(-1;f(-1))$ نصفي مماسين حيث $A(-1;0)$ هي نقطة زاوية .

3) إستنتاج رسم المنحنى (C_h) إنطلاقا من (C_f) :

(C_h) منطبق على (C_f) في المجال $[-1;1[\cup]1;+\infty[$.

(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل في المجال $]-\infty;-1[$.



بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2022 و لا تنسوا من خالص دعائكم