دراسة دالة عددية بالقيمة المطلقة

المسألة

f هي الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\,;1\}$ بـ :

$$f(x)=|x+1|+\frac{x}{x^2-1}$$

وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) أ- أكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ب- أحسب نهايات f عند أطراف مجموعة التعريف.

2) أ- أحسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها.

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) أ- بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') مقاربين مائلين للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب حيث:

$(\Delta):y=x+1$ و $(\Delta'):y=-x-1$

ب- أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) على المجال $]1\,;+\infty[$ ووضعية (C) بالنسبة إلى (Δ') على المجال $]-\infty\,;-1[$.

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1\,;1[$ ثم أعط حصرا لـ α سعته 10^{-1}.

5) أرسم (C) والمستقيمات المقاربة.

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$f(x)=m$$

الحل

$$f(x)=|x+1|+\frac{x}{x^2-1}$$

1) أ- كتابة $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة:

لدينا:

$$|x+1|=\begin{cases}-x-1\ ;\ x\in\,]-\infty\,;-1[\\ \text{و}\\ x+1\ ;\ x\in[-1\,;+\infty[\end{cases}$$

ومنه:

$$f(x)=\begin{cases}-x-1+\dfrac{x}{x^2-1}\ ;\ x\in\,]-\infty\,;-1[\\ \text{و}\\ x+1+\dfrac{x}{x^2-1}\ ;\ x\in\,]-1\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[\end{cases}$$

1) ب- حساب نهايات f عند أطراف مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة على المجال $]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;1[\,\cup\,]1;+\infty[$.

حساب: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-1+\frac{x}{x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-1+\frac{x}{x\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-1+\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\right)$$

لدينا:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-1)=+\infty\\ \text{و}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0\\ \text{و}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x-\frac{1}{x}}\right)=0\end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

حساب: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\<}} \left(-x-1+\frac{x}{x^2-1}\right)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} (-x-1) = 0 \\ \text{و} \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} \left(\dfrac{x}{x^2-1}\right) = -\infty \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = -\infty$$

حساب: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\>}} \left(x+1+\frac{x}{x^2-1}\right)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} (x+1) = 0 \\ \text{و} \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} \left(\dfrac{x}{x^2-1}\right) = +\infty \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = +\infty$$

حساب: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\<}} \left(x+1+\frac{x}{x^2-1}\right)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} (x+1) = 2 \\ \text{و} \\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \left(\dfrac{x}{x^2-1}\right) = -\infty \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = -\infty$$

حساب: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\>}} \left(x+1+\frac{x}{x^2-1}\right)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} (x+1) = 2 \\ \text{و} \\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \left(\dfrac{x}{x^2-1}\right) = +\infty \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = +\infty$$

حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x+1+\frac{x}{x^2-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x+1+\frac{x}{x\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x+1+\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\right)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty \\ \text{و} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0 \\ \text{و} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x-\frac{1}{x}}\right) = 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

تفسير النتائج بيانيا:

المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين عموديين (يوازيان حامل محور التراتيب) معادلتيهما $x=-1$ و $x=1$.

2) أ- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\,;1\}$ حيث:

- من أجل $x\in]-\infty\,;-1[$:

$$f'_1(x)=-1+\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}$$
$$=-1+\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{-(x^2-1)^2-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{-x^4+2x^2-1-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{-x^4+x^2-2}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{-(x^4-x^2+2)}{(x^2-1)^2}$$

ومنه:

$$f'_1(x)=\frac{-(x^4-x^2+2)}{(x^2-1)^2}$$

- من أجل $x\in]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[$:

$$f'_2(x)=1+\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}$$
$$=1+\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{(x^2-1)^2-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{x^4-2x^2+1-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

ومنه:

$$f'_2(x)=\frac{x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2-1)^2}$$

دراسة إشارة $f'(x)$:

- من أجل $x\in]-\infty\,;-1[$:

$$f'_1(x)=\frac{-(x^4-x^2+2)}{(x^2-1)^2}$$

لدينا:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty\,;-1[$:

$$\begin{cases}-(x^4-x^2+2)<0\\(x^2-1)^2>0\end{cases}$$

ومنه:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty\,;-1[$:

$$f'_1(x)<0$$

يعطى جدول إشارة $f'_1(x)$ على المجال $]-\infty\,;-1[$ كما يلي:

x	$-\infty$		-1
$f'_1(x)$		$-$	‖

- من أجل $x\in]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[$:

$$f'_2(x)=\frac{x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2-1)^2}$$

لاحظ أن:

الدالة $f'_2(x)$ تنعدم من أجل $x=-\sqrt{3}$ و $x=0$ و $x=\sqrt{3}$.

انتبه:

لا نأخذ القيمة $x=-\sqrt{3}$ بعين الاعتبار لأنها لا تنتمي إلى المجال $]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

يعطى جدول إشارة $f'_2(x)$ على المجال $]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ كما يلي:

x	-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+\sqrt{3}$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'_2(x)$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

2) ب- تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$1+\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

3) أ- البرهان أن (Δ) و (Δ') مقاربين مائلين للمنحنى (C):

البرهان أن (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$:

المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ إذا كان:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f_2(x)-y_{(\Delta)}\right)=0$$

حيث:

$$\begin{cases} f_2(x)=x+1+\dfrac{x}{x^2-1} \\ \text{و} \\ (\Delta): y=x+1 \end{cases}$$

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f_2(x)-y_{(\Delta)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f_2(x)-y_{(\Delta)}\right)=0$$

ومنه:

المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

حيث:

$$(\Delta): y=x+1$$

البرهان أن (Δ') مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$:

المستقيم (Δ') مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$ إذا كان:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f_1(x)-y_{(\Delta')}\right)=0$$

حيث:

$$\begin{cases} f_1(x)=-x-1+\dfrac{x}{x^2-1} \\ \text{و} \\ (\Delta'): y=-x-1 \end{cases}$$

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f_1(x)-y_{(\Delta')}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f_1(x)-y_{(\Delta')}\right)=0$$

ومنه:

المستقيم (Δ') مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

حيث:

$$(\Delta'): y=-x-1$$

3) ب- دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) على المجال $]1\,;+\infty[$:

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) ندرس إشارة الفرق $f_2(x)-y_{(\Delta)}$ على المجال $]1\,;+\infty[$.

حيث:

$$f_2(x)-y_{(\Delta)}=\frac{x}{x^2-1}$$

لدينا:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]1\,;+\infty[$ فإن:

$$f_2(x)-y_{(\Delta)}>0$$

ومنه:

المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]1\,;+\infty[$.

(أنظر الجدول المرافق).

<u>دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ') على المجال $]-\infty\,;-1[$:</u>

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ') ندرس إشارة الفرق $f_1(x)-y_{(\Delta')}$ على المجال $]-\infty\,;-1[$.

حيث:

$$f_1(x)-y_{(\Delta')}=\frac{x}{x^2-1}$$

لدينا:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty\,;-1[$ فإن:

$$f_1(x)-y_{(\Delta)}<0$$

ومنه:

المنحنى (C) يقع تحت المستقيم (Δ') على المجال $]-\infty\,;-1[$.

نلخص وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيمين (Δ) و (Δ') في الجدول المرافق التالي:

x	$-\infty$ $\quad$ -1	0	1 $\quad$ $+\infty$
x	$-$		$+$
x^2-1	$+$		$+$
$\dfrac{x}{x^2-1}$	$-$		$+$
الوضعية	(C) تحت (Δ')		(C) فوق (Δ)

<u>4) البرهان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1\,;1[$:</u>

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-1\,;1[$.

ولدينا:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=+\infty$$

و

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=-\infty$$

لاحظ أن:

$$0\in\,]-\infty\,;+\infty[$$

ومنه:

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1\,;1[$ بحيث $f(\alpha)=0$.

<u>إعطاء حصر لـ α سعته 10^{-1}:</u>

لدينا:

$$-1<\alpha<1$$

ومن جدول تغيرات الدالة f لدينا:

$$f(0)=1\ \left(\text{قيمة موجبة}\right)$$

ومنه:

$$0<\alpha<1$$

وفيما يلي إشارة $f(\alpha)$ الموافقة لقيم α على المجال $]0\,;1[$:

حيث:

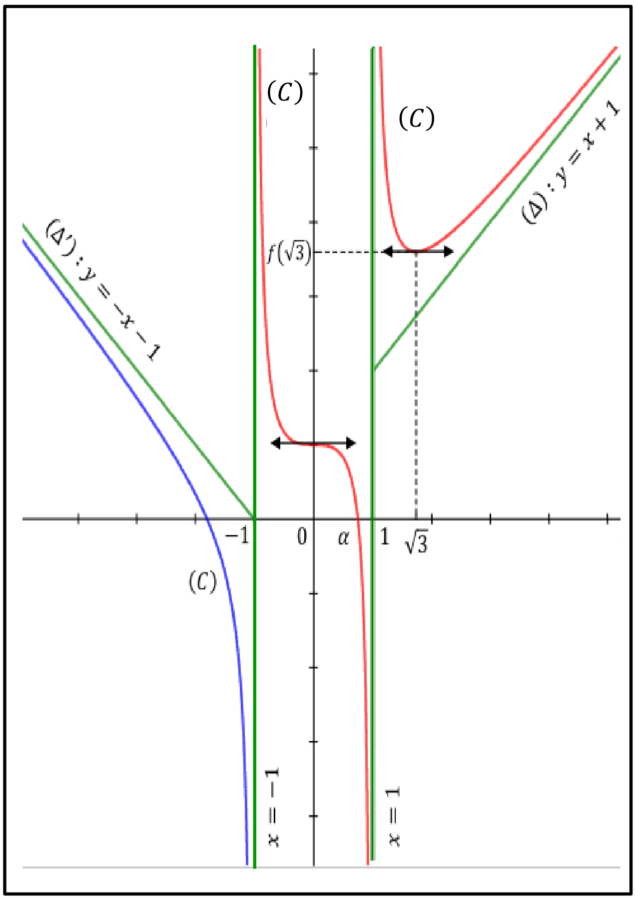
$$f(x)=x+1+\frac{x}{x^2-1}$$

α	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$f(\alpha)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$

ومنه:

$$0{,}7<\alpha<0{,}8$$

<u>5) رسم (C) والمستقيمات المقاربة:</u>



مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

6) المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة:

$$f(x) = m \dots (*)$$

الحلول البيانية للمعادلة $(*)$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع المستقيمات (Δ_m) المعرفة بالمعادلة:

$$(\Delta_m) : y = m$$

جميع المستقيمات $(\Delta_m) : y = m$ توازي حامل محور الفواصل.

ومنه:

المناقشة البيانية أفقية.

- إذا كان: $m < 1$

للمعادلة $(*)$ حلان متمايزان أحدهما موجب والآخر سالب.

- إذا كان: $m = 1$

للمعادلة $(*)$ حلان متمايزان أحدهما معدوم والآخر سالب.

- إذا كان: $1 < m < 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

للمعادلة $(*)$ حلان متمايزان سالبان.

- إذا كان: $m = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

للمعادلة $(*)$ ثلاثة حلول أحدها موجب هو $\sqrt{3}$ وحلان سالبان.

- إذا كان: $m > 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

للمعادلة $(*)$ أربعة حلول حلان موجبان وحلان سالبان.

جميع الحقوق محفوظة
BAC
عبد الحميد