الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة لوغارتمية

$\ln x$

②

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 22

التمريـــــن

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = 1 + x^2 + \ln x$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.32 < \alpha < 0.33$.

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = -x + \frac{2 + \ln x}{x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) بين أنه من أجل كل x من D_f:

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) بين أن: $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$ ، ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أ/ احسب $\lim_{x\to+\infty} [f(x) + x]$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

5) اثبت أن المنحني (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها.

6) مثل بيانيا كل من المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحني (C_f) . علما أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين x_0 و x_1 حيث:

$$0.1 < x_0 < 0.2 \quad \text{وَ} \quad 1.5 < x_1 < 1.6$$

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$h(x) = -x + 1 + 2 + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال D_h :

$$h(x) = f(x+1) + 2$$

ب/ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$

2) أ/ بين أن المنحني (C_h) هو صورة المنحني (C_f) بتحويل بسيط يُطلب تعيينه .

ب/ مثل بيانيا المنحني (C_h) .

3) m وسيط حقيقي غير معدوم، (T_m) مستقيم معادلته:

$$y = \ln(|m|)\, x + 1$$

أ/ برهن أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها.

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية:

$$h(x) = \ln(|m|)\, x + 1 \dots (E)$$

حل التمريـــن

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to 0}[g(x)] = \lim_{x\to 0}[1+x^2+\ln x]$$
$$= 0-\infty$$
$$= -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to +\infty}[g(x)] = \lim_{x\to +\infty}[1+x^2+\ln x]$$
$$= +\infty+\infty$$
$$= +\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 2x+\frac{1}{x}$$
$$= \frac{2x^2+1}{x}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول تغيرات $g(x)$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

2) تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا: الدالة g مستمرة ومتزايدة على مجال تعريفها

ولدينا: $g(0.33)=0.0002$ و $g(0.32)=-0.03$

ولدينا: $g(0.33)\times g(0.32)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.32<\alpha<0.33$.

3) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II)

1) حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}[f(x)] = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\left[-x+\frac{2+\ln x}{x}\right]$$
$$= \frac{-\infty}{0^+}$$
$$= -\infty$$

- <u>التفسير الهندسي:</u>

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 0$

ملاحظة:

هذه الكتابة $\left(\frac{-\infty}{0^+}\right)$ غير رياضية، لأن ∞ رمز لعدد كبير فقط ولا يمكن حساب صورته ولكن تعمدت كتابتها للتسهيل للتلميذ فقط

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{2+\ln x}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}}{1}\right]$$
$$= -\infty$$

لان: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{x}\right] = 0$

2) تبيين أنه من أجل كل x من D_f: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$:

$$f'(x) = -1+\frac{\frac{1}{x}x-(2+\ln x)}{x^2}$$
$$= \frac{-x^2-1-\ln x}{x^2}$$
$$= -\frac{x^2+1+\ln x}{x^2}$$
$$= -\frac{g(x)}{x^2}$$

لدينا $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

- <u>جدول التغيرات:</u>

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow +\infty$

3) تبيين أن: $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)$:

لدينا:

$$g(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha^2+1+\ln\alpha=0$$
$$\Rightarrow \ln\alpha=-(\alpha^2+1)$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= -\alpha+\frac{2+\ln\alpha}{\alpha} \\ &= \frac{-\alpha^2+2-(\alpha^2+1)}{\alpha} \\ &= \frac{-2\alpha^2+1}{\alpha} \\ &= 2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right) \end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$0.32<\alpha<0.33$$
$$-0.33<-\alpha<-0.32 \ldots (1)$$

ولدينا:

$$0.32<\alpha<0.33$$
$$0.64<2\alpha<0.66$$
$$\frac{1}{0.66}<\frac{1}{2\alpha}<\frac{1}{0.64}$$
$$1.51<\frac{1}{2\alpha}<1.66 \ldots (2)$$

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد:

$$1.18<\frac{1}{2\alpha}-\alpha<1.34$$
$$2.18<2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)<2.34$$

إذن:

$$2.18<f(\alpha)<2.34$$

4) أ/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}[f(x)+x] &= \lim_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{2+\ln x}{x}+x\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2+\ln x}{x}\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right] \end{aligned}$$

$$= 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = -x$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{2 + \ln x}{x}$$

لدينا $x > 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$2 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -2$$
$$\Rightarrow x = e^{-2}$$

ومنه:

x	0	e^{-2}	$+\infty$
$f(x) - x$	$-$	0	$+$

- الوضعية:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; e^{-2}[$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة e^{-2} .
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]e^{-2}; +\infty[$.

5) اثبات أن المنحني (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) :

(T) يوازي (Δ) معناه: $f'(a) = -1$

ومنه:

$$f'(a) = -1 \Rightarrow -\frac{a^2 + 1 + \ln a}{a^2} = -1$$
$$\Rightarrow a^2 + 1 + \ln a = \alpha^2$$
$$\Rightarrow 1 + \ln \alpha = 0$$
$$\Rightarrow \ln a = -1$$
$$\Rightarrow a = e^{-1}$$

ومنه:

$$(T): y = f'(a)(x - a) + f(\alpha)$$
$$= -x + e^{-1} - e^{-1} + \frac{2 + \ln e^{-1}}{e^{-1}}$$
$$= -x + e$$

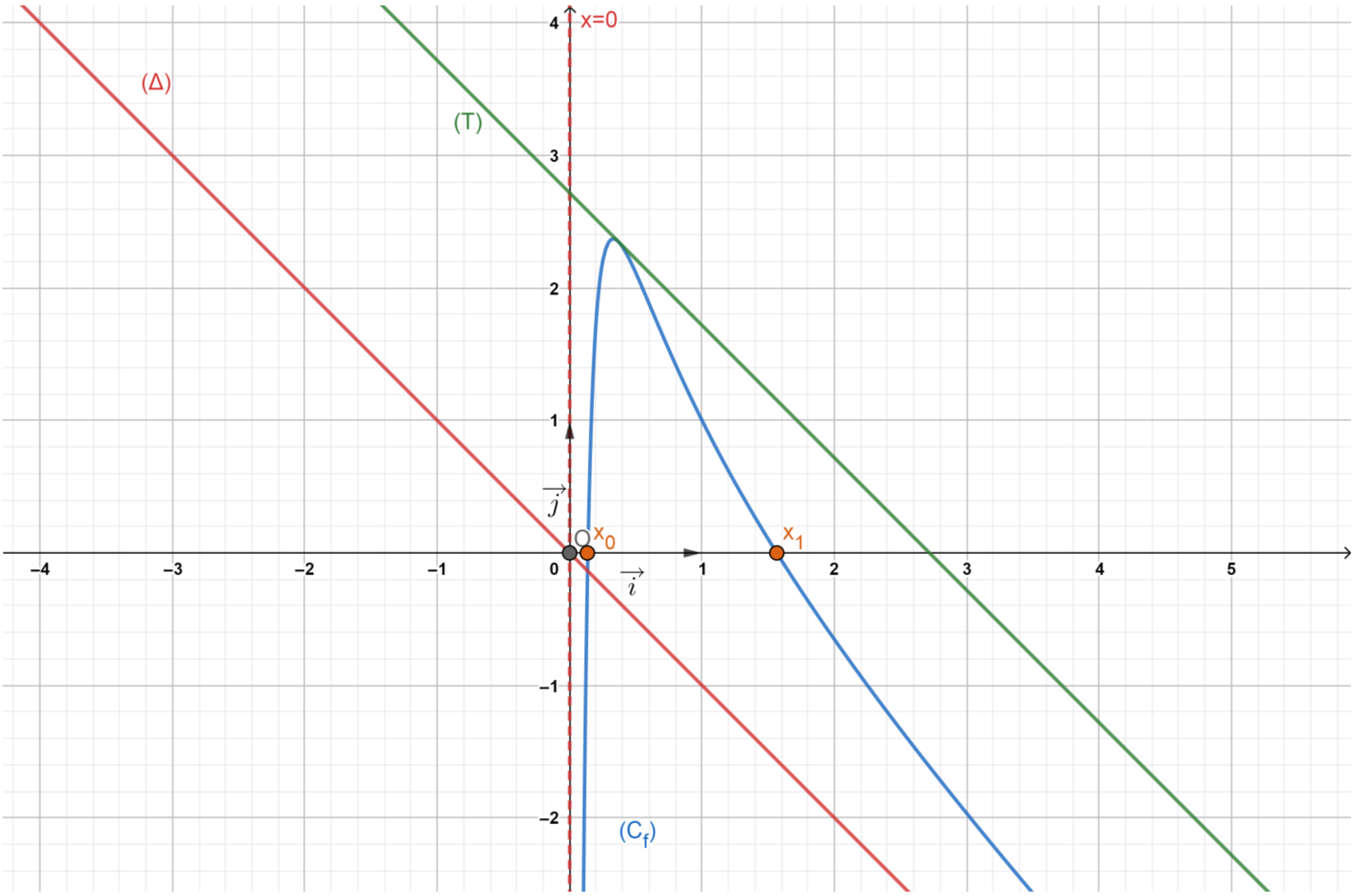
6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي : $x = 0$
- نعين x_0 و x_1 نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل

الخليل للرياضيات

- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ):
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(III)

7) أ/ تبيين أنّه من أجل كل x من المجال D_h : $h(x) = f(x+1) + 2$:

$$\begin{aligned} f(x+1)+2 &= -(x+1) + \frac{2+\ln(x+1)}{x+1} + 2 \\ &= -x - 1 + \frac{2+\ln(x+1)}{x+1} + 2 \\ &= -x + 1 + \frac{2+\ln(x+1)}{x+1} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ب/ تبيين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} [h(x) - (-x+1)] = \lim_{x\to+\infty} \left[-x + 1 + \frac{2+\ln(x+1)}{x+1} + x - 1 \right]$$

الخليل للرياضيات

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2+\ln(x+1)}{x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x+1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$

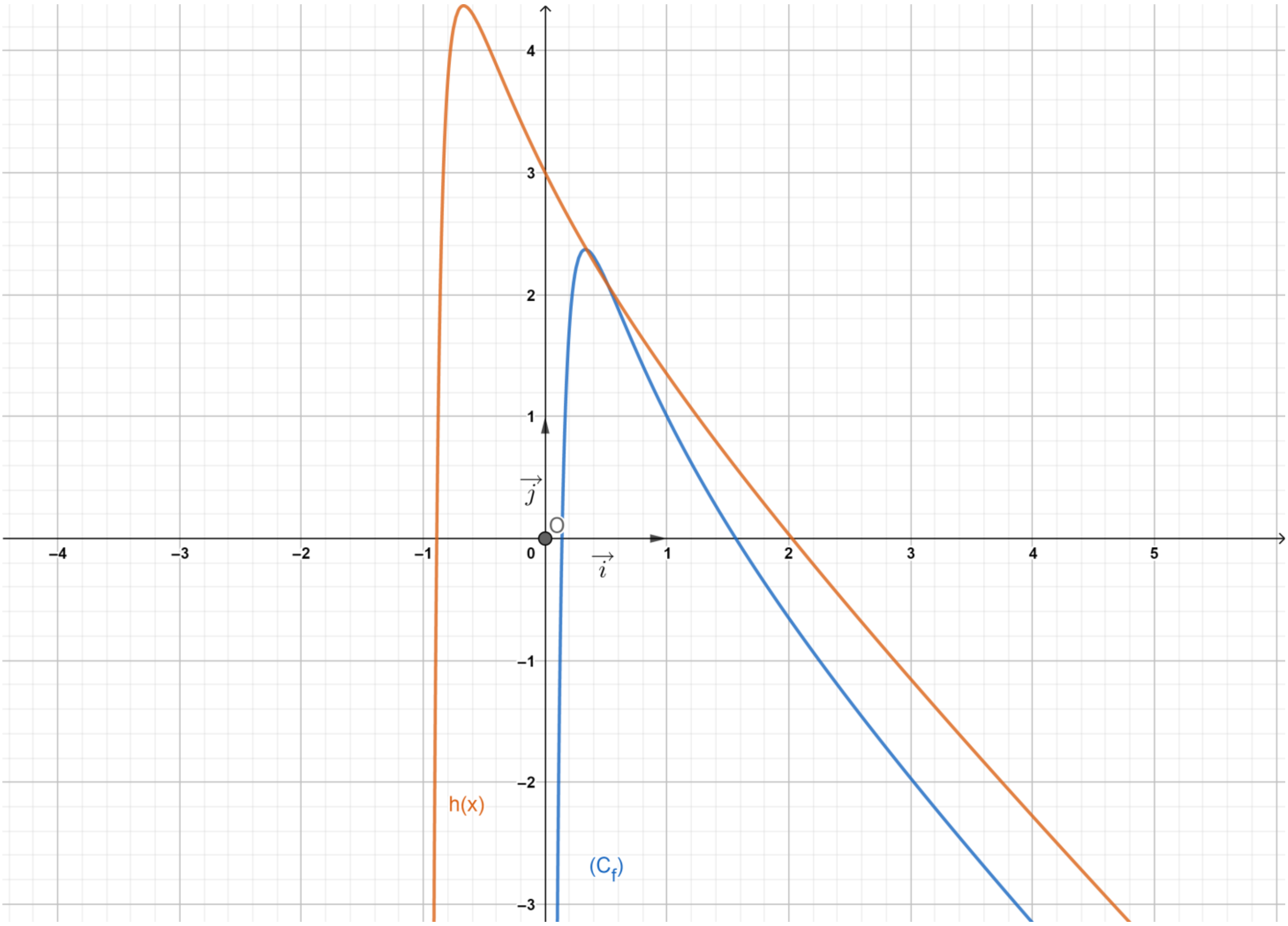
8) أ/ تبيين أن المنحني (C_h) هو صورة المنحني (C_f) بتحويل بسيط يُطلب تعيينه :

$$h(x) = f(x+1)+2$$
$$= f\big(x-(-1)\big)+2$$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه: $\vec{u}(-1;2)$

ب/ التمثيل البياني لـ (C_h) :

تمثيل (C_f) و (C_h) :



9) أ/ برهان أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها:

نفرض أن النقطة $A(x_1;y_1)$ تنتمي إلى المستقيم (T_m) ونبرهن أنها ثابتة:

لدينا: A تنتمي إلى (T_m) معناه:

الخليل للرياضيات

$$y_1 = \ln(|m|)\, x_1 + 1$$
$$\Rightarrow \ln(|m|)\, x_1 - y_1 + 1 = 0 \dots (3)$$

المعادلة (3) عبارة عن كثير حدود متغيره $\ln(|m|)$ وينعدم اذا انعدمت جميع معاملاته

أي:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -y_1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

اذن: المستقيمات (T_m) تشمل النقطة $A(0;1)$

ب/ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_h) مع المستقيمات ذات المعادلة

$$y_m = \ln(|m|)\, x + 1$$

ومنه:

لما	$\ln\|m\| = -1$	أي	$\|m\| = e^{-1}$	أي	$m = e^{-1}$ وَ $m = -e^{-1}$	المعادلة تقبل حلا وحيدا
لما	$\ln\|m\| < -1$	أي	$\|m\| < e^{-1}$	أي	$-e^{-1} < m < e^{\wedge} - 1$	المعادلة تقبل حلا وحيدا
لما	$\ln\|m\| > -1$	أي	$\|m\| > e^{-1}$	أي	$m \in]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty$	المعادلة تقبل حلان

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►