تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا

شعبة : تقني رياضي

التمرين [1] [باك 2008] [م1] [ن7]

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;2]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $4cm$)

1) أـ أدرس تغيّرات الدالة f على المجال $[0;2]$.

بـ ـ أنشئ (C_f).

جـ ـ برهن أنه إذا كان $x\in[0;2]$ فإن $f(x)\in[0;2]$.

2) نعرّف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases}u_0=0\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$.

أـ برّر وجود المتتالية (u_n) ، ثم أحسب u_1 و u_2.

بـ ـ مثل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل و ذلك بالاستعانة بـ (C_f) و المستقيم (D) ذو المعادلة : $y=x$.

جـ ـ ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها إنطلاقا من التمثيل السابق.

3) أـ برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n ، $0\le u_n\le\sqrt{3}$.

بـ ـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}>u_n$. ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب المتتالية (u_n) ؟

جـ ـ تحقق أن : $u_{n+1}-\sqrt{3}\le\dfrac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n-\sqrt{3})$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$.

عيّن عددا حقيقيا k من المجال $]0;1[$ بحيث : $\left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right|\le k\left|u_n-\sqrt{3}\right|$.

بيّن أنه من أجل $n\in\mathbb{N}^*$: $\left|u_n-\sqrt{3}\right|\le k^n\left|u_0-\sqrt{3}\right|$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين [2] [باك 2008] [م2] [ن8]

1) f الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x+2}$.

و (C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

أـ أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

بـ أدرس اتجاه تغيّر f ثم شكل جدول تغيّراتها.

جـ ـ بيّن أن المستقيم (D) ذي المعادلة : $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) ، ثم أرسم المنحنى (C_f) و المستقيم (D).

د ـ بيّن أن صورة المجال $\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$.

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أـ باستخدام (C_f) و المستقيم ذي المعادلة $y=x$ مثل u_0 ، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل.

بـ ـ خمّن إتجاه تغيّر و تقارب المتتالية (u_n).

جـ ـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le\dfrac{5}{2}$ ، و أن المتتالية (u_n) متزايدة.

إستنتج أن (u_n) متقاربة، ثم أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين [3] [باك 2011] [م1] [5ن]

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n(n+2)}$ ، ثم إستنتج أن $u_n > 1$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم بيّن أنها متقاربة ، وأحسب نهايتها .

3) ليكن P_n الجداء المعرّف كما يلي : $P_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times .... \times u_n$.

أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $P_n = \dfrac{2n+2}{n+2}$.

4) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \ln u_n$.

عبّر بدلالة P_n عن S_n حيث : $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

التمرين [4] [باك 2013] [م2] [4ن]

(u_n) المتتالية المعرفة كما يلي : $u_0 = e^2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n = \sqrt{\dfrac{u_{n-1}}{e}}$.

(v_n) المتتالية المعرفة على كما يلي : $v_n = \dfrac{1}{2}\ln u_n + \dfrac{1}{2}$.

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ ثم أحسب حدها الأول .

2) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

4) أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times .... \times u_n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$.

التمرين [5] [باك 2014] [م1] [4ن]

I) f هي الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x) = x - \ln(x-1)$

1) حدد حسب قيم x ، إشارة $f(x) - x$.

2) أ- عيّن إتجاه تغيّر f .

3) ب- بيّن أنه إذا كان $x \in [2;e+1]$ فإن : $f(x) \in [2;e+1]$.

II) (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = e+1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

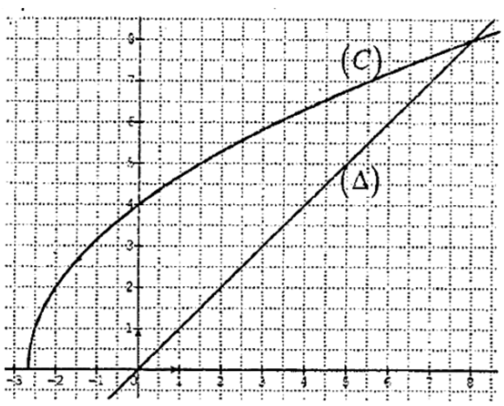
1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \in [2;e+1]$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) برر تقارب المتتالية (u_n) ، ثم أحسب نهايتها.

التمرين [6] [باك 2015] [م2] [4ن]

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بحدها الأول : $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$.



1) h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\dfrac{8}{3};+\infty\right[$ بما يلي : $h(x) = \sqrt{6x+16}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب معلم متعامد و متجانس

و (Δ) المستقيم ذوالمعادلة $y = x$. (أنظر الشكل)

أ- أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

(دون حسابها و موضحا خطوط الإنشاء)

ب- ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n < 8$.

ب- بيّن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16} + u_n}$.

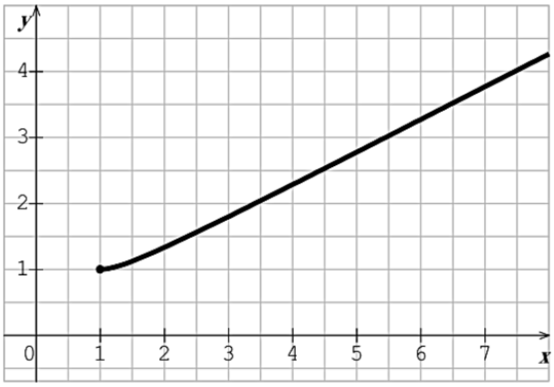
جـ- استنتج إتجاه تغيّر (u_n) .

3) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<8-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(8-u_n)$.

بـ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<8-u_n\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين [7] [باك 2016] [م2] [5ن]

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$. (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.



1) بيّن أن الدالة f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

2) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=6$

و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ- أنقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) .

على حامل محور الفواصل(دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .

بـ- أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

جـ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 6$.

د- أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

هـ- برّر تقارب المتتالية (u_n) .

3) نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$ و $w_n=\ln(v_n)$.

أ- برهن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 ، يطلب تعيين حدها الأول .

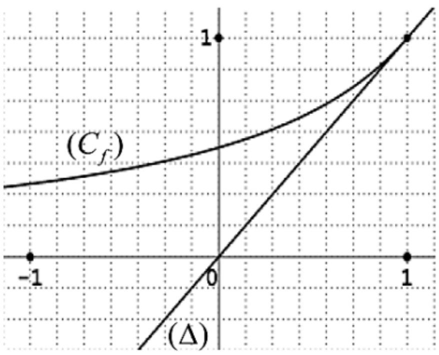
بـ- أكتب w_n بدلالة n ، ثم v_n بدلالة n .

جـ- بيّن أن : $u_n=1-\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) أحسب بدلالة n المجموع التالي: $S_n=\frac{1}{w_0}+\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+....+\frac{1}{w_n}$.

التمرين [8] [باك 2017] [م1] [4ن]

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty;1]$ بـ : $f(x)=\frac{1}{2-x}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و ليكن (Δ) المستقيم ذا المعادلة : $y=x$.



(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول : $u_0=-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

مبرزا خطوط التمثيل ، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<1$.

3) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم أستنتج أنها متقاربة.

4) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n=\frac{2}{1-u_n}$.

أ- برهن أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 ، ثم عيّن عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

بـ- استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

التمرين [9][باك 2017][م2][دإ][ن4]

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = \frac{1}{\alpha}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_{n+1} = \frac{n+1}{\alpha n} u_n$

حيث α عدد حقيقي أكبر أو يساوي 2.

1) أ ـ بيّن أن : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n > 0$.

ب ـ بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $v_n = \frac{1}{\alpha n} u_n$.

أ ـ بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ و عيّن حدّها الأول v_1 بدلالة α.

ب ـ جد بدلالة n و α عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n و أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n و α المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + ... + \frac{u_n}{n}$.

عيّن قيمة α حيث : $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{2016}$.

التمرين [10][باك 2018][م1][ن4]

f الدالة العددية المعرفة و المتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2x}{e.x+1}$. (e أساس اللوغاريتم النبيري)

و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول : $u_0 = \frac{5}{4e}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) أ ـ برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{1}{e}$.

ب ـ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{e.u_n\left(\frac{1}{e} - u_n\right)}{e.u_n + 1}$.

ثم إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) و برر أنها متقاربة.

2) نعتبرالمتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{e.u_n}{e.u_n - 1}$.

بيّن أن المتتالية (v_n) هندسيةأساسها 2 ، يطلب تعين حدّها الأول v_0 عبارة v_n بدلالة n.

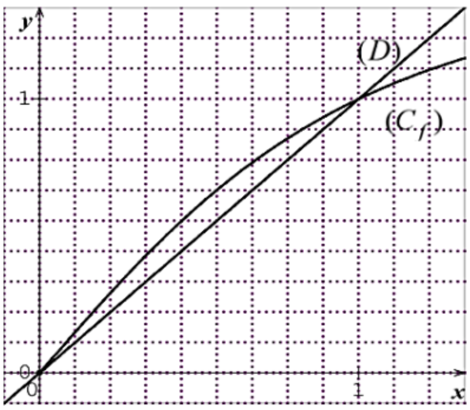
3) أ ـ تحقق أنه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}$: $v_n = 1 + \frac{1}{e.u_n - 1}$ و استنتج عبارة u_n ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

ب ـ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$.

التمرين [11][باك 2020][م1][ن4]

الدالة العددية f معرفة و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{4x+5}}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.



المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول u_0 بحيث : $u_0 = \frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) أ ـ أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط الإنشاء.

ب ـ ضع تخمينا حول إتجاه تغيرالمتتالية (u_n) و تقاربها .

2) أ ـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2} \le u_n < 1$.

ب ـ بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{{u_n}^2}{1-u_n}$.

برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{9}{5}$ ، يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

4) أـ أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

بـ ـ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

❝ The only way to learn mathematics is to do mathematics ❞

كتابة : خالد بخاخشة

نشر يوم 2021/01/20