

MATHS BAC

3 A.S

علوم تجريبية

رياضيات

تقني رياضي

- عروض نظرية للدروس
- جميع الأفكار الواردة في البكالوريات السابقة مدمجة في الدروس
- تجميعية لجميع تمارين البكالوريا موزعة حسب الوحدات

تأليف : عادل نعيجي
الجزء الأول
- التحليل -

مقدمة

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ و الصلاة و السلام على أشرف الخلق سيد المرسلين نبينا محمد صلى الله عليه و سلم نور العالمين أما بعد فإنه قبل حوالي ثلاث سنوات و بعد تفوق في شهادة البكالوريا دورة 2015 و احتلاي للمرتبة الأولى وطنيا في شعبة الرياضيات بمعدل 18.86 كنت قد وعدت كل من صادفته أنني سأنشر وثائقي على شكل كتيبات لكن الأشغال لم تسنح لي بذلك و لكي لا يخلف الانسان وعده فإنه من دواعي السرور و الغبطة أن أضع بين أيديكم اليوم أول اصدار لسلسلة *SERIE ADEL NAIDJI* و التي تتوجه لطلاب البكالوريا بمجموعة من الكتيبات الالكترونية المجانية و التي نتمنى أن تكون لهم خير سند و معين، يشمل الجزء الأول من كتاب الرياضيات ما يضاها حوالي 15 أسبوعا تعليميا من المنهج السنوي و يتناول جانب التحليل من البرنامج " الدوال "، و لقد عمدت لوضع مراجعة شاملة في بداية الكتاب لما يحتاجه طالب البكالوريا من معارف قبلية في السنتين السابقتين. إن هذا المؤلف ما هو إلا ثمرة جهد شخصي و عمل ذاتي بحت إذ تمت كتابته بخط اليد و لقد اعتمد على طريقة جديدة في القاء العروض النظرية إذ أن بناء الدروس استند إلى الأفكار المتداولة في تمارين الباك فهذه الدروس تشمل إلى حد بعيد جميع الأسئلة المطروحة في الأعوام السابقة إذ لا يخفى على أي طالب أن شهادة البكالوريا ما هي إلا رسكلة لأفكار مضمومة تعاد كل دورة، ثم يأتي في نهاية الكتاب تجميعية لكل المسائل الواردة في الشهادات السابقة إذ أنها أفضل معيار يمكننا أن نستند إليه من أجل التقييم الذاتي لقدرات المترشح، و في نهاية المطاف فما بوسعي إلا أن أتمنى لكل مقبل على شهادة البكالوريا النجاح و التفوق، و ما وفقت فيه فمن الله سبحانه و تعالى، و ما أخطئت فيه فمن نفسي و من الشيطان، و إنه لمن دواعي سروري أن أستقبل منكم كافة الاقتراحات و الآراء البناءة أو بعض الأخطاء التي يمكن أن تنبع من قلة التركيز أثناء الكتابة.

<https://www.facebook.com/adel.naidji.7>

عادل نعيجي

اهداء

نهدي هذا العمل المتواضع إلى:

- الوالدين الكرمين أطال الله في عمرهما و الاخوة الأعزاء

- الأسرة القريبة و البعيدة

- إلى كل من علمني حرفا من الأساتذة الكرام

- إلى كل الزملاء و الأساتذة و العمال بثانويتي الثانوية الوطنية للرياضيات بالقبة و كلية الطب بالجزائر العاصمة

- إلى كل الأصدقاء من العالم الحقيقي و الافتراضي الفيسبوك

- إلى كل طالب علم يعمل بتفان للرفي بالجزائر الحبيبة

الفهرس

مراجعة عامة 1

كثيرات الحدود 8

المعادلات 10

دراسة اشارة عبارة 21

المتراجحات 23

عموميات على الدوال 27

النهايات 45

السلوك التقاربي لمنحن دالة 55

الاستمرارية 60

مبرهنة القيم المتوسطة 63

الاشتقاقية 66

الدوال الأسية 79

الدوال اللوغاريتمية 85

أسئلة نظرية حول الدوال الأسية و اللوغاريتمية 93

الدوال الأصلية 98

المعادلات التفاضلية 102

الحساب التكاملي 105

تطبيقات التكامل 114

استنتاج منحنيات انطلاقا من منحنيات أخرى 120

تمارين حول الدوال العددية 126

تمارين حول الدوال الأسية 130

تمارين حول الدوال اللوغاريتمية 145

مراجعة عامة

ADEL MAJIDI

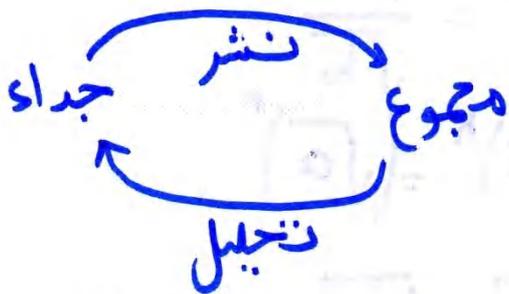
مراجعة عامة

مثال:

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2 \times \frac{1}{2}} = [(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}}$$

$$-1 = 1 ???$$

2/ الجداول الشهيرة:



$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a-b)(a+b)^2 = a^2 - b^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

استنتاجات:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$$

$$(-a-b)^2 = (a+b)^2$$

$$(-a+b)^2 = (b-a)^2$$

1/ خواص القوة الصحيحة:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n$$

أساس n مرة

$$* a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \left\{ \begin{array}{l} (a,b) \in \mathbb{R}^{+*} \\ (n,m) \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$* \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$* a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$* \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$* (a^n)^m = a^{n \times m}$$

$$* a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$* a^n \times a^{-n} = 1$$

$$* (+a)^n = +a^n$$

$$* (-a)^n \begin{cases} \rightarrow +a^n & ; n=2k \\ \rightarrow -a^n & ; n=2k+1 \end{cases}$$

$$(a > 0)$$

$$* a^0 = 1$$

$$* a^1 = a$$

$$* 0^n = 0$$

$$* 1^n = 1$$

لا يوجد 0^0

①

تعميم:

* الاستلزام: إذا كان ... فإن ...
(\Leftarrow) (اتجاه واحد)

* التكافؤ: ... ينافي ...
... وإذا فقط إذا ...

دوماً \leftarrow

$$\sqrt{A(x) \cdot B(x)} = \sqrt{A(x)} \cdot \sqrt{B(x)} \quad (*)$$

$$A(x) \cdot B(x) \geq 0 \iff \begin{matrix} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{matrix}$$

ليس دوماً. \leftarrow

$$\sqrt{\frac{A(x)}{B(x)}} = \frac{\sqrt{A(x)}}{\sqrt{B(x)}} \quad (+)$$

$$A(x) \cdot B(x) \geq 0 \iff \begin{matrix} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \end{matrix}$$

$$\sqrt{A(x)^2} = |A(x)| \quad (*)$$

3/ الجذور التربيعية:

* لا يمكن كتابة \sqrt{A} إلا إذا كان
 $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$; $A > 0$

$$* \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$* \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$* (\sqrt{a^n}) = (\sqrt{a})^n$$

$$* \sqrt{a} = \sqrt{b} \iff a = b$$

$$* \sqrt{a^2} = a$$

$$* \sqrt{(a+b)^2} = (a+b)$$

$$* \sqrt{a} = a^{1/2}$$

$$* \sqrt[3]{a} = a^{1/3}$$

$$* \sqrt{0} = 0$$

$$* \sqrt{1} = 1$$

أخطاء شائعة

$$* \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$* \sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$$

4/ اتوحيد المقامات:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} \neq \frac{a}{b+c}$$

5/ الاختزال والمساواة:

① الاختزال الأفقي:

$$* A(x) + d = B(x) + d$$

$$* A(x) \times d = B(x) \times d; d \neq 0$$

② الاختزال العمودي

$$\frac{A(x) \times d}{B(x) \times d} = \frac{A(x)}{B(x)}$$

$$* \frac{A(x) + d}{B(x) + d} \neq \frac{A(x)}{B(x)}$$

③ اختزال متغير

← العمودي

$$* \frac{A(x) \times h(x)}{B(x) \times h(x)} = \frac{A(x)}{B(x)}$$

③

14 الكسور:

① ضرب الكسور:

$$* \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$* d \times \frac{a}{b} = \frac{da}{b} = \frac{d}{b} \times a$$

$$* - \frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

② قسمة الكسور:

$$* \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$* \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$* \frac{a}{c/b} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

يجب التمييز بين الكسور الفرعية والكسور الرئيسية.

③ الضرب والقسمة في وعلي عدد غير

معلوم

$$* \frac{a}{b} = \frac{da}{db}$$

$$* \frac{a}{b} = \frac{a \div d}{b \div d}$$

6/ الاختزال والمختراجات:

1/ الاختزال الأفقي:

$$+ A(x) + d > B(x) + d$$

$$+ A(x) \times d > B(x) \times d$$

$$\rightarrow d > 0 : A(x) > B(x)$$

$$\rightarrow d < 0 : A(x) < B(x)$$

2/ اختزال متغير:

$$+ A(x) \times R(x) < B(x) \times R(x)$$

$$+ R(x) [A(x) - B(x)] < 0$$

* ثم ننشر جدول الاشارة ونحل
المختراجة.

* نستغل هذه الطريقة دوما.

← الأفقي:

$$+ A(x) \times R(x) = B(x) \times R(x)$$

* نتأكد هل $R(x) = 0$ لها حل

+ ليس لها حل ← نكتب

$$A(x) = B(x)$$

* لها حل ← نجعل المعاداة

صفرية ثم نحلها

$$R(x) [A(x) - B(x)] = 0$$

أمثلة:

$$* x^2(x^2+3) = 4(x^2+3)$$

$$x^2 = 4$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 2$$

$$* x^2(x+3) = 4(x+3)$$

$$(x+3)(x^2-4) = 0$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = +2 \end{cases}$$

$$* x^2 - x^2 = x^2 - x^2$$

$$(x/x)(x+x) = x(x/x)$$

$$x+x = x$$

$$2x = 1x$$

$$1 = 2 \text{ ???}$$

7/ قواعد الحساب في IR:

1/ اضافة عدد حقيقي:

$$+ a = b \Leftrightarrow a + d = b + d$$

$$+ a > b \Leftrightarrow a + d > b + d$$

2/ الضرب في عدد حقيقي لا 0، d ≠ 0

$$+ a = b \Leftrightarrow d a = d b$$

$$+ a > b \Leftrightarrow \begin{cases} d a > d b ; d > 0 \\ d a < d b ; d < 0 \end{cases}$$

3/ الجمع طرفًا للطرف:

$$+ \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow a + b = c + d$$

$$+ \begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a + c \leq b + d$$

$$+ \begin{cases} a < b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$$

(< أولى من ≤)

14/ الضرب طرفًا للطرف:

$$+ \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow a c = b d$$

$$+ \begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a c > b d$$

د، ب، ج، د موجبة

$$+ \begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a c < b d$$

د، ب، ج، د سالبة.

5/ ضرب الطرفين والوسطين:

$$+ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a d = b c$$

تعميم:

$$+ \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \cdot \beta(x) = \alpha(x) \cdot B(x) \\ B(x) \neq 0 \\ \beta(x) \neq 0 \end{cases}$$

حذرا:

$$+ \frac{A(x)}{B(x)} < \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \not\Leftrightarrow A(x) \cdot \beta(x) < \alpha(x) \cdot B(x)$$

بل نجعل المتراجحة صفرية.

- نوجد المقامات

- ننشر ونبسط.

- نحل المتراجحة باستعمال جدول

الأشارة.

6/ خاصية التعدي:

$$\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a \leq c$$

$$\begin{cases} a < b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a < c$$

(< أولى من ≤)

7/ قواعد المساواة:

* إذا كان $A(x) = B(x)$

فإن $A(x)^2 = B(x)^2$

+ العكس لا يصلح دائما للأعداد الموجبة

$$a^n = b^n \Leftarrow a = b$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftarrow a = b$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} \Leftarrow a = b$$

8/ قواعد الترتيب:

$$\sqrt{a} > \sqrt{b} \Leftrightarrow a > b$$

موجبان

$$a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$$

موجبان

$$a^2 < b^2 \Leftarrow a > b$$

سالبان

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow a > b$$

من نفس الاشارة

$$a^3 > b^3 \Leftarrow a > b$$

9/ متى نقلب اشارة متراجحة؟

4 حالات

* تربيع عددين سالبين

* الضرب في عدد سالب

* المقلوب

* ضرب متراجحتين طرفا لطرف

حيث a, b, c, d سالبة.

8/ القيمة المطلقة:

11/ تذكري حول الحالات:

* أكبر من $\{$ أو تساوي $\} \Leftarrow$ مجال مغلق

* أكبر تماما $\{ \Leftarrow$ مجال مفتوح

* عند $-$ و $+$ \Leftarrow مجال مفتوح

* الاتحاد = \cup

* التقاطع = \cap

* استعن بالمحور العددي

(6)

* يمكن التخلص من القيمة المطلقة بالتربيع. ($|A|^2 = A^2$)

$$|x+2| = |x-3|$$

$$(x+2)^2 = (x-3)^2$$

$$(x+2)^2 - (x-3)^2 = 0$$

$$(x+2 - x+3)(x+2 + x-3) = 0$$

$$(5)(2x-1) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

* التخلص من رمز القيمة المطلقة

- ننشئ جدول الاشارة

- نطبق الخاصية

$$|A(x)| =$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \searrow \\ A(x) \quad -A(x) \\ , A(x) \geq 0 \quad , A(x) \leq 0 \end{array}$$

مثال $f(x) = |-2x+3|$

اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
اشارة $-2x+3$	+	o	-
عبارة $f(x)$	$= A(x)$ $= -2x+3$	o	$= -A(x)$ $= 2x-3$

$$f(x) = -2x+3: x \in]-\infty, \frac{3}{2}]$$

$$f(x) = 2x-3: x \in [\frac{3}{2}, +\infty[$$

2/ القيمة المطلقة:

$$* |A(x)| = \begin{cases} + A(x) , A(x) \geq 0 \\ - A(x) , A(x) \leq 0 \end{cases}$$

⊕ خواص:

$$* |a \times b| = |a| \times |b|$$

$$* \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$* |-a| = |a|$$

$$* |a-b| = |b-a|$$

$$* |A(x)| = 0 \Rightarrow A(x) = 0$$

$$* |a+b| \neq |a| + |b|$$

$$* \sqrt{A(x)^2} = |A(x)|$$

* متراجحات بالقيمة المطلقة

$$\alpha \geq 0 ; |A(x)| < \alpha$$

$$-\alpha < A(x) < +\alpha$$

$$\alpha \geq 0 ; |A(x)| > \alpha$$

$$\begin{cases} A(x) > \alpha \\ A(x) < -\alpha \end{cases} \text{ أو } f(u)$$

⑦

ADDEL KHALDUN

كثيرات الحدود

كثيرات الحدود

1/ مفهوم كثير حدود:

بعد الاختزال والتبسيط، نجد الدالة:

← معرفة على \mathbb{R}

← من الشكل

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ هي معاملات

كثير الحدود $p(x)$

* $-2x^3 + 3x - 5; \mathbb{R} \checkmark$

* $-6x^2 + 7x + 2; \mathbb{R}^+ \times$

* $\frac{-x^2 + 1}{x + 1}; \mathbb{R} - \{-1\} \times$

* $\frac{5x^3 + 10x}{x^2 + 2} \checkmark$

* $p(x) = 2 \rightarrow$ الدرجة 0

* $p(x) = -3x + 1 \rightarrow$ الدرجة 1

* $p(x) = 5x^{100} + x^2 + 1 \rightarrow$ الدرجة 100

2/ درجة كثير الحدود:

هي أعلى أس

اوجد a, b, c, d حتى يكون

$$p(x) = g(x)$$

حيث:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 - cx + d$$

$$g(x) = 2x^3 + cx + 3$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -1 \\ d = 3 \end{cases}$$

3/ تساوي كثيري حدود:

المعاملات متساوية

14 / كثير الحدود المردوم (دوما):

جميع المعاملات معدومة

اوجد m, n, l حتى يكون

$$p(x) = 0 \text{ دوما منذ اجل}$$

أي قيمة x : $p(x) =$

$$(-3m+n)x^2 + (m+2n+l)x$$

$$+ 1 + 3m = 0$$

$$\begin{cases} -3m+n=0 \Rightarrow n=3m \\ m+2n+l=0 \Rightarrow l=-7m \\ 1+3m=0 \Rightarrow m=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

15 / عمليات على كثيرات الحدود:

* مجموع كثيري حدود هو كثير حدود

درجته أعلى درجة

* جد ادا كثيري حدود هو كثير حدود

درجته $n+m$

$$p(x) = 2x^2 + 2x + 3$$

$$g(x) = 3x^{40} + 5 + 6x^2$$

$$p(x) + g(x) = 3x^{40} + 8x^2$$

$$+ 2x + 8$$

الدرجة 40

$$p(x) \cdot g(x) = (2x^2 + 2x + 3) \times (3x^{40} + 5 + 6x^2)$$

الدرجة $40 + 2 = 42$

16 / جذر كثير حدود:

هنا
(جذر حل)
جذر $\neq \sqrt{\quad}$

* جذر α من $P(x)$ معناه:

$$P(\alpha) = 0$$

ويمكن كتابة $P(x)$ كما يلي:

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot g(x)$$

كثير حدود أقل من $P(x)$ بدرجة

$$p(x) = 2x^3 - x^2 - 14x + 16$$

تأكد أن 2 جذر $P(x)$

نحسب $P(2)$:

$$P(2) = 2(2)^3 - 2^2 - 14(2) + 16$$

$$P(2) = 0$$

اذن 2 جذر $P(x)$

$$p(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

كثير حدود من الدرجة 2.

(9)

المعادلات

ADELNAIDJI

المعادلات

* يمكن تحليل العبارة كما يلي:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$\Delta = 0$: للمعادلة حل مضاعف

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

والعبارة تنحل كما يلي:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

$\Delta < 0$:

* ليس للمعادلة حلول
* لا يمكن تحليل العبارة.

مثال:

$$5x^2 + 6x + 1 = 0 \text{ حل المعادلة:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(5) = 16 > 0$$

للمعادلة حلان:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 4}{10} = -\frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 4}{10} = -1$$

(10)

ملاحظة مهمة:

* قبل حل أي معادلة أو متراجعة،

يجب تعيين مجموعة تعريفها

$$\sqrt{A(x)} ; A(x) \geq 0$$

$$\frac{1}{A(x)} ; A(x) \neq 0$$

تقاطع
عدة شروط
(n)

$$\frac{0}{\text{عدد}} = 0$$

$$\frac{\text{عدد}}{0} \text{ لا يمكن}$$

1/ المعادلات من الدرجة 1

$$ax + b = 0 ; a \neq 0$$

للمعادلة حل وحيد $x = -\frac{b}{a}$

$$-2x - 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

مثال:

2/ المعادلات من الدرجة 2

$$ax^2 + bx + c = 0 ; a \neq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$: للمعادلة حلان متمايزان

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

* حالات خاصة:

$$ax^2 + bx = 0 \quad : \underline{c=0}$$

$$x(ax + b) = 0$$

للمعادلة حلان دوما:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

* مجموع وجداء x_1 و x_2 :

إذا قبلت معادلة من الدرجة 2 حلين فإن:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

الاستعمال

التأكد من صحة الحل
ايجاد الحل الثاني
بعلومية الأول

$$ax^2 + c = 0 \quad : \underline{b=0}$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 = d$$

$d < 0$: لا يوجد حلول

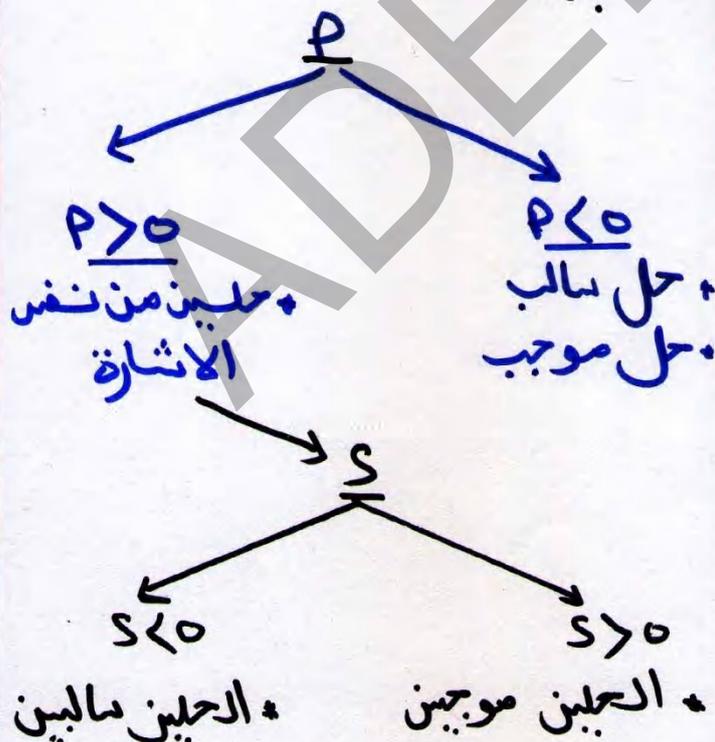
$d = 0$: حل مضاعف $x = 0$

$d > 0$: حلين متمايزان

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{d} \\ x_2 = -\sqrt{d} \end{cases}$$

* تعيين اشارة الحلين دون حسابهما:

إذا قبلت معادلة من الدرجة 2 حلين، يمكن معرفة اشارتهما دون حسابهما.



أمثلة:

$$2x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$-x^2 + 5x = 0$$

$$x(-x + 5) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

* تعيين عددين علم مجموعهما
وجد اوتهما:

$$\begin{cases} S = a + b \\ P = a \times b \end{cases}$$



a و b هما حلا المعادلة:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

مثال:

اوجد العددين a و b اللذان يحققان:

$$a + b = -2$$

$$ab = -3$$

a و b هما حلا المعادلة:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -3$$

$$b = 1$$

$$a = -3$$

أو

* معرفة هل المعادلة

$ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلا

دون حساب Δ

← إذا كان $a \cdot c < 0$ فإن للمعادلة
حتمًا حلول و Δ حتمًا موجب

← إذا كان $a \cdot c > 0$ لا يمكن
الحكم مسبقًا.

* الحل الظاهر:

في بعض الأحيان يمكن حل المعادلة
 $ax^2 + bx + c = 0$ دون حساب Δ و
ذلك كما يلي:

← $a + b + c = 0$ (مجموع المعاملات = 0)

* فإن 1 حل ظاهر
* والحل الآخر هو $\frac{c}{a}$

← $a - b + c = 0$

* (-1) حل ظاهر
* والحل الآخر هو $\frac{-c}{a}$

3 / المعادلات من الدرجة III

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$$

① طريقة التحليل مرتين

$$2x^3 - 3x^2 + 4x - 6 = 0$$

$$x^2(2x - 3) + 2(2x - 3) = 0$$

$$(2x - 3)(x^2 + 2) = 0$$

$$\begin{cases} 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ x^2 + 2 = 0 \Rightarrow S = \phi = \{ \} \end{cases}$$

للمعادلة حل وحيد هو $x = \frac{3}{2}$

N.B لا يوجد $\{ \}$

② طريقة الحل الظاهر:

1. لحل المعادلة، يجب أن نعلم أحد حلولها الظاهرة $x = \alpha$ (يعطى في التصرين أو بلا مرط) (نحرب 1 ثم -1 ثم 2)

2. تحليل العبارة على الشكل التالي:

$$(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$$

ثم نعين a, b, c باحدى الطرق

الثلاث:

← القيمة الاقليدية

← المطابقة

← خوارزمية هورنر

3. حل المعادلة.

مثال:

$$2x^3 - x^2 - 14x + 16 = 0$$

1/ الحل الظاهر:

تأكد أن 2 حل ظاهر.

نعوض ب 2

$$2(2)^3 - 2^2 - 14(2) + 16$$

$$= 16 - 4 - 28 + 16$$

$$= 0$$

اذن 2 حل للمعادلة.

(13)

2/ تحليل العبارة:

$$2x^3 - x^2 - 14x + 16$$

$$= (x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

a/ القيمة الاقليدية:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 14x + 16 & x - 2 \\ \hline 2x^3 - 4x^2 & 2x^2 + 3x \\ \hline 3x^2 - 14x + 16 & -8 \\ -3x^2 - 6x & \\ \hline -8x + 16 & \\ -8x + 16 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$p(x) = (x - 2)(2x^2 + 3x - 8)$$

b/ المطابقة:

$$(x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$$

$$= ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$$

اذن:

$$2x^3 - x^2 - 14x + 16$$

$$=$$

$$ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$$

$$\begin{cases} a = 2 & \text{--- (1)} \\ b - 2a = -1 & \text{--- (3)} \\ c - 2b = -14 & \text{--- (4)} \\ -2c = 16 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 73 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{73}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{73}}{4}$$

اذن: للمعادلة المعطاة 3 حلول هي

$$\left\{ 2; \frac{-3 + \sqrt{73}}{4}; \frac{-3 - \sqrt{73}}{4} \right\}$$

4/ المعادلات من الدرجة IV

① طريقة التحليل مرتين:

② طريقة الحل الظاهر:

③ طريقة تحويل المتغير:

حل في IR للمعادلة:

$$(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0$$

* نضع $y = x^2 - 3x$

* نحل المعادلة ذات المجهول y

* نستنتج قيم x.

المعادلة تصبح:

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$\begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta = 36$$

من ① : $a = 2$

من ② : $c = -8$

من ③ : $b = 2a - 1 = 3$

نتأكد في ④ :

$$c - 2b = -8 - 2(3) = -14$$

معقّنة

اذن:

$$p(x) = (x-2)(2x^2 + 3x - 8)$$

c/ خوارزمية هورنر:

معاملات $p(x)$	2	-1	-14	16
اقل الظاهر (2)	0	4	6	-16
المعاملات a, b, c	2	3	-8	0
	a	b	c	

اذن:

$$p(x) = (x-2)(2x^2 + 3x - 8)$$

3/ حل المعادلة:

$$2x^3 - x^2 - 14x + 16 = 0$$

معناه:

$$(x-2)(2x^2 + 3x - 8) = 0$$

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 2x^2 + 3x - 8 = 0 \end{cases}$$

نضع $y = x^2$ ، المعادلة تصبح

$$y^2 - 5y + 4 = 0 ; y \geq 0$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

حالة $y = 1$: $y = x^2$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

حالة $y = 4$: $y = x^2$

$$\begin{cases} x_3 = -2 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

للمعادلة المعطاة 4 حلول:

$$S = \{-2; -1; 1; 2\}$$

⑤ المعادلات التناظرية:

من الشكل:

$$\frac{a}{x^4} + \frac{b}{x^3} + \frac{c}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^4} = 0$$

$a \neq 0$

مثال: حل في \mathbb{R} المعادلة

$$3x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 3 = 0$$

• نقيم على الحد الأوسط (x^2)

$$3x^2 - 7x + 8 - 7\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad (x \neq 0)$$

• حالة $y = -2$:

$$y = x^2 - 3x$$

$$-2 = x^2 - 3x$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

• حالة $y = 4$:

$$y = x^2 - 3x$$

$$4 = x^2 - 3x$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\begin{cases} x_3 = -1 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

اذن للمعادلة المعطاة 4 حلول هي:

$$S = \{-1; 1; 2; 4\}$$

④ المعادلات مضاعفة التزييع:

من الشكل: $ax^4 + bx^2 + c = 0$; $a \neq 0$

• نضع $y = x^2$

• نبحث عن قيم y

• نستنتج قيم x

مثال: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

15 معادلات أخرى:

$$A(x) \cdot B(x) = 0$$

$$\begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \end{cases} \text{ أو } \text{معناه:}$$

مثال:

$$(2x+1)(x^2+3x-4)=0$$

$$\begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2+3x-4=0 \end{cases} \text{ أو}$$

$$S = \left\{ -4; -\frac{1}{2}; 1 \right\}$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0$$

← نعين D

← نحل المعادلة $A(x) = 0$

← نتحقق هل الحلول تنتمي لـ D

مثال:

$$\frac{x^2+3x-4}{x-1} = 0$$

$$D = \mathbb{R} - \{1\}, x \neq 1; x-1 \neq 0$$

+ المعادلة المعطاة تكافئ:

$$x^2+3x-4=0$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow \text{مرفوض} \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

$$S = \{-4\} \text{ إذن المعادلة حل وحيد}$$

* نضع الحدود التي لها نفس المعاملات جنباً إلى جنب

$$3x^2 + 3\left(\frac{1}{x^2}\right) - 7x - 7\left(\frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

* نظهر المتغير الجديد:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

المعادلة تصبح

$$3\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

$$3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

* نضع $y = x + \frac{1}{x}$ ثم نحل المعادلة

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad 3y^2 - 7y + 2 = 0$$

$$\begin{array}{l|l} \text{لما } y = \frac{1}{3} & \text{لما } y = 2 \\ x + \frac{1}{x} = \frac{1}{3} & x + \frac{1}{x} = 2 \end{array}$$

$$3x^2 - x + 3 = 0 \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

Δ < 0 لا يوجد حل
حل مضاعف 1

للمعادلة المعطاة حل مضاعف $x = 1$

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$D =]-\infty, -2] \cup [2; +\infty[$$

$$\sqrt{x^2 - 4} = x + 1$$

$$x^2 - 4 = (x + 1)^2$$

$$x^2 - 4 = x^2 + 2x + 1$$

$$2x + 1 + 4 = 0$$

$$2x + 5 = 0$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

$$-\frac{5}{2} \in D$$

$$S = \left\{ -\frac{5}{2} \right\} \text{ اذن للمعادلة حل واحد}$$

$$\underline{|A| = -|B|, |A| = |B|, |A(x)| = |B(x)|}$$

$$(A - B)(A + B) = 0 \Leftrightarrow A^2 = B^2$$

مثال:

$$2|x - 1| = 3|2x + 4|$$

$$|x - 1| = \frac{3}{2}|2x + 4|$$

$$|x - 1| = \left| \frac{3}{2} \times 2x + 4 \times \frac{3}{2} \right|$$

$$|x - 1| = |3x + 6|$$

$$(x - 1)^2 = (3x + 6)^2$$

$$(x - 1 - 3x - 6)(x - 1 + 3x + 6) = 0$$

$$(-2x - 7)(4x + 5) = 0$$

$$\begin{cases} -2x - 7 = 0 \\ 4x + 5 = 0 \end{cases}$$

$$S = \left\{ -\frac{7}{2}; -\frac{5}{4} \right\}$$

(17)

$$\underline{\sqrt{A(x)} = 0}$$

$$A(x) > 0 \text{ نعيضه}$$

$$A(x) = 0 \text{ نحل المعادلة}$$

نتحقق هل الحل من D

مثال:

$$D = [1; +\infty[\quad \sqrt{x - 1} = 0$$

$$x - 1 = 0 \text{ المعادلة تكافئ}$$

$$x = 1 \in D$$

اذن للمعادلة حل واحد

$$S = \{1\}$$

$$\underline{|A(x)| = 0 / A(x)^n = 0}$$

$$A(x) = 0 \text{ نحل المعادلة}$$

مثال:

$$|x^2 + 3x - 4| = 0 \quad (2x + 1)^3 = 0$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$2x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\underline{\sqrt{A(x)} = B(x)}$$

نعيضه D

$$A(x) = B(x)^2 \text{ نحل المعادلة}$$

نتأكد هل الحل من D

مثال:

$$\sqrt{x^2 - 4} - x - 1 = 0$$

... $|A|+B=C$ $|A|+|B|=C$ *

يجب أن نتخلص من رمز القيمة المطلقة بالانتعانة بجداول الانتعارة.

مثال ①:

$$|x+3|+|x-5|=6$$

x	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
$ x+3 $	$-x-3$	0	$x+3$	$x+3$
$ x-5 $	$-x+5$	$-x+5$	0	$x-5$
$ x+3 + x-5 $	$-2x-2$	8	8	$2x-2$

$|x+3|+|x-5|=6$ تكافئ:

$$-2x-2=6 \quad x \in]-\infty; -3]$$

$$x = -2$$

مرفوض لان $-2 \notin]-\infty; -3]$

$$8=6 \quad x \in]-3; 5[$$

متعيل.

$$2x-2=6 \quad x \in]5; +\infty[$$

$$x = 4$$

مرفوض لان $4 \notin]5; +\infty[$

$$8=6 \quad : x = -3 \text{ أو } x = 5$$

متعيل.

اذن المعادلة المعطاة ليس لها حلول

$$S = \{ \}$$

(18)

$A(x)^n = B(x)$ *

مثال: $x^3 = 8$

$$x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 - 2^3 = 0$$

$$(x-2)(x^2+4+2x) = 0$$

$$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2+2x+4=0 \quad \Delta < 0 \end{cases}$$

$$S = \{2\}$$

للمعادلة حل واحد

$\sqrt{A} + \sqrt{B} = C$ *

$$\sqrt{4x+7} = 2 + \sqrt{2x}$$

$$2x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; +\infty[= I$$

$$4x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\frac{7}{4}; +\infty[= J$$

$$D = I \cap J = [0; +\infty[$$

المعادلة تصبح:

$$\sqrt{4x+7} - \sqrt{2x} = 2$$

$$(\sqrt{4x+7} - \sqrt{2x})^2 = 4$$

$$4x+7 + 2x - 2\sqrt{2x(4x+7)} = 4$$

$$6x+3 = 2\sqrt{2x(4x+7)}$$

$$(6x+3)^2 = 4[2x(4x+7)]$$

$$36x^2 + 9 + 36x = 32x^2 + 56x$$

$$4x^2 - 20x + 9 = 0$$

$$S = \left\{ \frac{9}{2}; \frac{1}{2} \right\} \in D$$

استنتاج الحلول:

m	$-\infty$	0	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
$\Delta = 9m^2 - 24m$	+		-	-
عدد الحلول	حلان متمايزان	ϕ	حلان متمايزان	حلان متمايزان
	$x = \frac{-m \pm \sqrt{9m^2 - 24m}}{4m}$	ϕ	$x = \frac{-m \pm \sqrt{9m^2 - 24m}}{4m}$	$x = \frac{-m \pm \sqrt{9m^2 - 24m}}{4m}$

اشارة الحلان:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{3-m}{2m}$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-m}{2m} = -\frac{1}{2}$$

ندرس اشارة P و S:

m	$-\infty$	0	$\frac{8}{3}$	3	$+\infty$
الحلول	حلان	ϕ	حلان	حلان	حلان
P	-		+	+	-
اشارة الحلان	مختلفان	ϕ	سالبان	مختلفان	مختلفان
		ϕ	$x = -\frac{1}{4}$	$x = 0$ $x = -\frac{1}{2}$	

المعادلات الوسيطة:

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m , عدد و اشارة حلول المعادلة التالية.

$$2m x^2 + m x + 3 - m = 0$$

① $(m=0) a=0$

المعادلة تصبح $3=0$ (مستحيل)

$$S = \{ \}$$

② $(m \neq 0) a \neq 0$

المعادلة $2mx^2 + mx + 3 - m = 0$ من الدرجة II :

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(2m)(3-m)$$

$$\Delta = 9m^2 - 24m$$

دراسة اشارة Δ :

$$\Delta' = (24)^2 - 4(9)(0) = 24^2 > 0$$

للمعادلة حلان :

$$m = 0$$

$$m = \frac{8}{3}$$

$m = 0$ مرفوض (لأننا فرضنا أن $m \neq 0$)

m	$-\infty$	0	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
$\Delta = 9m^2 - 24m$	+		-	+

تذكير حول أساليب البرهان "6"

* الاستلزام
* التكافؤ

* الخلف: نفرض أن الخاصية
خاصة ثم نبسط حتى نصل
إلى تناقض، منه فرضيتنا

خاصة \Leftrightarrow الخاصية صحيحة

* العكس النقيض للاستلزام:

$$(Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$$

* التراجع .
* فصل الحالات .

* حل المعادلات التالية:

$$x^4 + 4|x^2 - 1| + 3|x + 2| + 1 = 0$$

$$x^4 + 4|x^2 - 1| + 3|x + 2| = -1$$

$$\textcircled{+} \quad \textcircled{-}$$

$$S = \emptyset \quad \Leftarrow \quad \text{مستحيل}$$

$$x - 5\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$x \in [0, +\infty[\quad ; \quad x \geq 0$$

$$\text{نضع } y = \sqrt{x} \quad ; \quad y \geq 0$$

$$y^2 - 5y - 6 = 0$$

$$\begin{cases} y = -1 \text{ مرفوض} \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\sqrt{x} = 6 \quad \text{أي } y = 6$$

$$x = 6^2 \quad \text{أي}$$

$$\boxed{x = 36}$$

$$x|x| = -3$$

ن فصل الحالات:

$$\underline{x \geq 0} : \quad x^2 = -3 \quad \text{مستحيل}$$

$$\underline{x \leq 0} : \quad -x^2 = -3$$

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \rightarrow \text{مرفوض} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$S = \{-\sqrt{3}\}$$

دراسة اشارة عبارة

ADEL MAJIDI

دراسة اشارة عبارة

* اشارة $A(x) \cdot B(x)$

ننجز جدول الاشارة.

مثال: $\theta(x) = (2x+1)(x^2+4x-5)$

x	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x+1$	-	-	0	+	+
x^2+4x-5	+	0	-	-	+
$\theta(x)$	-	0	+	0	-

* اشارة $A(x)$

$B(x)$

ننجز جدول الاشارة مع $B(x) \neq 0$

x	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x+1$	-	-	0	+	+
x^2+4x-5	+	0	-	-	+
$\theta(x)$	-	+	0	-	+

$$\theta(x) = \frac{2x+1}{x^2+4x-5}$$

* اشارة $A(x)^n$

دوماً $A(x)^n \geq 0$: $n = 2k$

اشارة $A(x)^n$ من اشارة $A(x)$: $n = 2k+1$

مثال: $\theta(x) = (x^2+4x-5)^{15}$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$\theta(x)$	+	0	-	0

* اشارة $ax+b$ $a \neq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس اشارة a	0	نفس اشارة a

* اشارة ax^2+bx+c $a \neq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$: حلان x_1 و x_2

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	نفس اشارة a	عكس اشارة a	عكس اشارة a	نفس اشارة a

$\Delta = 0$: حل مضاعف x_1

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
ax^2+bx+c	نفس اشارة a	نفس اشارة a	نفس اشارة a

$S = \emptyset$: $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	نفس اشارة a .	

• اشارة عبارة بدلالة اشارة عبارة اخرى

مثال: $f(x) = \frac{g(x) \times (x^2+3)}{x^4+5x^2}$

• اشارة $f(x)$ من اشارة $g(x)$

مثال: $f(x) = \frac{g(x) + x^2 + 3}{x^4 + 5x^2}$

• اشارة $f(x)$ من اشارة $g(x) + x^2 + 3$.
لا يمكن القول ان اشارة $f(x)$ من اشارة $g(x)$.

← لا يصح تجاهل مقدار عند دراسة اشارة عبارة بالالا اذا كان

- مصنوب في (+)
- مقسوم على (+)

اشارة عبارة ← الاشارة

لـ بقوى قيمته في مجال

لكن $(x^2+4x-5)^{10}$ دوما موجب

• اشارة $\frac{1}{A(x)}$:

نفسها اشارة $A(x)$ مع $A(x) \neq 0$

مثال: $\theta(x) = \frac{1}{x^2+4x-5}$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$\theta(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

أقيمة ممنوعة.

• اشارة $S = C + B + A$

← A, B, C سالبة دوما: $S \leq 0$

← A, B, C موجبة دوما: $S \geq 0$

← A, B, C من اشارات مختلفة

، نحلل المجموع على جداول

ننجز جدول الاشارة.

• ملاحظة:

$$|a| / \sqrt{a} / a^{n=2k} / a^2$$

أو مجموعها

موجب دوما.

مثال: حل المتراجحة

$$3x^{2008} + 11x^{1962} + 1964 > 0$$

(+) (+) (+)

محققة دوما

اذن $S = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

المترجمحات

ADEL MAJIDI

$$: x^2 + 4x - 5 > 0$$

$$S =]-\infty, -5[\cup]1, +\infty[$$

$$\underline{A(x) \cdot B(x) > 0}$$

$$(2x+1)(x^2+4x-5) \geq 0$$

x	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$\theta(x)$		-	+	-	+

$$S = [-5; -\frac{1}{2}] \cup [1; +\infty[$$

$$: \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$$

$$\frac{2x+1}{x^2+4x-5} \leq 0$$

x	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$\theta(x)$		-	+	-	+

$$S =]-\infty, -5[\cup [-\frac{1}{2}; 1[$$

$$\underline{A(x)^n > 0}$$

$$* (x^2+4x-5)^{10} < 0 \text{ ليس لها حل}$$

$$* (x^2+4x-5)^{10} \geq 0 \text{ محققة دوما}$$

$$* (x^2+4x-5)^{10} \leq 0 \text{ متكافئ :}$$

$$x^2+4x-5=0$$

$$S = \{-5; 1\}$$

$$S = \mathbb{R} - \{-5; 1\} \quad (x^2+4x-5)^{10} > 0$$

حل متراجحات

$<$ $>$ $>=$ \leq
 مجال مفتوح مجال مغلق

* نعين D مجموعة التعريف
 نحل المتراجحة ونكتب الحل على شكل مجال I

حل المتراجحة هو $S = I \cap D$

⇐ لحل متراجحة:

- ← نجعلها صفرية
- ← نحل العبارة
- ← ننجز جدول الاشارة
- ← نستنتج الحلول

$$: ax+b > 0$$

$$-2x+4 > 0$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2x+4$		+	-

$$S =]-\infty, 2[$$

$$: ax^2+bx+c > 0$$

$$x^2+4x-5 \leq 0$$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
x^2+4x-5		+	-	+

$$S = [-5; 1]$$

$$|2x-3| < 5$$

مثال:

$$-5 < 2x-3 < 5$$

$$-5+3 < 2x < 5+3$$

$$-2 < 2x < 8$$

$$-1 < x < 4$$

$$S =]-1; 4[$$

$$\underline{|A(x)| > \alpha}$$

$\alpha < 0$: محفظة دوها

$$S = \mathbb{R} \text{ عندما } |A(x)| > 0 \quad \underline{\alpha = 0}$$

$$|A(x)| > 0$$

$$S = \mathbb{R} - \{ \text{القيمة التي تعدم } A(x) \}$$

$$\begin{cases} A(x) > \alpha \\ A(x) \leq -\alpha \end{cases} \text{ و } f(u) \quad \underline{\alpha > 0}$$

$$|2x-3| > 5$$

مثال:

$$\begin{cases} 2x-3 > 5 \\ 2x-3 < -5 \end{cases} \text{ و } f$$

$$\begin{cases} 2x-8 > 0 \\ 2x+2 > 0 \end{cases} \text{ و } f$$

$$\begin{cases} x > 4 \\ x > -1 \end{cases} \text{ و } f$$

$$S = [4; +\infty[\cup]-1; +\infty[$$

$$S = [-1; +\infty[$$

(24)

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$(x^2+4x-5)^{10}$		+	+	+

$$(x^2+4x-5)^{13} < 0$$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$(x^2+4x-5)^{13}$		+	-	+

$$S =]-5; 1[$$

$$\underline{\frac{1}{|A(x)|} > \alpha}$$

$$\frac{1}{(x^2+4x-5)} > 0$$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$\frac{1}{x^2+4x-5}$		+	-	+

$$S =]-\infty; -5[\cup]1; +\infty[$$

$$\underline{|A(x)| \leq \alpha}$$

$\alpha < 0$: لا يوجد حلول

$$A(x) = 0 \text{ معنا } |A(x)| \leq 0 \quad \underline{\alpha = 0}$$

$$|A(x)| < 0 \text{ لا يوجد حلول}$$

$$-\alpha < A(x) \leq \alpha \quad \underline{\alpha > 0}$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
x^2+3x-3	+		-		+

$$I =]x_1; x_2[$$

$$I =]\frac{-3-\sqrt{21}}{2}; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}[$$

$$S_3 =]-3; +\infty[\cap I$$

$$S_3 =]-3; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}[$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$S = [-4; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}[$$

$$\sqrt{A(x)} \leq B(x)$$

$$\sqrt{x-2} < 2x+6$$

$$D = [2; +\infty[\quad \text{تعيين } D$$

اثارة $-2x+6$ على D

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$-2x+2$	///		+		-

$$\sqrt{x-2} < -2x+6 : x \in [2, 3[$$

$$(x-2) < (-2x+6)^2$$

$$4x^2 - x + 14 > 0$$

$\Delta < 0$: لا يوجد حل و

$$4x^2 - x + 14 > 0 \text{ دوماً}$$

(25)

حل متراجعات صماء:

$$\sqrt{A(x)} > B(x)$$

$$\sqrt{3x+12} > x+3$$

* تعيين D :

$$D = [-4; +\infty[$$

اثارة $x+3$ على المجال D :

x	$-\infty$	-4	-3	$+\infty$	
$x+3$	///		-		+

$$x \in [-4; 3[$$

$$\sqrt{3x+12} > x+3$$

(+)

(-)

مفكدة

$$S_1 = [-4; 3[$$

$$\sqrt{3} > 0$$

$$x = -3$$

$$S_2 = \{-3\}$$

مفكدة

$$x \in]-3; +\infty[$$

$$\sqrt{3x+12} > x+3$$

(+)

(+)

$$3x+12 > x^2+6x+9$$

$$x^2+3x-3 < 0$$

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{21}}{2} \approx -3,79$$

$$x_2 = \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \approx 0,79...$$

$$S_1 = [2, 3[$$

$$: \underline{x=3}$$

$$1 < 0$$

متجیل

$$S_2 = \phi$$

$$\sqrt{x-2} < -2x+6$$

$$: x \in]3; +\infty[$$

⊕

⊖

متجیل

$$S_3 = \emptyset$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$S = [2, 3[$$

عمومیات علی الدوال

ADEL AL-AJDI

الدوال العنصرية

2 / مجموعة تعريف دالة:

$$\frac{1}{A}; A \neq 0$$

$$\sqrt{A}; A \geq 0$$

تقاطع
عدة
شروط

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}, B(x) \neq 0$$

أقل من
maximum of

$$f(x) = \sqrt{B(x)}; B(x) \geq 0$$

$$f(x) = \frac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}, B(x) > 0$$

$$f(x) = \sqrt{|A(x)|}; \text{لا يوجد شرط}$$

$$f(x) = \frac{A(x)}{\sqrt{|B(x)|}}; B(x) \neq 0$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{A(x)}{B(x)}}; \begin{cases} A(x) \cdot B(x) \geq 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{A(x) \cdot B(x)}; A(x) \cdot B(x) \geq 0$$

مجموعة $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ D_f يكتب على شكل

اتخاذ مجالات $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[= \mathbb{R} - \{1; 2\}$
هذا الشكل يباعد على حساب النهايات

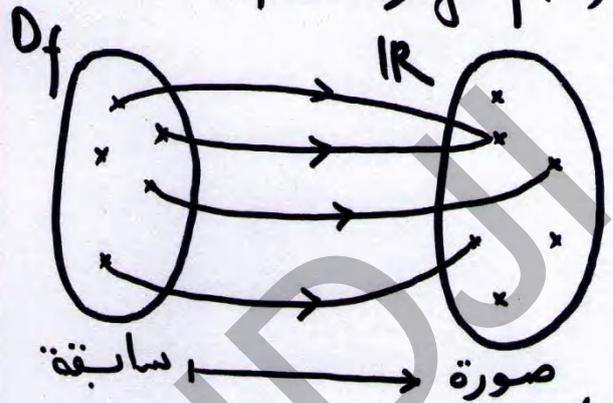
أمثلة:

$f(x) = 2x + 1$	$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$
$f(x) = \frac{3x+6}{x-1}$	$f(x) = \sqrt{ -8x+2 }$
$f(x) = \sqrt{6x+9}$	$f(x) = \sqrt{(x+1)(x-3)}$

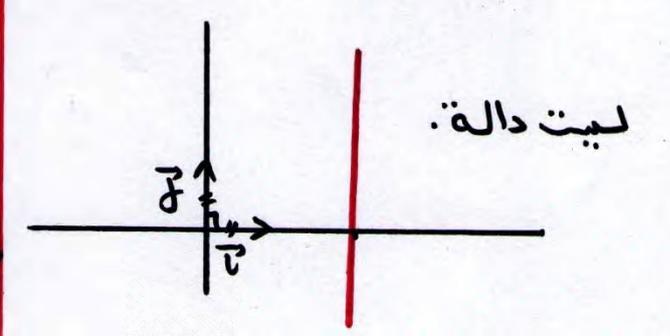
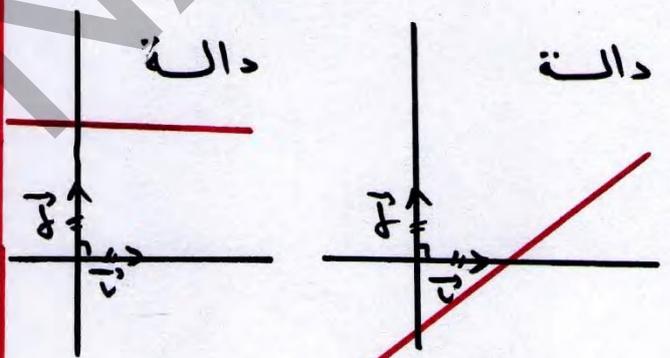
8 / مفهوم دالة

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x)$$



لكل x من D_f : صورة وحيدة.
كل عدد y يمكن أن يكون له سابقة،
اشتان، ...، أو لا شيء.



كل دالة f معرفة ب:
مجموعة تعريفها D_f
دستور الدالة: $f(x) = \dots$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow \text{مرفوض} \\ x = -5 \end{cases}$$

$$f(-5) = 0 \quad \text{اذن}$$

4/ تساوي دالتين:

$$\begin{cases} D_f = D_g \text{ معناه } f = g \\ f(x) = g(x) \text{ و} \end{cases}$$

أمثلة:

$$f(x) = x + 2; D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{(x+2)^2}; D_g = \mathbb{R}, g(x) = |x+2|$$

$$f(x) \neq g(x) \quad \text{لاذن } f \neq g$$

$$f = g \quad \text{على المجال } [-2, +\infty[$$

$$f(x) = x + 2; D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}; D_g =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

$$g(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x + 2$$

$$f \neq g \quad \text{على المجال } \mathbb{R}$$

$$f = g \quad \text{على المجال }]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^2 + 4x - 5}$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 8}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 8}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$$

$$f(x) = \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$$

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 2 - \sqrt{x + 3}}$$

3/ حساب صورة أو سوابق عدد:

حساب صورة عدد a :

• نتأكد أن $a \in D_f$

• نحسب $f(a)$

$$f(a) = b$$

$$\text{مثال: } f(x) = 2x + 1; D_f = \mathbb{R}$$

$$f(0) = 1$$

حساب سوابق عدد b :

• نحل المعادلة $f(x) = b$

• نحتفظ بالحلول التي تنتمي

إلى D_f

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

مثال:

جد سوابق العدد 0.

① تسمى دالة كثير حدود

②, ③, ④ تسمى دوال ناطقة

كثير حدود

كثير حدود

الدالة $f(x) = \sqrt{x+1} - 5x^2 + 2$
تسمى دالة صماء (جزئية)

الدالة $f(x) = \frac{x^2 + 5x - \sqrt{x}}{2x+1}$ تسمى
دالة كسرية.

15 عمليات على الدوال:

محذر مجموعة التعريف:

* $(f+k)(x) = f(x) + k ; D_f$
 * $(f+g)(x) = f(x) + g(x) ; D_f \cap D_g$
 * $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x) ; D_f$
 * $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) ; D_f \cap D_g$
 * $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} ; D_f \cap D_g \cap (g(x) \neq 0)$
 * $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ تركيب دوال
 $(x \in D_f) \cap (f(x) \in D_g)$

مثال: $D_f = [0, +\infty[$, $f(x) = 2x^2 - 1$

$D_g = [-1, +\infty[$, $g(x) = \sqrt{x+1}$

* عين الدوال التالية:

$f+g, -2g, 2f-3g, f+g, f+1$
 $g \circ f, f \circ g, \frac{g}{f}$

* هل يمكن القول اني $f \circ g = g \circ f$ ؟

الاستكمال: ايجاد شكل آخر بسيط لدالة f .

مثال: $f(x) = \frac{x^3 + 9}{x^2 - 1}$

* مثال:

اثبت انه من اجل كل x من D_f :

$f(x) = g(x)$

مثبت: $g(x) = x + \frac{5}{x-1} - \frac{4}{x+1}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$D_g = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$D_f = D_g$

بين الاذان: $f(x) = g(x)$

← نطلق من $f(x)$ الى $g(x)$

← نطلق من $g(x)$ الى $f(x)$

← بين ان $f(x) - g(x) = 0$

شكل مهمة لدوال معروفة:

①. $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

②. $\frac{ax+b}{cx+d} = \alpha + \frac{\beta}{cx+d}$

③. $\frac{ax^2+bx+c}{dx+e} = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{dx+e}$

④. $\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+kx+l} = \alpha x + \beta + \frac{\gamma x + \delta}{ex^2+kx+l}$

* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ تعيين بالقيمة الاقلية
 و المطابقة

6/ اتجاه تغيير الدالة:

- ← نختار الشكل المناسب للدالة
- ← نعين مجالات الدرامة (قد تعطى)
- ← نختار الطريقة المناسبة.

4/ باستعمال قواعد الحساب في \mathbb{R} :

x_1, x_2 عدنان حقيقيان من مجال I
 $(I \in D_f)$ ، من أجل كل x_1 و x_2 :

* f متزايدة تماما على I :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

* f متناقضة تماما على I :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

* f متزايدة على I :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

* f متناقضة على I :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

* f ثابتة على I :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \text{ دوما.}$$

: N.B

f رتيبة تماما (متزايدة تماما أو متناقضة تماما)

f رتيبة (متزايدة أو متناقضة)

مثال:

* f معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = -x^2 - 4x + 1$

* g معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ $g(x) = \frac{3x-5}{x-2}$

ادرس اتجاه تغيير f و g ، ثم شكل جدولي تغييراتهما.

الدالة f :

$$f(x) = -x^2 - 4x + 1$$

$$f(x) = -(x+2)^2 + 5$$

على المجال $]-\infty, -2]$ | على المجال $]-2, +\infty[$

بنفس الطريقة

نجد:

f متناقضة قلما

على $]-2, +\infty[$

$$(x_1+2) < (x_2+2) < 0$$

$$(x_1+2)^2 > (x_2+2)^2$$

$$-(x_1+2)^2 < -(x_2+2)^2$$

$$-(x_1+2)^2 + 1 < -(x_2+2)^2 + 1$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

f متزايدة تماما

على $]-\infty, -2]$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$?	$f(-2) = 5$?

* يمكن القول أن 5 قيمة حدية عرضية

لـ (f) تبلغها من أجل $x = -2$

$x = -2$: (A) محور تناظر لـ (f)

... / ? / ? تمثل نهايات الدالة f .

مثال:

• لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = x^3$$

• تحقق انه من اجل كل x_1, x_2 من \mathbb{R} .

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4}$$

• استنتج اتجاه تغير الدالة مكعب.

الحل:

• باستعمال المتطابقة الشهيرة لتبسيط $a^3 - b^3$.

• بين العبارة

• $A > 0$ دوما اذن الدالة مكعب متزايدة

تماما على \mathbb{R} .

ج/ قواعد عامة:

• اتجاه تغير $f+k$ نفسه اتجاه تغير الدالة f .

• اتجاه تغير $f \cdot k$.

← $k > 0$: نفس اتجاه تغير f

← $k < 0$: عكس اتجاه تغير f .

• f و g متزايدتان معناه الدالة $f+g$ متزايدة.

• f و g متناقصتان معناه الدالة $f+g$ متناقصة.

• $f \times g, \frac{f}{g}, f-g$, لا يمكن الحكم

الدالة g :

$$g(x) = \frac{3x-5}{x-2}; \text{ المجال }]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

• استعمال القمة الاقليدية او المطابقة

$$g(x) = \frac{1}{x-2} + 3$$

• على المجال $]2, +\infty[$ • على المجال $]-\infty, 2[$

بنفس الطريقة

نبرهذان

• متناقصة تماما

على $]2, +\infty[$

$x_1 < x_2 < 2$

$$x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0$$

$$\frac{1}{x_1 - 2} > \frac{1}{x_2 - 2}$$

$$\left(\frac{1}{x_1 - 2} + 3\right) > \left(\frac{1}{x_2 - 2} + 3\right)$$

$$g(x_1) > g(x_2)$$

• متناقصة تماما على $]-\infty, 2[$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$?	?	?

• النقطة $(2; 3)$ مركز تناظر لـ (g)

باستعمال النبة $A = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

من اجل كل x_1, x_2 من I :

• $A > 0 \Leftrightarrow f$ متزايدة تماما على I

• $A < 0 \Leftrightarrow f$ متناقصة تماما على I

• $A = 0 \Leftrightarrow f$ ثابتة على I

• اتجاه تغير $f \circ g$

* g رتيبة تماما على المجال $I = [a, b]$

* f رتيبة تماما على المجال $g(I)$

g متزايدة تماما $\Rightarrow g(I) = [g(a); g(b)]$

g متناقصة تماما $\Rightarrow g(I) = [g(b); g(a)]$

• اتجاه تغير $f \circ g$

$\leftarrow f$ و g لهاتين اتجاه التغير:

$f \circ g$ متزايدة تماما

$\leftarrow f$ و g مختلفان في اتجاه التغير:

$f \circ g$ متناقصة تماما.

أمثلة:

① ادرس اتجاه تغير الدالة f :

$$f(x) = -\frac{3}{x} + 2$$

② ادرس اتجاه تغير $f+g$:

$$f(x) = 3x+1 ; g(x) = +2x+3$$

③ ادرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة

$$\text{على } [1,5; +\infty[\text{ بـ } g(x) = (-2x+3)^2$$

④ ادرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة

$$\text{على }]-\infty, 3] \text{ بـ } g(x) = \sqrt{-x+3}$$

الحل:

$$\textcircled{1} f(x) = -\frac{3}{x} + 2 / D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$]0, +\infty[$$

$$]-\infty, 0[$$

$\frac{1}{x}$ متناقصة تماما

$-\frac{3}{x}$ متزايدة تماما

$-\frac{3}{x} + 2$ متزايدة تماما

f متزايدة تماما

$$\bullet f(x) = 3x+1$$

$3 > 0$: اذن f متزايدة تماما

$$\bullet g(x) = 2x+3$$

$2 > 0$ اذن g متزايدة تماما

منه $f+g$ دالة متزايدة تماما على \mathbb{R}

$$g(x) = (-2x+3)^2$$

③ :

$$D_g = [1,5; +\infty[$$

$$g = u \circ v \begin{cases} u(x) = x^2 \\ v(x) = -2x+3 \end{cases}$$

• v متناقصة تماما على $[1,5; +\infty[$

• اتجاه تغير u على المجال

$$v\left(\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]\right) =]-\infty, 0]$$

على المجال $]-\infty, 0]$: u متناقصة تماما

• اذن g متزايدة تماما على $[1,5; +\infty[$

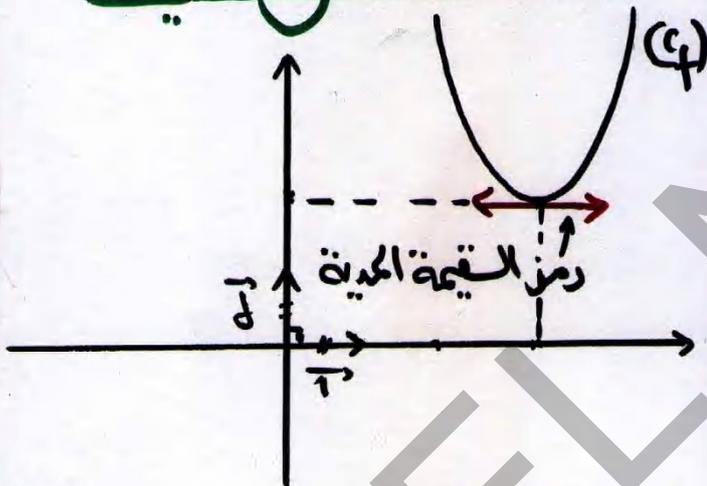
١٤ / ملاحظة جدول التغيرات

$$f(x) = x^2 + 2$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

f تقبل قيمة حدية صغرى هي 2 تبلغها من أجل $x=0$

ب / باستعمال التمثيل البياني:



f تقبل قيمة حدية صغرى 2 تبلغها من أجل $x=3$

ج / باستعمال قواعد الحساب في \mathbb{R} :

وذلك بعد اختيار الشكل المناسب لـ f

مثال: أثبت أن $f(x) = -x^2 - 4x + 1$ تقبل قيمة حدية يطلب تعيينها.

$$f(x) = -x^2 - 4x + 1$$

$$f(x) = -(x+2)^2 + 5$$

$$g(x) = \sqrt{-x+3}; \text{Dom} =]-\infty, 3] \quad (4)$$

$$g = u \circ v \quad \begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = -x+3 \end{cases}$$

• v متناقصة تماما على $]-\infty; 3]$

• اتجاه تغير u على المجال

$$v(]-\infty; 3]) = [v(3); v(-\infty)] = [0; +\infty[$$

على المجال $[0; +\infty[$: u متزايدة تماما

• اذن g متناقصة تماما على $]-\infty; 3]$

د / بدراسة إشارة الدالة المشتقة:

(Voir Apres)

N.B: قبل دراسة اتجاه التغير، ندرس 7/ القيم الحدية لدالة

f دالة معرفة على مجال I من \mathbb{R} .

• إذا كان من أجل كل x من I :

$$f(x) \leq f(a)$$

قيمة حدية عظمى $f(a) = \dots$

تبلغها من أجل $x=a$

• إذا كان من أجل كل x من I :

$$f(x) \geq f(a)$$

قيمة حدية صغرى $f(a) = \dots$

تبلغها من أجل $x=a$

(33)

أمثلة:

- ① $f(x) = x^2$, $D_f = \mathbb{R}$
- ② $f(x) = \frac{1}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^*$
- ③ $f(x) = |x| + 2$; $D_f = \mathbb{R}$
- ④ $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$; $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$
- ⑤ $f(x) = \sqrt{2 - |x|}$; $D_f = [-2; 2]$
- ⑥ $f(x) = x^2$; $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

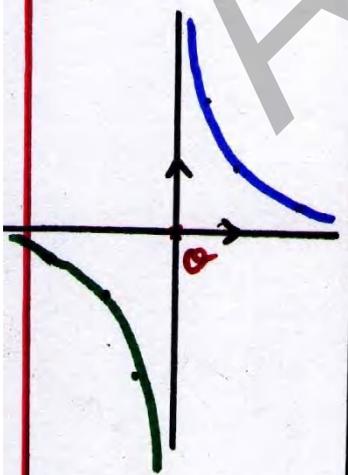
طبيعة الأسئلة:

- * ادرس شفعية f
- * بين ان f زوجية / فردية
- * بين ان $f(-x) + f(x) = 0$ ، ماذا تستنتج؟ ← فردية.
- * بين ان $f(-x) - f(x) = 0$ ، ماذا تستنتج؟ ← زوجية

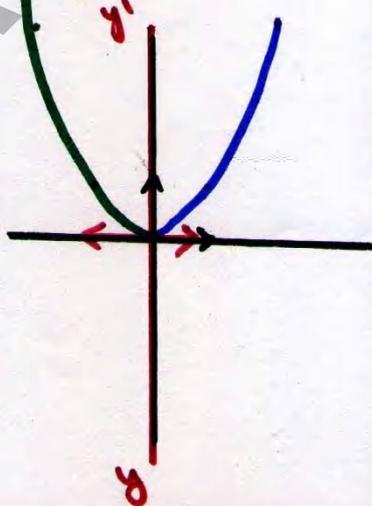
الحل

- | | |
|---------------|---------|
| ④ زوجية | ① زوجية |
| ⑤ زوجية | ② فردية |
| ⑥ / (لا توجد) | ③ زوجية |

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(x) = x^2$$



من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$(x+2)^2 \geq 0$$

$$-(x+2)^2 \leq 0$$

$$-(x+2)^2 + 5 \leq 5$$

$$f(x) \leq 5$$

اذ f تقبل قيمة حدية عظمى كتبلغها
من أجل $x = -2$

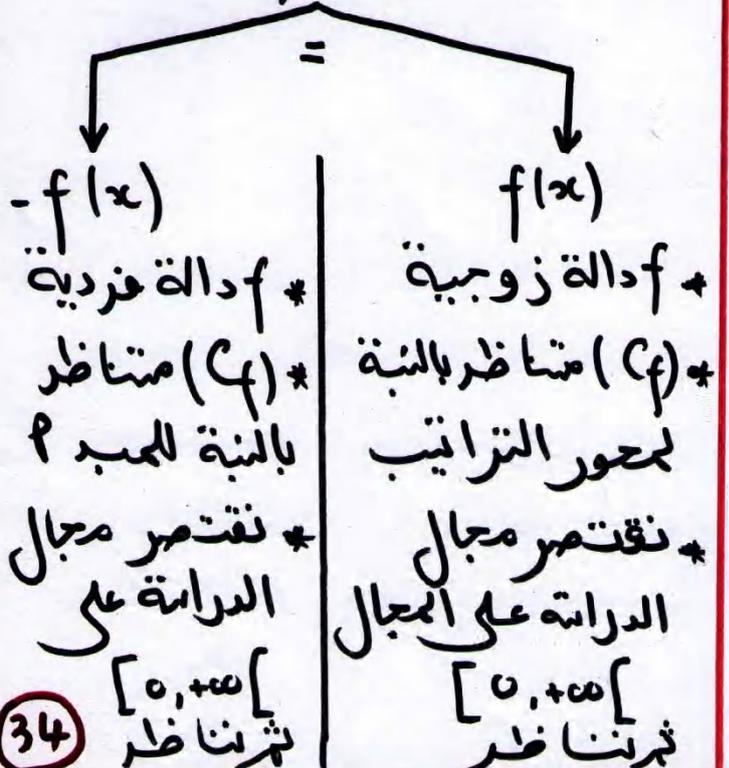
د/ باستعمال الدالة المشتقة

8/ دراسة شفعية دالة:

* f دالة معرفة على D_f

① D_f متناظر بالنبة والى الصفر
(لكل $x \in D_f$, يوجد $-x \in D_f$)

② نحسب $f(-x)$



(34)

9 / الدالة الدورية:

* دالة معرفة على D_f

* لا ثبات إذا الدالة f دورية ودورها T يكفي اثبات أن:

← من أجل كل x من D_f فإن $x+T$ ينتمي إلى D_f

$$f(x+T) = f(x)$$

* T يسمى دور الدالة f : أصغر عدد موجب يحقق الشروط السابقة.

* الاستعمال: نقدر دراسة الدالة f

على مجال طوله T ثم نشي (C_f)

وذلك بالقيام بالمنحنيات اشتغالها $(0, T)$ بينا وشمالا.

مثال

لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = \cos x$$

* اثبت أن f دالة دورية دورها 2π

* ادرس اتجاه تغير f على المجال $[-\pi; \pi]$

$[-\pi; \pi]$

* انشي (C_f) مع التوضيح.

الحل

اثبات أن دالة دورية:

$D_f = \mathbb{R}$, من أجل كل x من \mathbb{R} فإن $x+2\pi$ ينتمي إلى D_f

$$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi)$$

$$= \cos x$$

$$= f(x)$$

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

اذ f دالة دورية دورها 2π .

يمكن دراسة f على مجال طولها 2π

وليس $[-\pi; \pi]$

دراسة تنغية f :

* D_f متناظر بالنسبة لـ 0

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$$

f دالة زوجية.

اذ يمكن اقتصار المجال $[-\pi; \pi]$

بالمجال $[0; \pi]$

دراسة اتجاه تغير f على المجال $[0; \pi]$

$$\cos x_1 > \cos x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow$$

f متناقصة تماما على $[0; \pi]$

جدول تغيرات f :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x)$					

تنتج من تنغية الدالة

طريقة "دماير تغيير المعلم"

• تغيير المعلم من (x, y) الى (X, Y)

$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$$

• انصلا قاض عبارة $y = f(x)$

بتعويض x بقيمة y وبقيته

نجد عبارة Y بدلالة X

$$Y = g(X)$$

• نبين ان g حالة زوجية.

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

اثبت ان (f) يقبل محور تناظر $x = -2$.

طريقة ①:

لكل x من $D_f = \mathbb{R}$ ، $(2d-x) \in D_f$ فان $(2d-x) \in D_f$

قبل اجراء الحسابات، نغير شكل $f(x)$

$$f(x) = (x+2)^2 - 1$$

$$f(2d-x) = f(-4-x)$$

$$= [-4-x+2]^2 - 1$$

$$= (-x-2)^2 - 1$$

$$= (x+2)^2 - 1 = f(x)$$

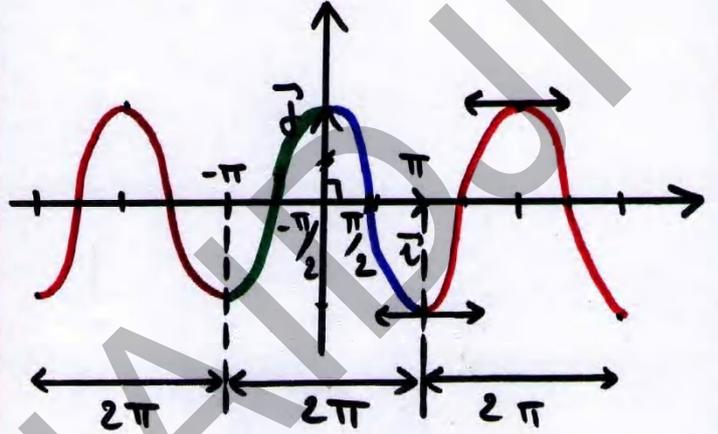
انشاء (C_f) :

• باستعمال جدول التغيرات، انشاء (C_f)

على المجال $[0, \pi]$

• نناظر بالنسبة لمحور الترتيب

• لنجد (C_f) يمينا و شمالا بالشعاع $(\frac{2\pi}{0})$



10 / محور التناظر:

اثبت ان $x = a$: (f) محور تناظر

• $(C_f) \Leftarrow 3$ طرق

طريقة ①:

• لكل x من D_f فان $(2d-x) \in D_f$

$$f(2d-x) = f(x)$$

طريقة ②:

• لكل $d-x$ من D_f فان $(d+x) \in D_f$

$$f(d-x) = f(d+x)$$

طريقة ②:

* $D_f = \mathbb{R}$ بمعنى لكل $x - 2$ من D_f
فإن $-x - 2$ ينتمي لـ D_f

• اثبات ان $f(-2+x) = f(-2-x)$

$$f(-2+x) = (-2+x+2)^2 - 1$$
$$= x^2 - 1$$

$$f(-2-x) = (-2-x+2)^2 - 1$$
$$= (-x)^2 - 1$$
$$= x^2 - 1$$

اذن $f(-2+x) = f(-2-x)$

و $y=2$ محور تناظر لـ (f)

طريقة ③:

• تغيير المعام

$$\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y \end{cases}$$

$$y = x^2 + 4x + 3$$

$$Y = (X-2)^2 + 4(X-2) + 3$$

$$Y = X^2 + 4 - 4X + 4X - 8 + 3$$

$$Y = X^2 - 1$$

$$g(X) = X^2 - 1$$

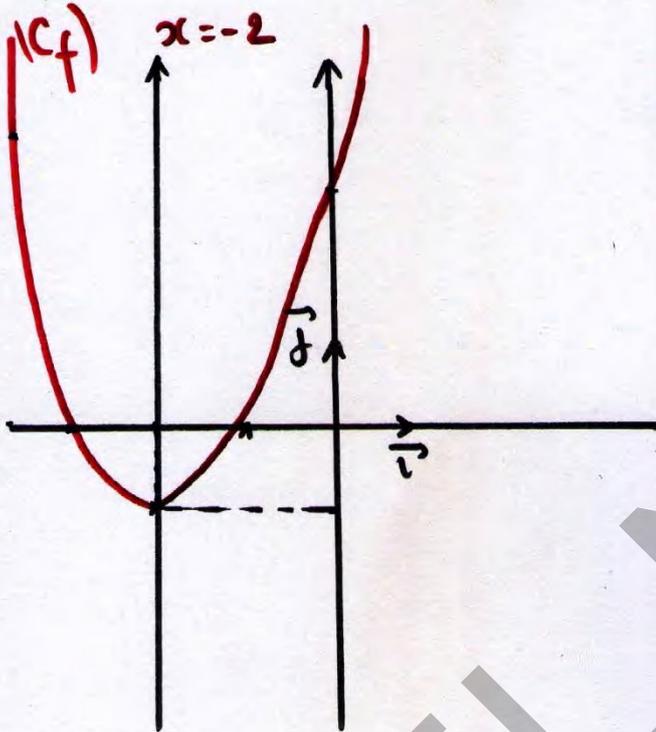
نبين ان زوجية

$D_g = \mathbb{R}$ متناظر بالنسبة لـ

$$g(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = g(x)$$

g دالة زوجية

• محور تناظر لـ (Cf) اذن $y=-2$ (D)



ملاحظة:

f دالة معرفة على \mathbb{R} تحقق

$$f(4-x) = f(x)$$

29

ماذا نستنتج؟

نستنتج ان المستقيم $x=2$ (D)
محور تناظر لـ (Cf)

11 / مركز تناظر: طريقة 1

اثبت ان النقطة $\omega(a, \beta)$
مركز تناظر (C_f) $\Leftrightarrow 3$ طرق

طريقة 1

لكل x من D_f فان $(2a-x) \in D_f$

$$f(2a-x) + f(x) = 2\beta$$

طريقة 2

لكل $a-x$ من D_f فان $(a+x) \in D_f$

$$f(a-x) + f(a+x) = 2\beta$$

طريقة 3 "تغيير المتغير"

تغيير المتغير من (x, y) الى (X, Y)

$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

ازطلا قامنا عبارة $y = f(x)$ بالفرض
 x و y بقيمتيهما

نجد عبارة Y بدلالة X ثر نبين

ان g هي دالة
عكسية $g(x) = y$

مثال

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$$

اثبت ان $\omega(-1; 1)$ مركز تناظر (C_f)

طريقة 1

لا ثبات انه مزاجل كل x من D_f
فان $-2-x$ ينتمي لـ D_f .

نتعمل البرهان بالعكس النقيض للاسئلة

$$P \Rightarrow Q \text{ معناه } \overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$$

لكل P و Q ميث

$$P: -2-x \notin D_f$$

$$Q: x \notin D_f$$

P محققة، معناه $-2+x \notin D_f$

$$\Leftrightarrow (-2-x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

$$\Leftrightarrow x \notin D_f$$

$$\Leftrightarrow Q \text{ محققة}$$

$$P \Rightarrow Q \text{ معناه } \overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$$

أي

$$x \in D_f \text{ يتلزم } -2-x \in D_f$$

وهذا هو المطلوب.

نثبت الآن:

$$f(-2-x) + f(x) = 2 \quad ??$$

$$f(-2-x) + f(x) =$$

$$= 1 + \frac{1}{-2-x+1} + 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$= 2 + \frac{1}{-x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$= 2 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 2$$

$$f(-2-x) + f(x) = 2$$

اذن $\omega(-1;1)$ مركز تناظر لـ (f)

طريقة ②:

لكل x من D_f فان $-2-x$ من D_f

• نبين ان $f(-2-x) + f(-1+x) = 2$

$$f(-1-x) + f(1+x) =$$

$$= 1 + \frac{1}{-1-x+1} + 1 + \frac{1}{-1+x+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{x} = 2$$

$$f(-1-x) + f(-1+x) = 2$$

اذن $\omega(-1;1)$ مركز تناظر لـ (f)

طريقة ③:

تغيير المتعلم

$$\begin{cases} x = X-1 \\ y = Y+1 \end{cases}$$

$$Y = 1 + \frac{1}{X+1}$$

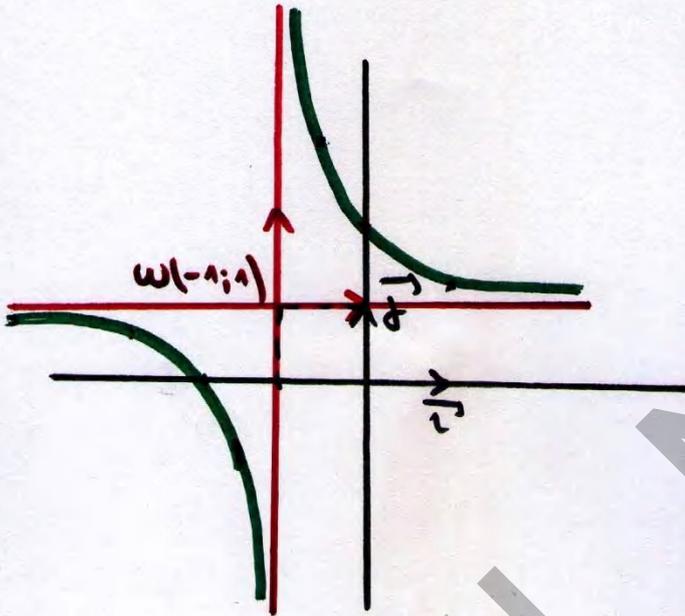
$$Y+1 = 1 + \frac{1}{X-X+X}$$

$$Y = \frac{1}{X}$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

g دالة فردية

اذن $\omega(-1;1)$ مركز تناظر لـ (f)



ملاحظة:

$$f(\underbrace{-1-x}_{\alpha}) + f(\underbrace{-1+x}_{\alpha}) = \underbrace{2}_{2\beta}$$

$$f(\underbrace{-2-x}_{2\alpha}) + f(\underbrace{x}_{2\beta}) = 2$$

ماذا تنتج؟

النقطة $(-\frac{2}{2}; \frac{2}{2})$ أي $\omega(-1;1)$ مركز تناظر لـ (f)

ج / تقاطع (C_f) مع (C_g) :

* نحل المعادلة $f(x) = g(x)$
* نجد قيم x الممكنة

- لايجاد y نعوض في أي من العبارتين

د / تقاطع (C_f) مع (D) : $y = ax + b$

* نحل المعادلة $f(x) = ax + b$
* نجد قيم x الممكنة

- لايجاد y نعوض في أي من العبارتين

13 / إشارة دالة:

أ / حسابياً:

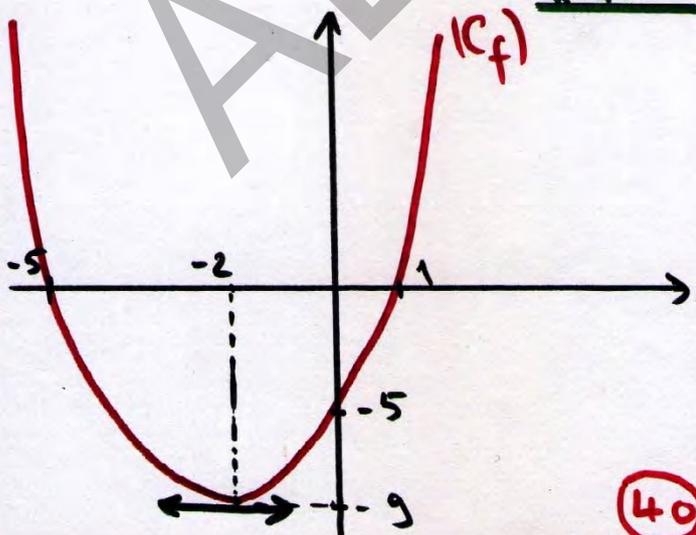
حل متراجعات $f(x) < 0 / f(x) > 0$

مثال:

$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

ب / بيانياً:



(40)

12 / انقط التقاطع مع (xx) و (yy) :

أ / تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

* نحل المعادلة $f(x) = 0$ ثم نتأكد من الطول تنتمي إلى D_f

مثال:

$$D_f = \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ معناه } f(x) = 0$$

(C_f) يقطع (xx) في نقطتين

$$(\sqrt{2}; 0) / (-\sqrt{2}; 0)$$

* باستعمال نظرية القيمة المتوسطة (Voir Apres)

ب / تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب:

* نقطة واحدة على الأكثر $(0; f(0))$

مثال:

$$D_f = \mathbb{R}; f(x) = x^2 - 2$$

$$f(0) = -2$$

(C_f) يقطع (yy) في النقطة

$$(0; -2)$$

$$(f) \text{ افوق } (xx) \Leftrightarrow f(x) > 0$$

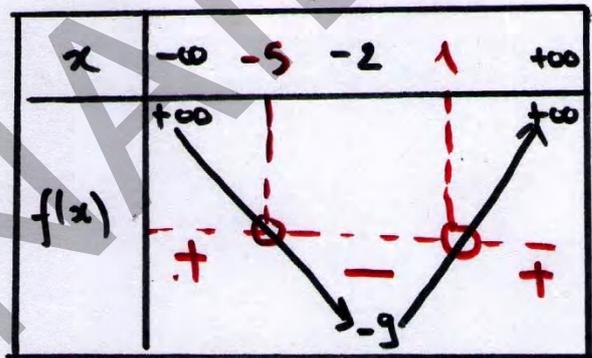
$$(f) \text{ اتحت } (xx) \Leftrightarrow f(x) < 0$$

$$(f) \text{ يقطع } (xx) \Leftrightarrow f(x) = 0$$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$	
$f(x)$	+		-		+

ج اباستعمال جدول التغيرات:

جدول تغيرات f :



استنتاج جدول اشارة f

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$	
$f(x)$	+		-		+

الدوال المبرمجية

1/ الدالة مربع: $f(x) = x^2$

← مجموعة التعريف: $D_f = \mathbb{R}$

← اتجاه التغير: $]-\infty, 0]$: متناقصة تماما

$[0, +\infty[$: متزايدة تماما

← قيمة حدية معين: 0 تبلغها f مزاجل $x = 0$

← شفعية الدالة: زوجية:

← محور التناظر: محور الترتيب

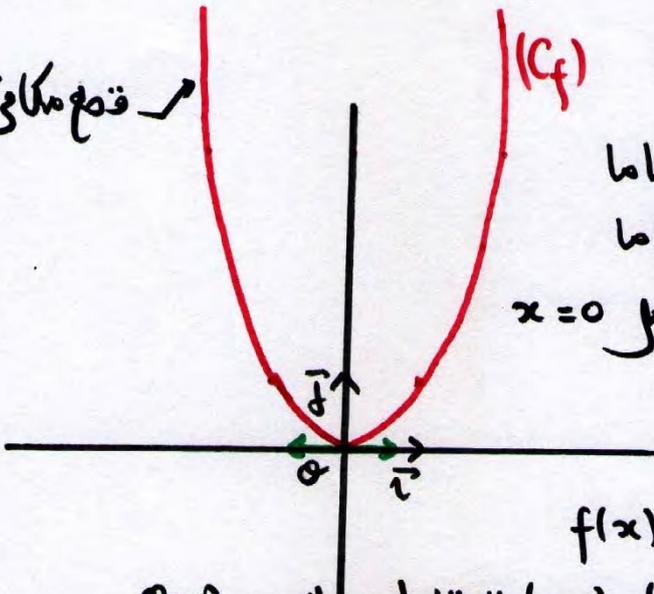
← اشارة الدالة: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$

← التقاطع مع المحاور: $(0, 0)$, (x, x) , (y, y) تتقاطع في المبدأ \varnothing

← جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

مر قطع مكافئ



2/ الدالة مقلوب: $f(x) = \frac{1}{x}$

← مجموعة التعريف: $D_f = \mathbb{R}^*$

← اتجاه التغير: $]-\infty, 0[$: متناقصة تماما

$]0, +\infty[$: متناقصة تماما

← شفعية الدالة: فردية

← مركز التناظر: المبدأ $\varnothing(0,0)$

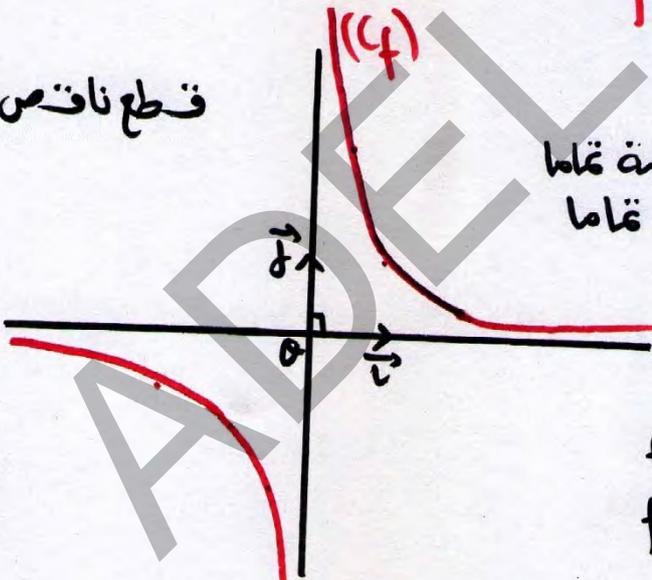
← اشارة الدالة: $x < 0 : f(x) < 0$

$x > 0 : f(x) > 0$

← جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$	0

قطع ناقص



3/ الدالة الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{x}$

← مجموعة التعريف: $D_f = [0, +\infty[$

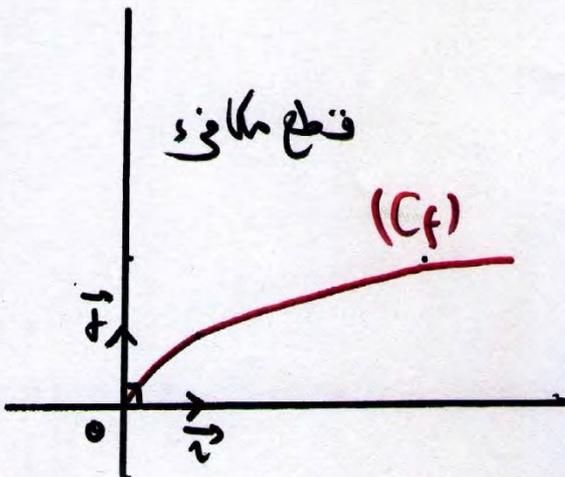
← اتجاه التغير: متزايدة تماما

← إشارة الدالة: $\forall x \geq 0 : f(x) \geq 0$

← التقاطع مع المحاور: $(0,0)$, (x,x) , (C_f)
تقاطع في \emptyset .

← جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$



4/ الدالة قيمة مطلقة: $f(x) = |x|$

← مجموعة التعريف: $D_f = \mathbb{R}$

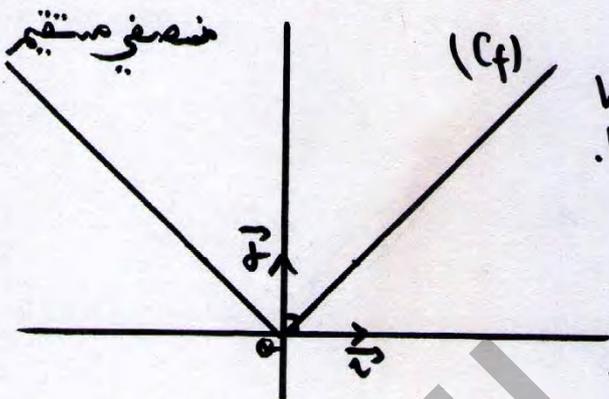
← اتجاه التغير: $]-\infty, 0]$: متناقصة تماما
 $[0, +\infty[$: متزايدة تماما.

← شفعية الدالة: زوجية

← محور التناظر: محور الترتيب

← إشارة الدالة: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$

← التقاطع مع المحاور: (y,y) , (x,x) , (C_f) تقاطع في \emptyset .



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

← جدول التغيرات:

5/ الدالة مكعب $f(x) = x^3$

← مجموعة التعريف: $D_f = \mathbb{R}$

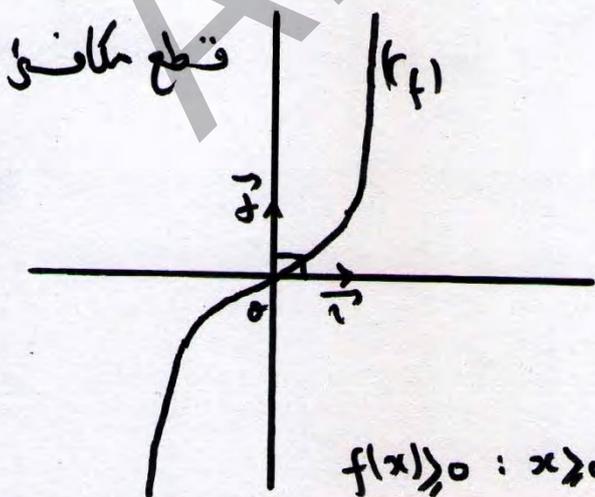
← اتجاه التغير: متزايدة تماما.

← نقطة انعطاف: المكعب $(0,0)$

← شفعية الدالة: فردية

← مركز التناظر: المكعب $(0,0)$

← إشارة الدالة: $x < 0 : f(x) < 0$ / $x \geq 0 : f(x) \geq 0$



التقاطع مع المحاور: (C_f) , (x, x) , (y, y) تتقاطع في المبدأ ٢.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

١/٦ الحالة التآلفية $f(x) = y = ax + b$

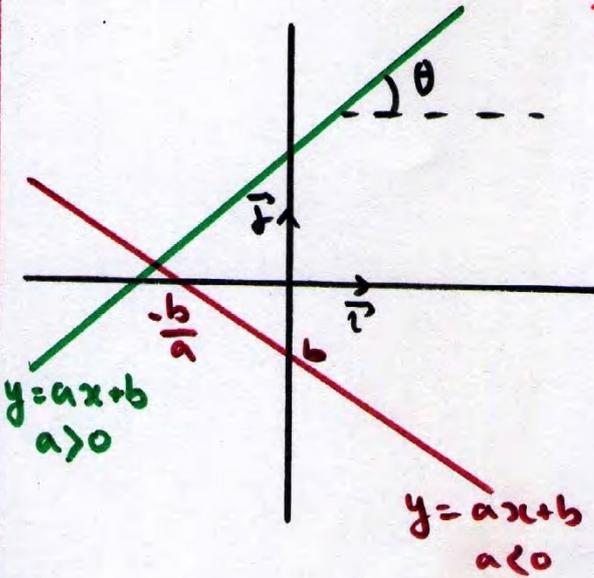
مجموعة التعريف $D_f = \mathbb{R}$

اتجاه التغير: $a = \text{tg } \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a > 0$: دالة متزايدة قاما

$a < 0$: دالة متناقصة قاما

$a = 0$: دالة ثابتة



x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	نفس إشارة a		عكس إشارة a

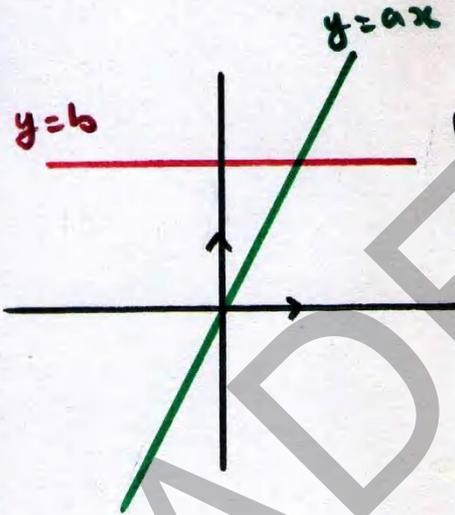
إشارة الدالة: $a \neq 0$

$a = 0$: $f(x) = b$ إما دوماً \oplus دوماً \ominus

$$(C_f) \cap (x, x) = \left\{ \left(-\frac{b}{a}, 0 \right) \right\}$$

$$(C_f) \cap (y, y) = \{ (0, b) \}$$

التقاطع مع المحاور:



حالات خاصة:

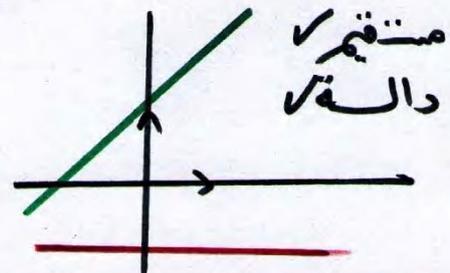
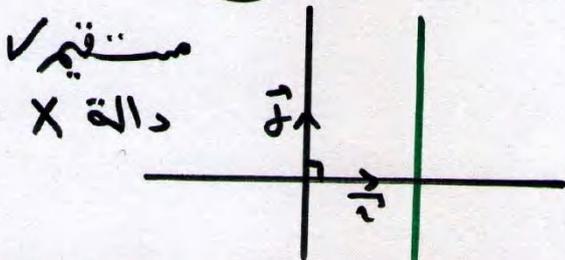
$b = 0$: (C_f) يمر بالمبدأ ٢.

$a = 0$: (C_f) مستقيم يوازي محور الفواصل.

ملاحظة:

كل دالة تآلفية تمثل مستقيم لكل ليس كل مستقيم هو تمثيل بياني لدالة.

$x = a$: (D) مستقيم يوازي محور الفواصل لا يمكن أن يمثل دالة



النهجيات

ADEL MAJIDI

النهايات

٢/ عمليات على النهايات:

نهاية مجموع دالتين:

f	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	a	$+\infty$
g	$+\infty$	a	$-\infty$	a	a'	$-\infty$
f+g	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$a+a'$	ح.ع.ت

نهاية جداء دالتين:

f	∞	∞	a	∞
g	∞	$a \neq 0$	a'	0
f.g	∞ (الاشارة)	∞ (الاشارة)	$a \cdot a'$	ح.ع.ت

نهاية حاصل قسمة:

f	∞	$a \neq 0$	$a \neq 0$	∞
g	$a \neq 0$	∞	$a' \neq 0$	∞
f/g	∞ (الاشارة)	0 (الاشارة)	$\frac{a}{a'}$	ح.ع.ت

f	∞	0	$a \neq 0$	0	0
g	0	∞	0	$a \neq 0$	0
f/g	∞ (الاشارة)	0 (الاشارة)	∞ (الاشارة)	0	ح.ع.ت

١/ مفهوم النهاية:

* x يؤدل بالرقم 2 (x ينتهي عند 2) معناه x يأخذ قيم مجاورة جد العدد 2

$$\begin{cases} x = 2 + \epsilon \\ x = 2 - \epsilon \end{cases}, \epsilon \rightarrow 0^+$$

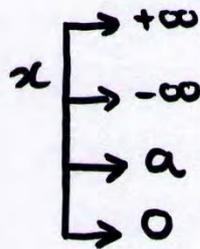
• نكتب $x \rightarrow 2$ ونميز حالتين
 $\leftarrow x \rightarrow 2^+ \right.$ اليمين أي $x = 2 + \epsilon$
 $\leftarrow x \rightarrow 2^- \right.$ اليسار أي $x = 2 - \epsilon$

• مثال: $f(x) = \frac{x+4}{x+2}$

لما $x \rightarrow 2$ فإن $f(x) \rightarrow \frac{3}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{3}{2}$$

نكتب



7 • في نهاية حامل قسمة، 0 قد يكون 0^+ أو 0^- لذا يجب تحديد اشرته أثناء الدراسة.

8 • وإذا قبلت دالة نهاية فهي

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

9 • في بعض الأحيان f لا تقبل نهاية:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leftarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x / \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x \leftarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1)^x \leftarrow$$

أمثلة:

احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 3) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x + \sqrt{2}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x + \sqrt{2}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2(x+3)^2 = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3)^2 = +\infty$$

$$(+\infty)^n \rightarrow +\infty$$

$$(-\infty)^n$$

$$\sqrt{+\infty} \rightarrow +\infty$$

$$\sqrt{-\infty} \times$$

$$n = 2k + 1$$

$$(-\infty)$$

$$n = 2k$$

$$(+\infty)$$

3 قواعد هامة:

$$1 \bullet \lim_{x \rightarrow a} (k) = k$$

$$2 \bullet \lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$3 \bullet \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

4 • يجب التخلص من رمز () ثم فصل العمليات

$$5 \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

* a لا يمثل حده من حدود D_f المفتوحة
* f لا تتغير عبارتها عند a

6 • أثناء دراسة دالة، نحسب النهايات بصفة عامة عند حدود D_f المفتوحة

مثال $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

يجب حساب 4 نهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

مثال 0:

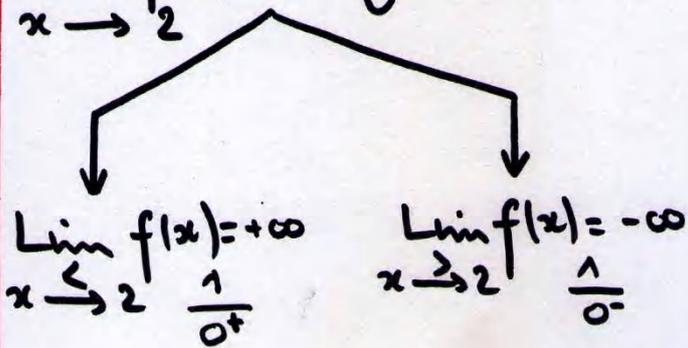
$$f(x) = \frac{1}{-x+2}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{0} = \infty$$



إشارة المقام (0)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
-x+2		+ 0 ⁺ / 0 ⁻	-

ملاحظة:

قيم أصغر لا تعني 0⁻

قيم أكبر لا تعني 0⁺

يجب وضع جدول الإشارة لمعرفة إشارة 0

14 متى ندرج بالدراسة $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

و $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

← a يمثل حدا من حدود D_f المفتوحة
 ← f تغير عبارتها عند a
 ← في حالة وجود قيمة مطلقة وبعد التخلص منها.

* نحسب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l'$

← إذا كان $l = l'$ فإن f تقبل نهاية عند a ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

← إذا كان $l \neq l'$ فإن f لا تقبل نهاية عند a، بل تقبل نهاية على yمين a ونهاية أخرى على يساره ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l'$$

ملاحظة:

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ندرس فقط $a \in]0, +\infty[$

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ندرس فقط $a \in]-\infty, 0[$

5 / طرق ازالة ح.ع.ت :

4 حالات عت	
$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$
$0 \times \infty$	$+\infty - \infty$



4 / دالة كثير حدود

$$f(x) = 2x^2 - x + 3$$

$$g(x) = (2x+3)(x^2-1)$$

احسب نهايات f و g عند $2, +\infty, -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{عند عدد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 21$$

عند ∞ :

نهاية دالة كثير حدود عند ∞ هي
نهاية الحد الاعلى درجة عند ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2) = +\infty$$

مثال 2:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} &]-\infty, 0[\\ f(x) = 2x & [0, +\infty[\end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

مثال 3:

$$f(x) = |2x+2|$$

$$\begin{cases} f(x) = -2x-2 &]-\infty, -1[\\ f(x) = 2x+2 & [-1, +\infty[\end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{عبارة 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{عبارة 2}$$

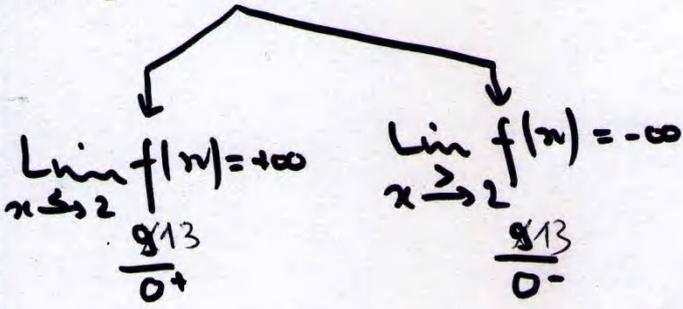
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 \quad \text{عبارة 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 \quad \text{عبارة 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \quad \text{عبارة 2}$$

عند ∞ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{9}{0} = \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \quad \frac{0}{0} \text{ حلت}$$

* يجب اظهار (x-1) في كل من البسط والمقام بتجليلهما باحدى الطرق الثلاث ثم الاختزال

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2-3x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2-3x-3} = \frac{-3}{5}$$

ج/ دالة صماء خفية

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x+2} + 2x - 3$$

$$g(x) = \sqrt{4x^2-4} - 2x + 3$$

- * $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ احسب
- * $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- * $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- * $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$$

ب/ دالة ناطقة

$$f(x) = \frac{x^2+4x+1}{-x+2}$$

$$g(x) = \frac{x^2+x-2}{x^3-4x^2+3}$$

احسب نهاية f و g عند $+\infty$, $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

عند ∞ :

* نهاية دالة ناطقة عند ∞ هي نهاية الحد الأعلى درجة على الحد الأعلى درجة (بعد الاختزال) عند ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{-x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 - \frac{3}{x} - \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} \right)$$

$2 - 1 = 1$

$$= -\infty$$

* طريقة المرافق:

$$g(x) = \sqrt{4x^2 - 4} - 2x + 3$$

$$(x \rightarrow +\infty) \sqrt{4x^2} = 2x \quad - 2x$$

$$2x - 2x = 0$$

← نتعمل طريقة المرافق كما يلي

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 4} - (2x - 3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 4} - 2x + 3)(\sqrt{4x^2 - 4} + 2x - 3)}{\sqrt{4x^2 - 4} + 2x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4 - (2x - 3)^2}{\sqrt{4x^2 - 4} + 2x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x - 13}{\sqrt{4x^2 - 4} + 2x - 3}$$

نطبق طريقة التحليل والاختزال

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(12 - \frac{13}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{4 - \frac{4}{x^2}} + 2 - \frac{3}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 - \frac{13}{x}}{\sqrt{4 - \frac{4}{x^2}} + 2 - \frac{3}{x}} = \frac{12}{4}$$

$2 + 2 = 4$

$$= 3$$

(50)

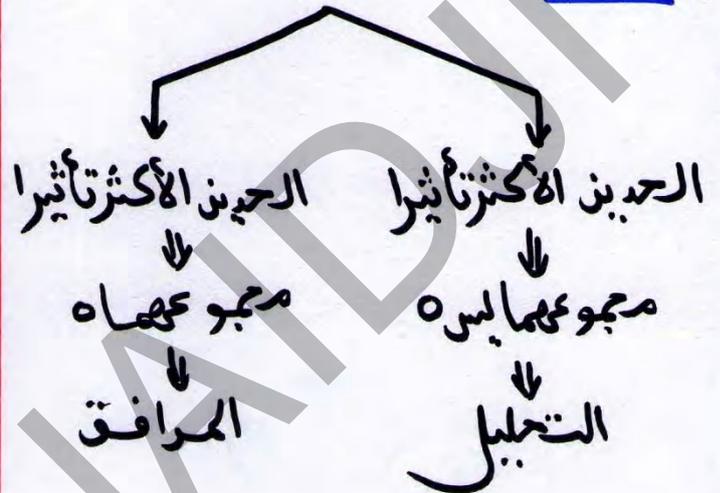
عنده :

نعوض

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt{2} - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2\sqrt{3} - 1$$

عند ∞ :



* طريقة التحليل

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 2x - 3$$

$$(x \rightarrow -\infty) \sqrt{x^2} = |x| = -x \quad 2x$$

$$-x + 2x \neq 0$$

← نتعمل التحليل كما يلي

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 2x - 3$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} + x \left(2 - \frac{3}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + x \left(2 - \frac{3}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + x \left(2 - \frac{3}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4} + 2)}$$

نختزل $x-d$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

طريقة العدد المشتق:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = h'(0)$$

$$h(x) = \sqrt{x+4} \quad \text{حيث}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{0+4}} = \frac{1}{4} \quad \text{منه}$$

عند 00:

طريقة التحليل:

نتخرج الحد الأكثر تأثيرا في البسط كعامل مشترك وكذلك في المقام ثم نختزل

$$\text{NB: } x \rightarrow +\infty \quad |x| = x$$

$$x \rightarrow -\infty \quad |x| = -x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty}$$

$$= 0$$

دالة كسرية

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

$$g(x) = \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 + 3x + 4} - 2}$$

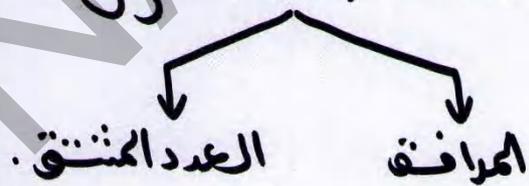
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{احسب}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

عند 00:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0} \quad \text{حالات}$$

يجب اظهار $(x-d)$ في كل من البسط والمقام ثم الاختزال



طريقة المرافقة:

$$\sqrt{A} - B \quad \text{مرافقه } \sqrt{A} + B$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} \quad \text{مرافقه } \sqrt{A} - \sqrt{B}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2) \cdot (\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 4 - 4}{x(\sqrt{x+4} + 2)}$$

مثال: احسب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\frac{1}{x} > 0 \quad x > 0 \quad x \rightarrow +\infty$$

نضرب في $\frac{1}{x}$ ونحافظ على اتجاه المتراجحة

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad \text{اذن}$$

باستعمال العدد المشتق

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \text{احسب}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \frac{(\sin x)'}{x=0} = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

نهايات ثهيرة:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 + 3x - 4} - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 - \frac{2}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} - \frac{2}{x}\right)}$$

$$= 2$$

طريقة المرافق:
تصلح أحيانا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = 0$$

دالة مثالية:

مبرهنات الحصر والمقارنة:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{اذا كان}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{فإن}$$

$$\lim f(x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim g(x) = +\infty \end{cases} \quad (2)$$

$$\lim f(x) = -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim g(x) = -\infty \end{cases} \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\pi - 2t - \pi) \tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} -2t \tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} -2t \frac{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} -2t \frac{\cos t}{-\sin t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} 2 \cos t \cdot \frac{1}{\frac{\sin t}{t}}$$

$$= 2$$

• بالاستعمال العدد المشتق مرتين:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{2 \cos x - 1} \quad \text{احسب}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{(\sin 3x)' - 0}{(2 \cos x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3 \cos 3x}{-2 \sin x}$$

$$= \frac{3 \cos 3x}{-2 \sin x} \Big|_{x = \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{3 \times -1}{-2 \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$$

• ملاحظة:

في النهايات، بصيغة عامة باستعمال الآلة الحاسبة، يمكن تخمين النهاية

(53)

• تبديل المتغير:

• تبديل المتغير وارجاء بيء اوله
• الضرب و القمة في اعداد كاظهار
• نهايات ثيرة.

أمثلة:

① احسب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \times 2x}{\sqrt{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \times 2x}{\sqrt{2} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} \times \left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \times 2x}{\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right) \times \frac{x \sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{2}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \tan x \quad \text{احسب ②}$$

$$\left(x = t + \frac{\pi}{2}\right) \quad t = x - \frac{\pi}{2} \quad \text{نضع}$$

$$t \rightarrow 0$$

وا طريقة لوبيتال

hors programme

C'est pour verifier...

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad * \text{ إذا كان}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{ح.ع.ت}$$

بتطبيق طريقة لوبيتال نجد

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{g'(a)}{h'(a)}$$

* تتصلع في جميع ح.ع.ت سواء دالة
ناطقة، كسرية، مثلثية...

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 4x^2 + 3} = \left(\frac{2x + 1}{3x^2 - 8x} \right)_{x=1}$$
$$= \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}} \right)_{x=0}$$
$$= \frac{1}{4}$$

السلوك التقاربي

لمنحن دالة

د/ الوضع النبي:

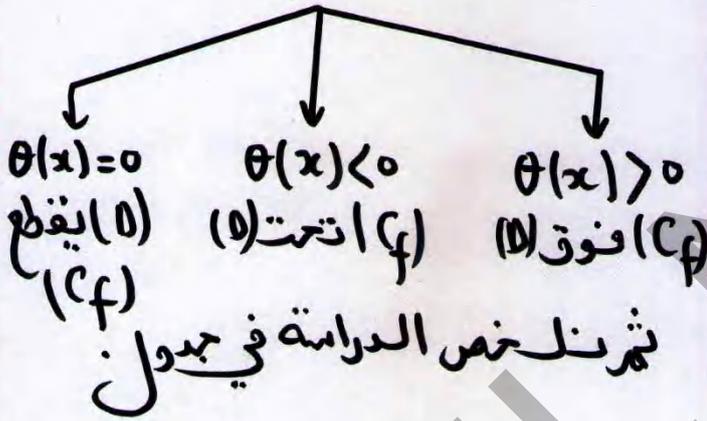
* المستقيم المقارب العمودي لا يقطع
أبداً (Cf)

* المستقيم المقارب الأفقي والمائل
يمكن أن يقطعا (Cf) ← وضع نبي

* لدراسته الوضع النبي بين (Cf) و (D)
حيث $y = ax + b$: (D)، ندرس إشارة

الفرق $\theta(x) = f(x) - y$

$\theta(x) = f(x) - (ax + b)$



هـ/ أمثلة:

* احسب النهايات، فسريانيا، ارم (Cf)
والمستقيمات المقاربة في كل حالة:

$f(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$ / $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$

$f(x) = 2x + 8 + \frac{1}{x}$ + الوضع النبي

$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 2}{2x - 1}$ + الوضع النبي

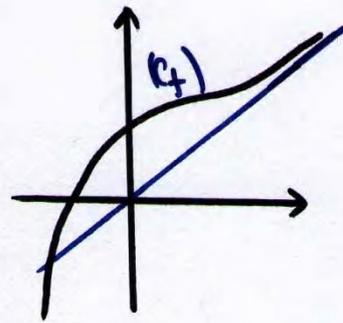
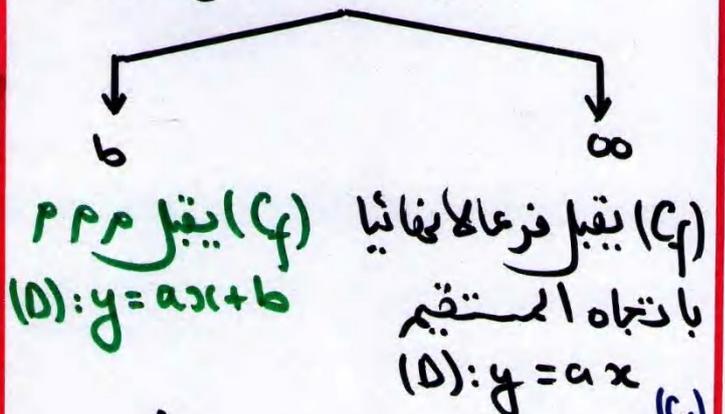
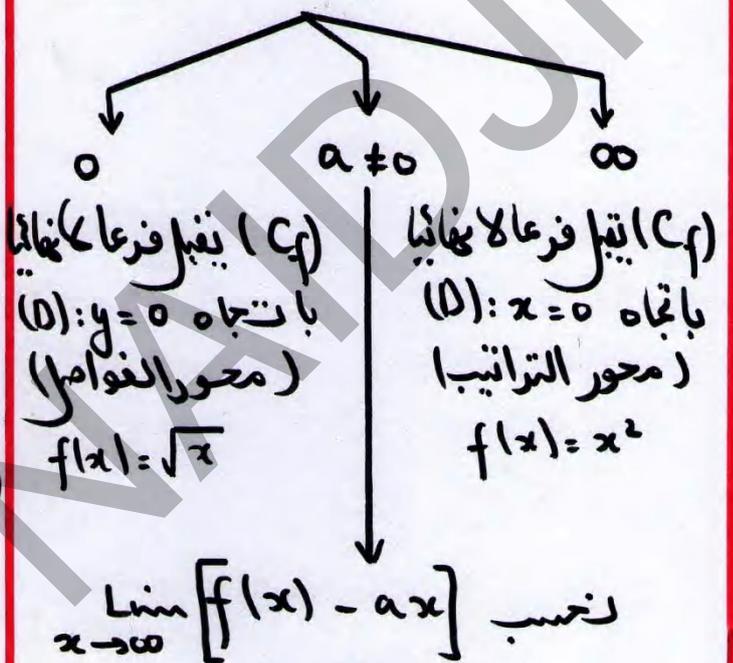
$f(x) = \sqrt{x}$ / $f(x) = x^2$

البحث عن مم م باستعمال الفروع اللانهاية

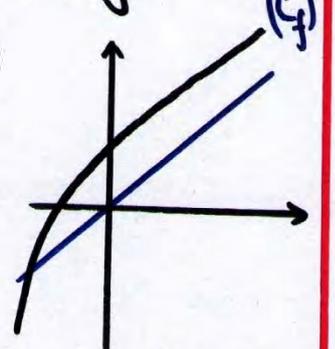
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

احتمال وجود مم م

نحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right]$



مم مائل

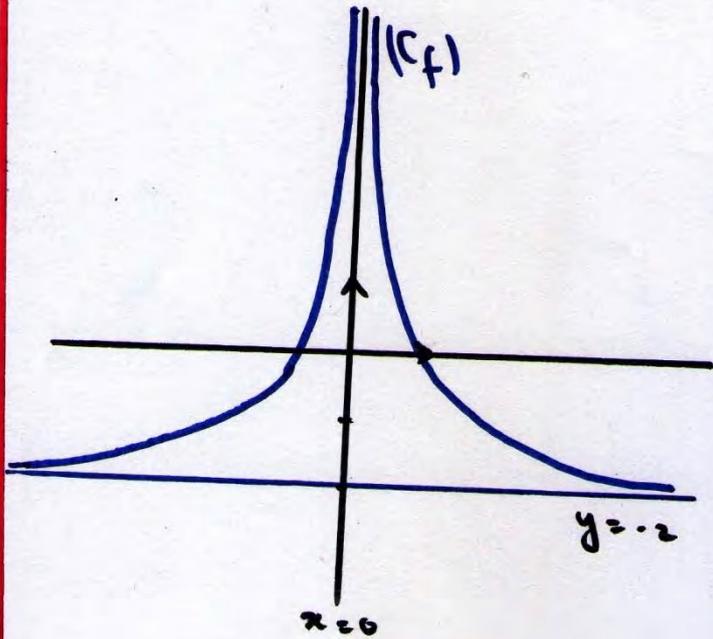


فروع لانهاية

مثال ②: $f(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$

المستقيمان المقاربة معادلاتهما

$y = -2$ / $x = 0$



مثال ③: $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x}$

$x = 0$

نختار $z = ax + b$ (د) م م ل (ف) (f)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

الوضع التبيني: $\theta(x) = f(x) - y = \frac{1}{x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\theta(x)$	-		+
الوضع التبيني	(ف) تحت (د)		(ف) فوق (د)

مثال ①: $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$

$f(x) = 2 + \frac{1}{x}$

$D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ (ف) يقبل م م

يوأزي محور الفواصل عند $y = 2$ معادلته

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ (ف) يقبل م م يوأزي

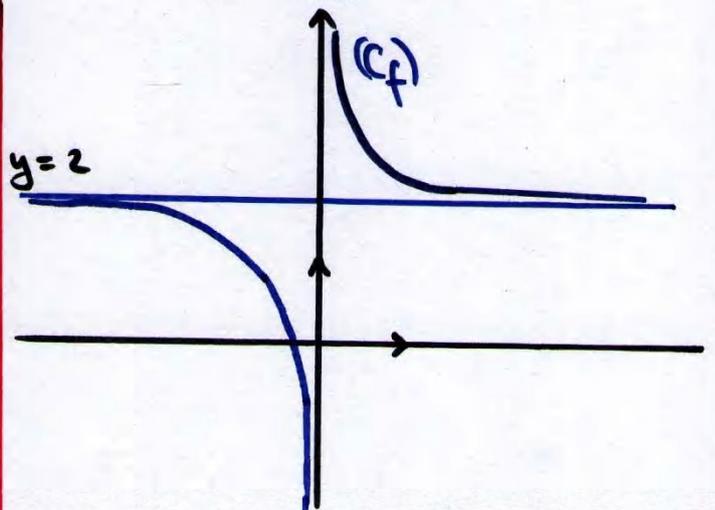
محور الفواصل عند $y = 2$ معادلته

③ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ (ف) يقبل م م

يوأزي محور الفواصل عند $x = 0$ معادلته

④ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ (ف) يقبل م م

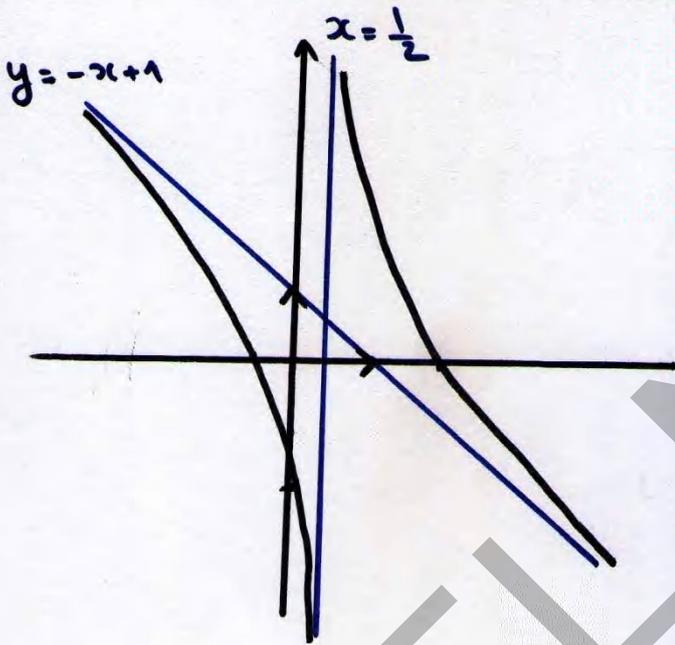
يوأزي محور الفواصل عند $x = 0$ معادلته (حامل محور الفواصل)



الوضع النقيض

$$\theta(x) = f(x) - (-x+1) = \frac{3}{2x-1}$$

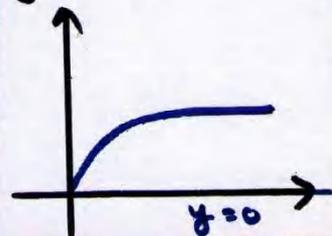
x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
العلامة	-		+
الوضع النقيض	(f) انتمت (ك)		(f) افوق (ك)



مثال 5) $f(x) = \sqrt{x}$

$D_f = [0; +\infty[$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 احتمال وجود م م م

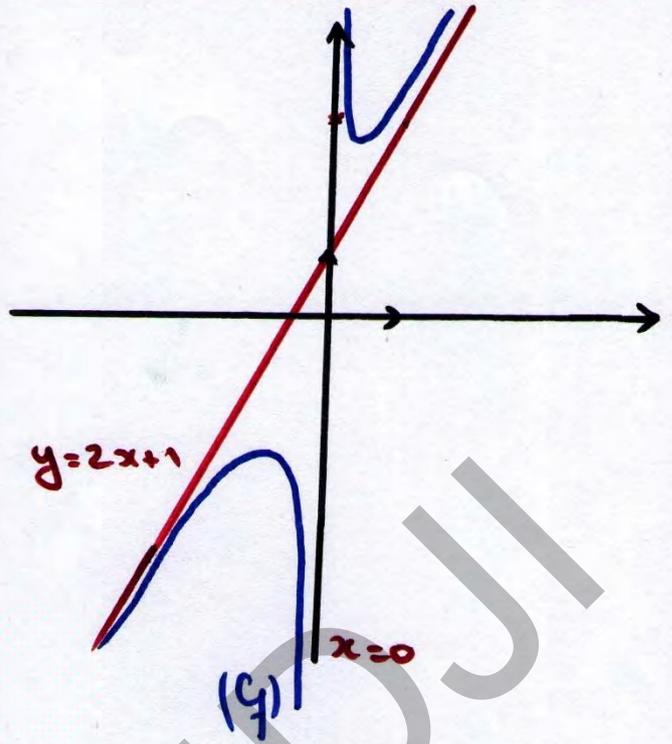
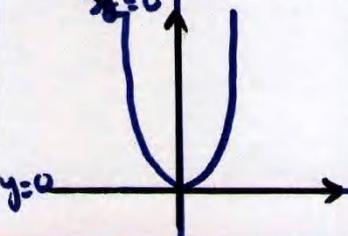
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
 (f) يقبل فرعا لا نهائييا
 عند $y=0$ باقى م م م



مثال 6) $f(x) = x^2$

$D_f =]-\infty; +\infty[$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
 احتمال وجود م م م

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$
 (f) يقبل فرعا لا نهائييا
 عند $x=0$ باقى م م م



مثال 3) $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 2}{2x - 1}$

$D_f =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$

$x = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

احتمال وجود م م م

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 2}{2x - 1} = 1$

اذ $y = -x + 1$ (D) م م م ل (f)
 عند $+\infty$ و $-\infty$

1/ استخراج مرم انطلاقاً من آخر
باستعمال شعبة دالة

$$f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right); D_f = \mathbb{R}$$

1. تأكد ان $(d): y = x+1$ مرم (C_f) عند $+\infty$

2. استخراج دوز حساب ان (C_f) يقبل مرم (d') عند $-\infty$. يطلب تعيين معادلتها.

الحل
1. نبين ان $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$

2/ استخراج (d')

نلاحظ ان f دالة فردية

نضع $t = -x$ (معناه $x \rightarrow +\infty$ معناه $t \rightarrow -\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x - 1] = 0$$

بما ان فردية $f(x) = -f(-x)$

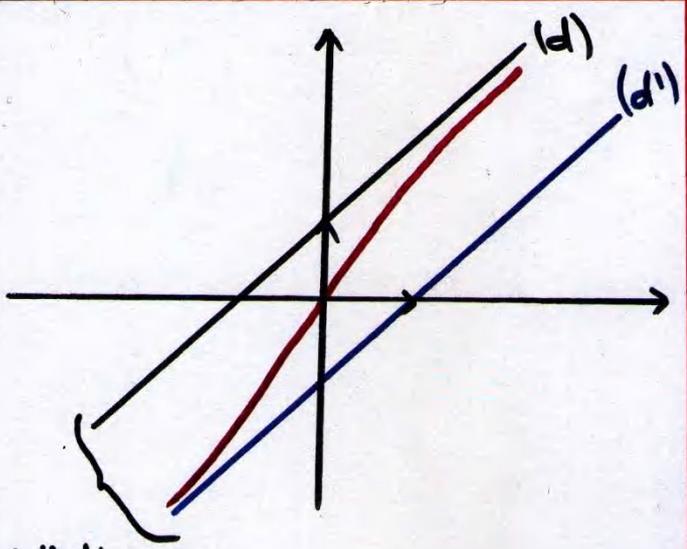
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [-f(-x) - x - 1] = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} [-f(t) + t - 1] = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} [f(t) - t + 1] = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} [f(t) - (t-1)] = 0$$

اذن $(d'): y = x - 1$



تناظر بالنسبة لـ θ

2/ المنحنيات المقاربة:

بين ان منحنى الدالة g منحنى مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$!

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

تفسير بياني:

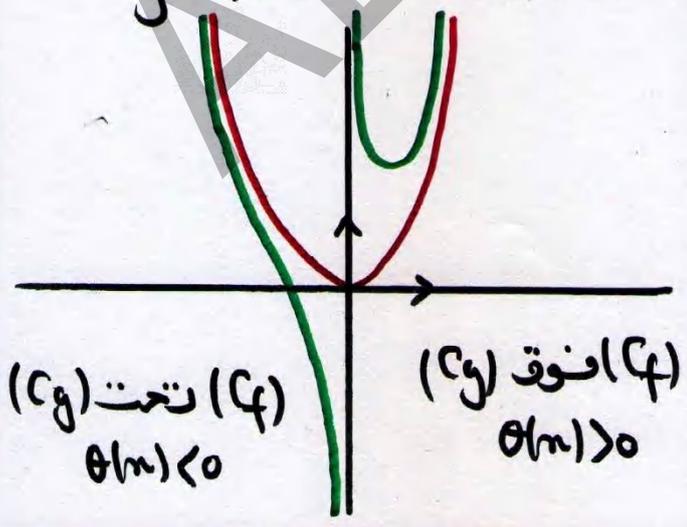
(C_g) منحنى مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$!

مثال: $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = 0$$

(C_g) منحنى مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

بحيث $g(x) = x^2$



(C_f) تحت (C_g)
 $\theta(x) < 0$

(C_f) فوق (C_g)
 $\theta(x) > 0$

الاستراتيجية

ADEL MAHDI

الاستمرارية

$$D_f =]-\infty, a[\quad /3$$

* f ليست متمرة عند العدد a .

* دراسة استمرارية f على يسار العدد a :

f متمرة على يسار العدد a



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

$$D_f =]-\infty, a[\cup]a, +\infty[\quad /4$$

عبارتها عند العدد a

* دراسة استمرارية f على يمين a :

f متمرة على يمين a



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

* دراسة استمرارية f على يسار a :

f متمرة على يسار a



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

* دراسة استمرارية f عند العدد a :

f متمرة عند العدد a



1 ← f متمرة على يمين a

2 ← f متمرة على يسار a

3 ← $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

1/1 الاستمرارية الدالة f عند عدد a :

* f دالة معرفة على D_f

* a عدد ينتمي إلى D_f (غير معزول، له جوار)

(معزول، له جوار)

1 ← D_f يشمل a (ليس مجال D_f)

2 ← $]a, +\infty[$

3 ← $] -\infty, a[$

4 ← $] -\infty, a[\cup]a, +\infty[$

f متغيرة عبارتها عند العدد

سؤال: ادرس استمرارية الدالة f عند a .

$$D_f \text{ / 1 } \text{ يشمل } a \text{ (ليس مجال } D_f \text{)}$$

f متمرة عند العدد a



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$D_f =]a, +\infty[\quad /2$$

* f ليست متمرة عند a .

* دراسة استمرارية f على يمين a :

f متمرة على يمين العدد a



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

N.B :

f قابلة للاشتقاق \Leftrightarrow f دالة متمرة \Rightarrow

2. $I = [a, b]$

- ← نيين ان f متمرة على $[a, b]$ كما سبق
- ← نيين ان f متمرة على يمين a
- ← نيين ان f متمرة على يساره

3. $I = [a, +\infty[$

- ← نيين ان f متمرة على $[a, +\infty[$ كما سبق
- ← نيين ان f متمرة على يمين a.

4. $I =]-\infty, a]$

- ← نيين ان f متمرة على $]-\infty, a]$ كما سبق
- ← نيين ان f متمرة على يساره.

3/ التفسير الهندسي للاستمرارية:

f دالة متمرة على مجال I



يمكن رسم (f) على المجال I دون رفع القلم

4/ أمثلة:

1. دوال متمرة على مجال تعرفها:

f دالة معرفة على \mathbb{R} ا ب :

$$f(x) = \begin{cases} -x &]-\infty, 0] \\ x^2 &]0, +\infty[\end{cases}$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 &]-\infty, 0[\\ x &]0, +\infty[\end{cases}$$

* هل الدالة f متمرة عنده ؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 2) = 2$$

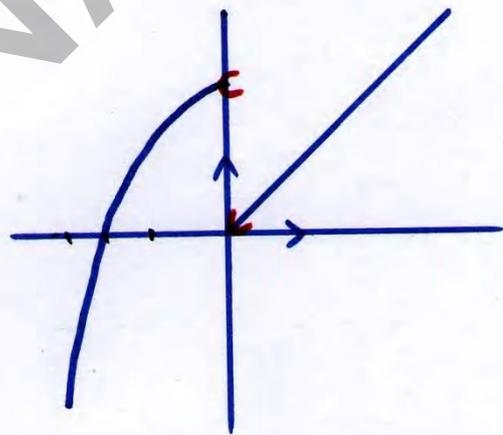
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$f(0) = 0$$

* f ليست متمرة على يساره

* f متمرة على يمين 0

* f ليست متمرة عند 0



2/ استمرارية الدالة f على مجال I:

بين ان الدالة f متمرة على المجال I !

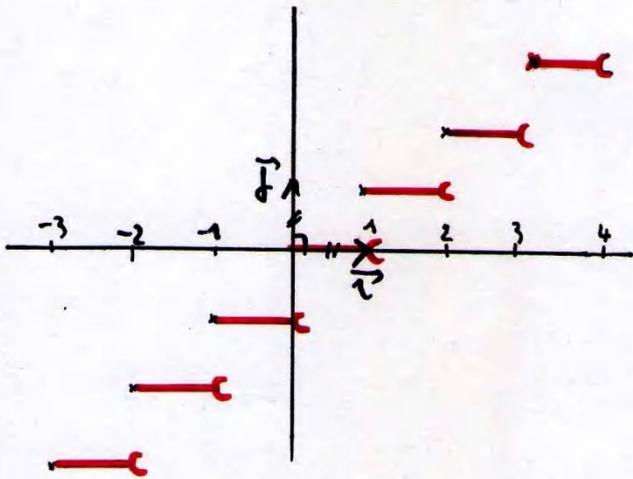
1. I مجال مفتوح $]a, b[$ $]a, +\infty[$ $]-\infty, b[$

f عبارة عن مجموع، جداء، تركيب،

عدة دوال مرجعية متمرة على I،

ادن فالدالة f متمرة على المجال I

* التمثيل البياني : fonction en escaliers

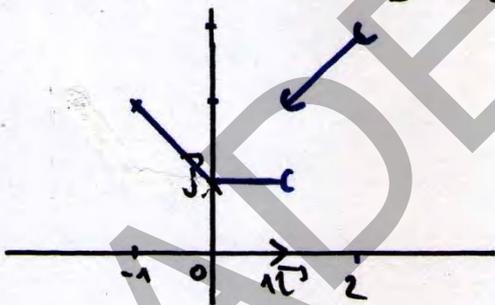


* دوال مرتبطة بالدالة الجزء الصحيح
 لتكن f الدالة المعروفة على $[-1; 2[$ بالعبارة

$$f(x) = x E(x) + 1$$

عين عبارة f في كل مجال من f ، ارم (f)
 هل f دالة متمرة؟

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & [-1, 0[\\ 1 & [0, 1[\\ x+1 & [1, 2[\end{cases}$$



* f متمرة على $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$

* f ليست متمرة على $[-1, 2]$

(Voir page precedente) مثال 2

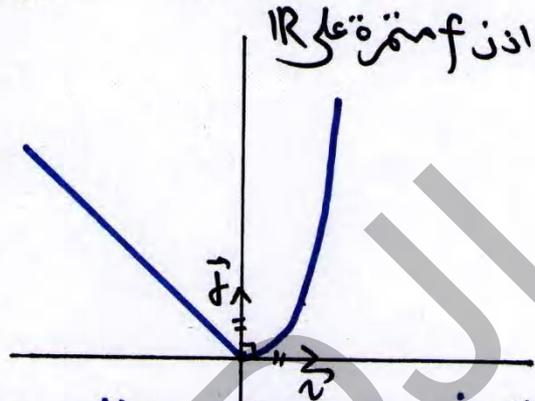
$$f(x) = \begin{cases} -x^2+2 & [-\infty, 0[\\ x & [0, +\infty[\end{cases}$$

* f متمرة على $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$

* استمرارية f عند 0 : متمرة

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

* اذن f متمرة على \mathbb{R}



* 2 دوال غير متمرة على مجال تعريفها:

مثال : الدالة الجزء الصحيح

* تعريف
 $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$x \rightarrow n = E(x) = [x]$$

حيث $n \leq x < n+1$

* أمثلة:

$$E(2,3) = 2$$

$$E(3) = 3$$

$$E[\pi] = 3$$

$$E(-4,12) = -5$$

* عبارة $E(x)$

$$E(x) = \begin{cases} -1 & [-1, 0[\\ 0 & [0, 1[\\ 1 & [1, 2[\\ 2 & [2, 3[\end{cases}$$

* تعليق:

الدالة E متمرة على كل من الحالات

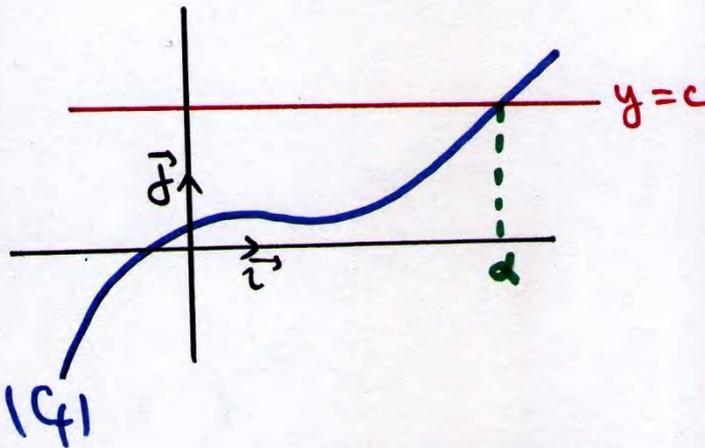
$\dots [3, 4[, [2, 3[, \dots [-2, -1[, [-3, -2[$

لكنها غير متمرة على \mathbb{R} .

ميرهنه القيم المتوسطة

ADEL

مبرهنة القيمة المتوسطة



5. مثال + طريقة التنصيف:

دالة معرفة على \mathbb{R} ب:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$$

1/ ادرس تغيرات الدالة f.

2/ بين ان المعادلة $f(x) = 8$ تقبل حلا

وحيدا في المجال $[-2; 1]$

او

بين ان (f) يقطع $y = 8$: (D) في نقطة

وحيدة

3/ جد مصرا للحل α سعته 10^{-2}

او

جد مصرا لفاصلة نقطة التقاطع.

x	$-\infty$	-2	α	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+
$f(x)$			21	-6	

الهدف:

1. اثبات ان معادلة ما، تقبل حلا في مجال معين باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

2. تعيين حصر سعته m لهذه الحلول بطريقة التنصيف.

$$\textcircled{1} f(x) = c$$

اثبت ان المعادلة تقبل على الاقل حلا في

المجال $[a, b]$ (مفتوح، مغلق، $+\infty$, $-\infty$)

$\leftarrow f$ متمرة على $[a, b]$

$\leftarrow c$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$

في حالة مجال مفتوح: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$

نقول ان $f(x) = c$ تقبل على الاقل حلا

α محصور بين a و b : $a < \alpha < b$

$\alpha \in]a, b[$

ثم اثبات ان الحل وحيد:

$\leftarrow f$ دالة رتيبة تماما

3. اثبات ان α محصور بين 1 و 3 مثلا:

\leftarrow ثبت ان العدد c محصور بين $f(1)$ و $f(3)$.

4. التفسير البياني:

$f(x) = c$ تقبل حلا وحيدا له معناه (f)

يقطع المستقيم $y = c$: (D) في نقطة وحيدة

فاصلتها

(63)

$$\textcircled{2} f(x)=0$$

اثبات ان المعادلة تقبل حلا في المجال
[a, b] (مفتوح، مغلق، عدد

← f متمرة على [a, b]

← f غيرت اشارتها .

نقول ان $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا α
 حيث $a < \alpha < b$ $\alpha \in]a, b[$

اثبات ان الحل وحيد:

← f دالة ترتيبية قاما .

اثبات ان α محصور بين 1 و 3 مثلا:

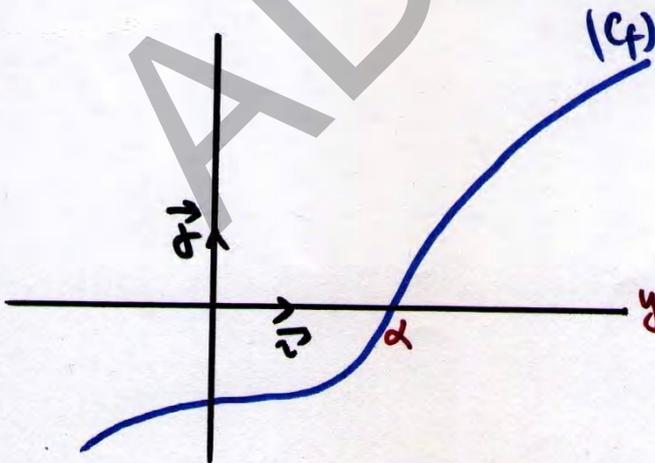
← نحسب $f(1)$ و $f(3)$ ونثبت

$$\text{ان } f(1) \times f(3) < 0$$

التفسير البياني:

$f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

(f) يقطع محور الفواصل في النقطة
 ذات الفاصلة α أي النقطة A(4,0)



اثبات ان $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا على $[-2, 1]$

f دالة متمرة على $[-2, 1]$ (مجال جزئي مغلق)

$$f(1) < 8 < f(-2) \text{ حيث}$$

$$f(-2) = 21$$

$$f(1) = -6$$

الدالة f متناقصة قاما على $[-2, 1]$

كما سبق وحسب مبرهنة القيمة المتوسطة

فان المعادلة $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا α

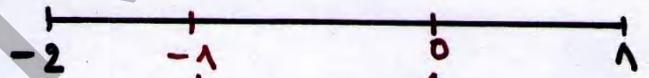
$$\text{حيث } -2 < \alpha < 1$$

ابعد حصول α بطريقة التنصيف:

$a < \alpha < b$ هذا الحصر سقته m

$$m = b - a \text{ معناه}$$

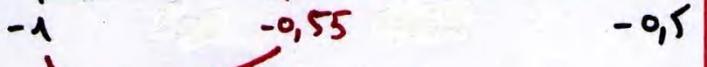
$$f(-2)=21 \quad f(-1)=14 \quad f(0)=1 \quad f(1)=-6$$



$$f(-1)=14 \quad f(-0,5)=6 \quad f(0)=1$$



$$14 \quad 8,17 \quad 6$$



$$14 \quad 8,03 \quad f(x)=8 \quad 7,90 \quad 8,17$$



$$\text{اذن } -0,54 < \alpha < -0,53 \quad (10^{-2})$$

بيانياً: (f) يقطع $y=8$ في النقطة

الوحيدة ذات الفاصلة α

$$-0,54 < \alpha < -0,53$$

6. مثال + طريقة التنصيف:

$f(x) = -x^3 - 2x + k$ على \mathbb{R} بـ k

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ بين ان $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

3/ حدد حصر α بـ 10^{-1}

او

بين ان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α ، ثم حدد حصر α .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

f دالة متزايدة على \mathbb{R}

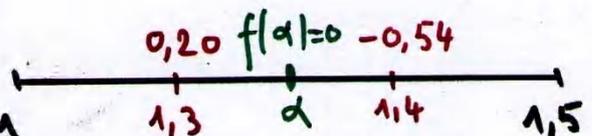
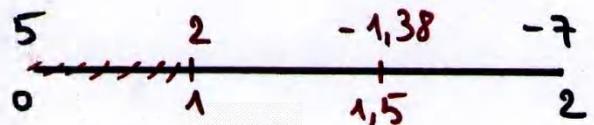
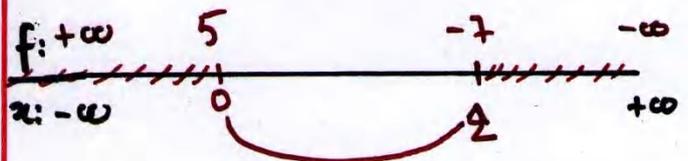
f غيرت اشارةها من $+\infty$ الى $-\infty$

f متناقصة تماما على \mathbb{R}

مما سبق وحسب مبرهنة القيمة المتوسطة

فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

ابعد حصر α :



$1.3 < \alpha < 1.4$ (65)

ملاحظة:

سؤال: بين ان $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.3 < \alpha < 1.4$

في هذه الحالة لانحتاج لطريقة التنصيف فقط نصيف اثناء الاجابة مايلي

$$f(1.3) \times f(1.4) < 0 \quad \begin{cases} f(1.3) = 0.20 \\ f(1.4) = -0.54 \end{cases}$$

3) $f(x) = h(x)$

* لحل هذه المعادلة نجعلها صفرية ونكتب

الدالة $g(x) = f(x) - h(x)$

$g(x) = 0 \iff f(x) = h(x)$

نرتبطق مبرهنة القيمة المتوسطة

على الدالة g كما في الحالة 2.

4/ عزل e^x و $\ln a$ ، حصر $f(a)$

مثال: S_2 Bac 2012

$g(x) = 1 - x e^x$ (I)

* بين ان $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

على المجال $]-1, +\infty[$ ثم تحقق

ان $0.5 < \alpha < 0.6$ $\begin{cases} g(\alpha) = 0 \\ e^\alpha = 1/\alpha \end{cases}$

$f(x) = (x-1)e^x - x - 1$ (II)

* بين ان $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}$ عزل e^α ، كما ثم عوض

* حدد حصر α $f(\alpha)$

$h(x) = \frac{-x^2 - 1}{x}$

$R(0.5, x) < f(\alpha) < R(1.0, 6)$

$R(0.6) < f(\alpha) < R(0.5)$

$R(0.6) < f(\alpha) < R(0.5)$

قواعد الطاب \mathbb{R}

الاستفاقة

ADEL MAJIDI

الاشتقاقية

أمثلة:

$a = 2$ لـ $f(x) = x^2$ *

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+2)^2 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (h+4) = 4$$

اذن الدالة مربع قابلة للاشتقاق عند 2

و $f'(2) = 4$

$a = -1$ لـ $f(x) = \sqrt{x}$ *

f غير قابلة للاشتقاق عند -1 لان $-1 \notin D_f$

$a = 4$ لـ $f(x) = \sqrt{x}$ *

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

اذن f قابلة للاشتقاق عند 4

و $f'(4) = \frac{1}{4}$

a ينتمي لـ D_f
وله حاور من
المساويين

38

المتغير عند
معيّن

$f(x) = \sqrt{|x|}$

1/ قابلية اشتقاق الدالة f عند عدده

* f دالة معرفة على D_f

* a عدد ينتمي إلى D_f .

1 D_f يتخلل a (ليس حد الـ D_f)

2 $[a, +\infty[$

3 $] -\infty, a]$

4 $] -\infty, a] \cup [a, +\infty [$

f تغير عبارتها عند a.

* سؤال: ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند a

واستنتج العدد المشتق باز وجود

1/ D_f يتخلل a (ليس حد الـ D_f)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

أو

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



∞

* f ليست قابلة
للاشتقاق عند
العدد a

عدد b:

* f قابلة للاشتقاق
عند العدد a
عدد المشتق
هو $f'(a)$
ميت
 $f'(a) = b$

$$D_f =]-\infty, a] / 3$$

f ليست قابلة للاشتقاق عند العدد a .

دراسة قابلية اشتقاق f على يسار a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{أو}$$

عدد b
 f قابلة للاشتقاق على يسار العدد a
 $f'(a) = b$ و
 f ليست قابلة للاشتقاق على يسار a

مثال:

$$a = 0; D_f =]-\infty, 0]; f(x) = \sqrt{-x+3}$$

f ليست قابلة للاشتقاق عند 0 .
 قابلية اشتقاق f على 0 من اليمين:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{3-h} - \sqrt{3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h}{h(\sqrt{3-h} + \sqrt{3})} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

اذن f قابلة للاشتقاق على يسار a

$$f'(0) = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \text{ و}$$

$$D_f = [a, +\infty[/ 2$$

f ليست قابلة للاشتقاق عند العدد a .

دراسة قابلية اشتقاق f على يمين a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{أو}$$

عدد b
 f قابلة للاشتقاق على يمين العدد a
 $f'_d(a) = b$ و
 f ليست قابلة للاشتقاق على يمين a

مثال:

$$a = 2; f(x) = \sqrt{x-2}$$

f ليست قابلة للاشتقاق عند 2 .
 قابلية اشتقاق f على يمين 2 :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

اذن f ليست قابلة للاشتقاق على يمين a

دراسة قابلية اشتقاق f على 5:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{+5+h-5}{h} = +1$$

قابلية الاشتقاق على 5
و $f'_d(5) = +1$

دراسة قابلية اشتقاق f على يسار 5:

$$\lim_{h < 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

$$\lim_{h < 0} \frac{-5-h+5}{h} = -1$$

قابلية الاشتقاق على يسار 5
و $f'_g(5) = -1$

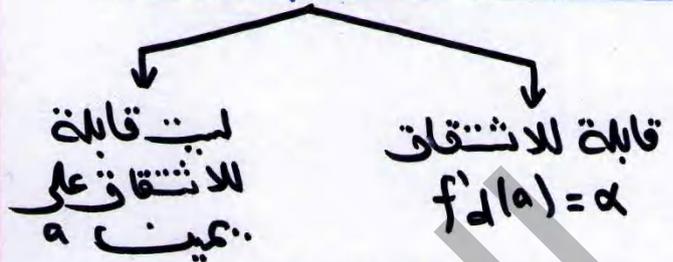
دراسة قابلية اشتقاق f عند 5:

f قابلة للاشتقاق على 5 يسار و يسار
لكن $f'_d(5) \neq f'_g(5)$

اذن f ليست قابلة للاشتقاق عند العدد 5.

14 / $]-\infty, a] \cup [a, +\infty[$
عبارتها عند a

دراسة قابلية اشتقاق f على a



دراسة قابلية اشتقاق f على يسار a:



دراسة قابلية اشتقاق f عند العدد a:

يتكون f قابلة للاشتقاق عند العدد a
لذا فقط اذا كانت:

← f قابلة للاشتقاق على 5 يسار

← f قابلة للاشتقاق على يسار a.

$$f'_d(a) = f'_g(a) = \alpha$$

← العدد المشتق f عند a هو $f'(a) = \alpha$

مثال $f(x) = |x - 5| \quad D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x) = -x + 5 &]-\infty, 5] \\ f(x) = x - 5 & [5, +\infty[\end{cases}$$

ادرس قابلية اشتقاق f عند العدد 5.

2/ مشتقات الدوال المألوفة:

$f(x)$	$f'(x)$	مجال الاشتقاق
a	0	\mathbb{R}
$ax+b$	a	\mathbb{R}
x^2	$2x$	\mathbb{R}
x^n	$n x^{n-1}$	\mathbb{R}
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	\mathbb{R}
$\sin x$	$\cos x$	\mathbb{R}

3/ عمليات على الدوال المشتقة:

f	f'
$k \cdot u$	$k \cdot u'$
$u + v - w$	$u' + v' - w'$
$u \cdot v$	$u'v + u \cdot v'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - u v'}{v^2}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$

2/ الدالة المشتقة لـ f :

1/ مجالات قابلية اشتقاق f :
 ليس مجموعة

• f قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح I :

• معناه f قابلة للاشتقاق من أجل كل عدد a من I

• كيف نجيب على السؤال! : f عبارة عن مجموع اجزاء، تركيب عدة دوال من جنسها قابلة للاشتقاق على كل مجال من f .
 اذن f قابلة للاشتقاق على I (مجال مفتوح)

• f قابلة للاشتقاق على $[a, b]$:

نبين ان

• f قابلة للاشتقاق على $[a, b]$ كما سبق
 • نبين ان f قابلة للاشتقاق على $]a, b[$
 • يمينا a وعلى يسار b .

• f قابلة للاشتقاق على $[a, +\infty[$:

• f قابلة للاشتقاق على $]a, +\infty[$ كما سبق
 • f قابلة للاشتقاق على يمينا a .

• f قابلة للاشتقاق على $] -\infty, a]$:

• f قابلة للاشتقاق على $] -\infty, a]$ كما سبق
 • f قابلة للاشتقاق على يسار a .

النتيجة دوز حساب: النهاية التالية

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} = f'(2)$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad \text{حيث}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

$$A = f'(2) = \frac{1}{4}$$

6/ المشتقان المتعاقبة:

+ f دالة قابلة للاشتقاق n مرة على مجال I

f⁽ⁿ⁾ تعني المشتقة ذات الرتبة n للدالة f.

مثال

① احسب f'(x) ، f(x) = (3x+4)e^x

f''(x), f'''(x) ثم بين ان

البرهان بالتراجع $f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x$

② احسب f'(x) ، f(x) = 1/x

f''(x), f'''(x) ثم بين ان

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$$

n! : n عاكسي:

$$0! = 1 \quad | \quad 1! = 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)$$

$$n! = (n-1)! \times n$$

14 مشتقة مركب دالتين:

f(x)	f'(x)
u [v(x)]	v'(x) * u'[v(x)]
√u	u' / (2√u)
u ⁿ	n u' u ⁿ⁻¹
1/u ⁿ	-n u' / u ⁿ⁺¹

15 تطبيقات:

+ بين ان f قابلة للاشتقاق على مجال معين واحسب f'(x)

f(x) = 2x+3

f(x) = x³

f(x) = 3x³ + 2x² + 1

② f(x) = 2√x + 1/x

f(x) = x³(2x²+1)

f(x) = 1/(x³+√x)

f(x) = (2x²+2)/(2x+1)

f(x) = (2x+1)³

f(x) = √(6x²+3x+10)

f(x) = 1/(x+3)⁴

f(x) = cos(-4x+3)

f(x) = sin x / cos x = tg x

f(x) = (x³+x+1)√x

f(x) = 10(x+2)²

مثال: $a=0$, $f(x)=x^2$

3 * f غير قابلة للاشتقاق عند a

(Cf) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a

مماسا عموديا معادلته $x=a$

طبيعة الأمثلة:

① عبر معادلة المماس لـ (Cf)

← عند النقطة ذات الفاصلة a :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

← عند النقطة ذات الترتيب b :

• نحل المعادلة $f(x) = b$
• نعين الفواصل a الممكنة لعدد العطل
• يمثل عدد المماسات الممكنة.

+ بعد تعيين a نكتب

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

مثال: $f(x) = x^2$

عين مماسات (Cf) عند النقط ذات الترتيب 4.

$x=2$ معناه $f(x)=4$
 $x=-2$

$a=-2$	$a=2$
$f(-2)=4 / f'(-2)=-4$	$f(2)=4 / f'(2)=4$

$y = -4(x+2) + 4$	$y = 4(x-2) + 4$
-------------------	------------------

$y = -4x - 4$	$y = 4x - 4$
---------------	--------------

(71)

3/ التفسير الهندسي للعدد المشتق:

1 * D_f يمثل a (ليس حد الـ D_f)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

1 * $f'(a) = b$ يقبل عند النقطة

$A(a, f(a))$ مماسا مماسا معادلته

$$(D): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

مثال: $f(x) = x^2$, $a = 1$

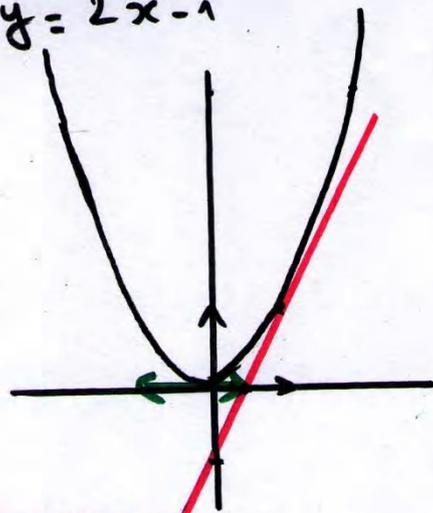
f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1) = 2$

اذن (Cf) يقبل مماسا (D) عند النقطة

ذات الفاصلة 1 معادلته

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$y = 2x - 1$$



$$(D): y = 2x - 1$$

2 * $f'(a) = 0$ يقبل عند النقطة

ذات الفاصلة a مماسا افقيا

$$y = f(a)$$
 معادلته

← الذي يمثل النقطة $A(a, \beta)$

نعين الفواصل الممكنة كما يلي

$$(A): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

نعوض $f'(a)$ و $f(a)$ بدلالة a

نعوض x و y بالاحداثيات a, β

نتحصل على معادلة بدلالة a نحلها

لايجاد a

مثال: $f(x) = x^2$

نعين محامات (C_f) التي تشمل النقطة $A(0, -1)$

$$(A): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$\begin{cases} f'(a) = 2a \\ f(a) = a^2 \end{cases}$$

$$x = 0 \quad y = -1$$

$$-1 = 2a(0-a) + a^2$$

$$-1 = -a^2$$

$$a = +1$$

$$a = -1$$

$$y = 2x - 1$$

$$y = -2x - 1$$

② نعين النقطة A بحيث عندما فان (C_f)

و (A) يقبلان نفس المحامات ثم نعبر عن معادلته

نعين a حل جملة المعادلتين

$$\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \end{cases} \Rightarrow A(a, f(a))$$

النقطة

ثم نعوض في احدي المعادلتين $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

← الذي معامل توجيهه α

$$f'(x) = \alpha$$

نعين الفواصل الممكنة (عدد الحلول

يمثل عدد المحامات الممكنة

بعد تعيين a نكتب

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

مثال: $f(x) = x^2$

نعين محامات (C_f) التي معامل توجيهها α

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(x) = 2x = 8 \quad \text{معناه} \quad x = 4$$

أي عند النقطة ذات الفاصلة 4

$$y = f'(4)(x-4) + f(4)$$

$$y = 8(x-4) + 16$$

$$y = 8x - 16$$

← الذي يوازي المستقيم $y = \alpha x + \beta$

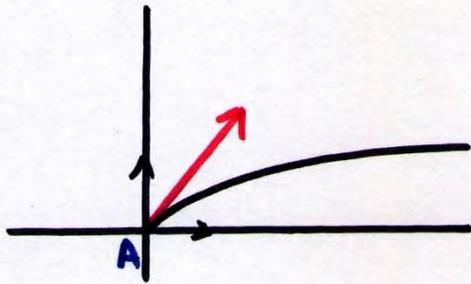
نحل المعادلة $f'(a) = \alpha$ لتعيين

الفواصل الممكنة ثم نكمل الحل

← الذي يعامد المستقيم $y = \alpha x + \beta$

$$f'(x) = -\frac{1}{\alpha}$$

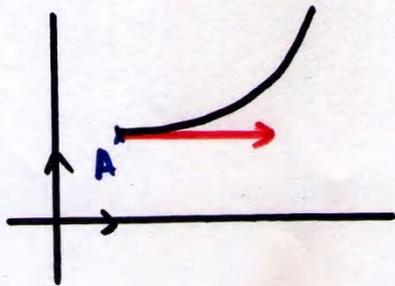
لتعيين الفواصل الممكنة ثم نكمل الحل



2. $f'_d(a) = 0$

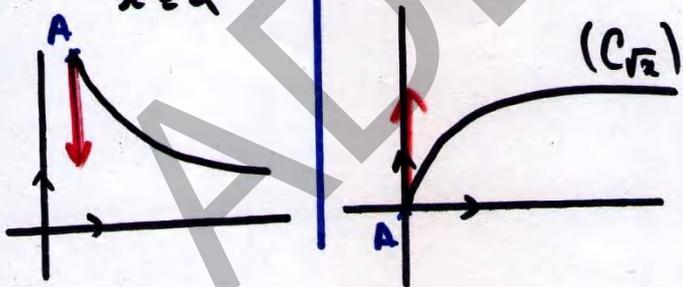
نصف مماس من اليمين مواز لمحور الفواصل

(Δ): $\begin{cases} y = f(a) \\ x \geq a \end{cases}$



3. نجد $+\infty$ أو $-\infty$

نصف مماس مواز لمحور الترتيب موجب نحو الأعلى معادلته $x = a$
 نصف مماس مواز لمحور الترتيب موجب نحو الأسفل معادلته $x = a$



N.B: في هذه الحالة النقطة $A(a, f(a))$ هي نقطة توقف.

مثال:
 عين النقطة A التي تقبل فيها منحنى الدالة مربع ومنحنى الدالة مكعب متماسا مشتركا ثم عين معادلة هذا المماس:

$$\begin{cases} a^3 = a^2 \\ 3a^2 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(a^2 - 1) = 0 \\ a(3a - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 & a = -1 & a = 1 \\ a = 0 & a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

اذن $f(a) = 0$ $a = 0$
 النقطة A هي المبدأ $(0, 0)$

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

(Δ): $y = 0$

1/ a حد f_d (يمين a أو يسار a)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

أو

$$\lim_{x \leftarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

نصف مماس بحد مماس

1. $f'_d(a) = b$

$$(Δ): \begin{cases} y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

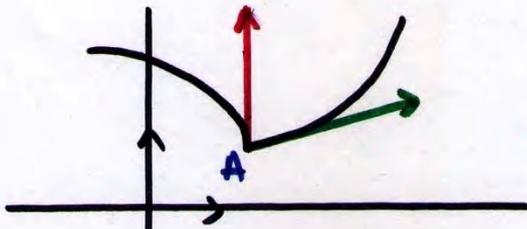
نصف مماس مائل لـ (C_f) على عين النقطة ذات الفاصلة a

② l و ∞ :

(f) يقبل نصف مماسين ممايين عند النقطة ذات
الفاصلة a معادلتها مثلا:

$$(A_1) \begin{cases} y = f'(a)(x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases} \text{ من اليمين}$$

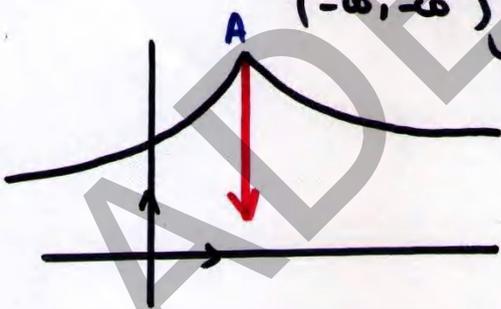
$$(A_2) \begin{cases} x = a \\ \text{نحو الأعلى } +\infty \text{ ونحو الأسفل } -\infty \end{cases}$$



N.B: في الحالة ① و ②، النقطة $A(a, f(a))$ تسمى نقطة زاوية.

③ ∞ و ∞ من نفس الاشارة:

(f) يقبل نصف مماس معادلته $x=a$
موجه نحو الأعلى $(+\infty, +\infty)$ أو نحو
الأسفل $(-\infty, -\infty)$



N.B: النقطة $A(a, f(a))$ تسمى
نقطة رجوع

3 / $]-\infty, a] \cup [a, +\infty[$

تغير عبارتها عند a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

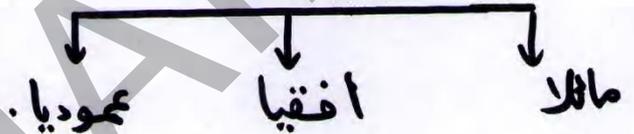
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

عند l و l' حيث $l = l'$

نرجع للحالة الأولى

(f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a

مماسا



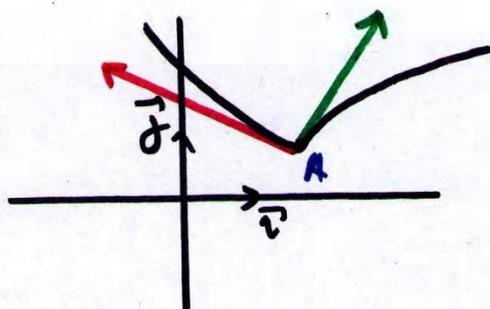
نتيجتين مختلفتين

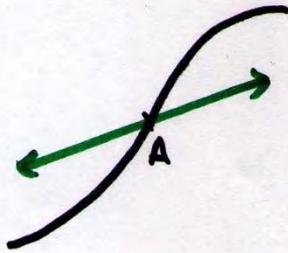
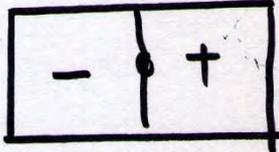
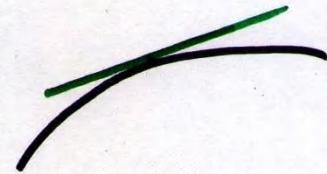
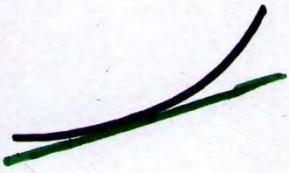
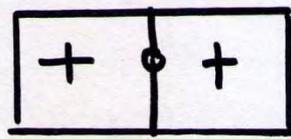
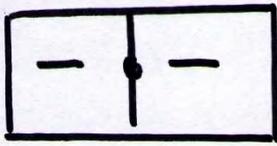
⑤ l و l' ($l \neq l'$)

(f) يقبل نصف مماسين ممايين عند النقطة
ذات الفاصلة a معادلتها:

$$(A_1) \begin{cases} y = f'(a)(x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

$$(A_2) \begin{cases} y = f'(a)(x-a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$

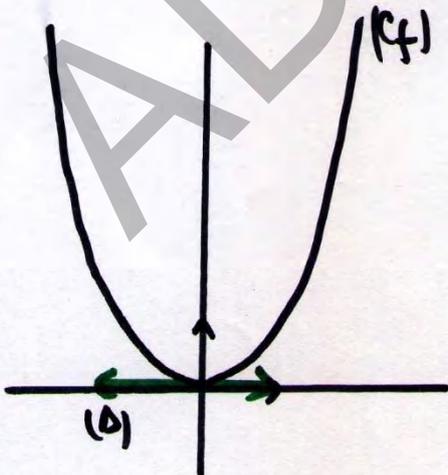




مثال

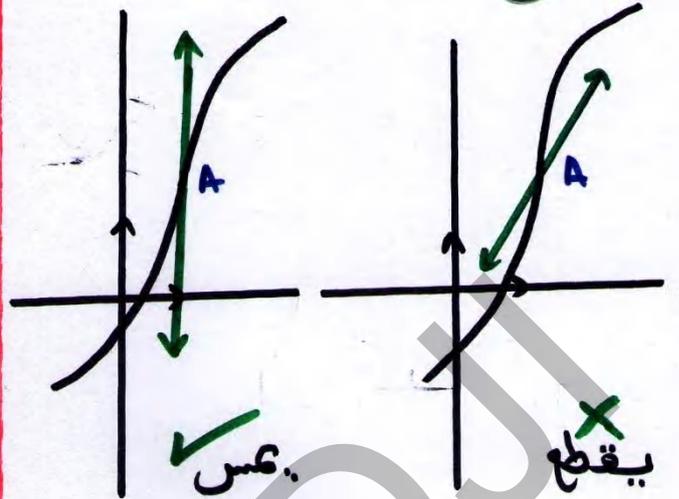
(5) : $y = 0$ عند $a = 0$, $f(x) = x^2$
 ندرس إشارة الفرق $A = f(x) - y = x^2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
A	+	0	+
الوضع النبي	(ف) فوق (5)	(ف) 0 يمس (ف)	(ف) فوق (5)



(4) نجد $+\infty$ و $-\infty$:

(Cf) ايقل محاس معادلته $x = a$



N.B : النقطة A في هذه الحالة تسمى
 نقطة انعطاف (Cf) ايغير اتجاهه

4 الوضعية النبي بين (Cf) او محاس (5) :

طريقة 5 :

عند (Cf) $y = ax + b$: محاس ل (Cf) عند
 النقطة ذات الفاصلة a .
 لمعرفة الوضع النبي بين (Cf) و (5)

ندرس إشارة الفرق $A = f(x) - (ax + b)$

$A > 0$: (Cf) فوق (5)

$A < 0$: (Cf) تحت (5)

$A = 0$: الفرق لم يغير إشارته

(5) يممس (Cf)

الفرق غير إشارته

(5) يخنرق (Cf)

النقطة (a, f(a)) ن انعطاف.

بعد دراسة تغيرات و نشئي جدول تغيراتها.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	↗	

الاستنتاج تغيرات R :

$$R'(x) = f'(x) - f'(a)$$

$$R'(x) = g(x) - g(a)$$

$$x = a \Leftrightarrow g(x) = g(a) \quad \leftarrow R'(x) = 0$$

$$\leftarrow R'(x) \geq 0 \quad !!$$

لما $a > x$ و g متزايدة قاطبة
فإن $g(x) > g(a) \Leftrightarrow R'(x) > 0$

$$\leftarrow R'(x) < 0$$

بنفس الطريقة نجد $R'(x) < 0$ لما $x \leq a$.

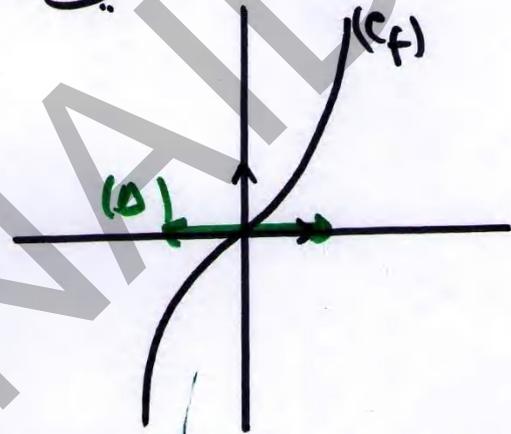
x	$-\infty$	a	$+\infty$
$R'(x)$	-	0	+
$R(x)$	↘ ↗ $R(a) = 0$		
إشارة $R(x)$	+	0	+
الوضع النبي	(f) افوقها	(a) عكس (f)	(f) افوق (a)

مثال 2:

$a = 0, f(x) = x^3$
ندرس إشارة الفرق $A = f(x) - y = x^3$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
A	-	0	+
الوضع النبي	(f) انبعت (a)	(a) يتفرق (f)	(f) افوق (a)

(0,0) نقطة انعطاف لمنحنى الدالة مكعب



طريقة 2 باستخدام دالة جديدة:

نزيد دراسة الوضع النبي بين (f) والعماس (a) للمنحنى (f) عند النقطة ذات الفاصلة a من أجل أي قيمة له
نضع الدالة R حيث: $Bac 2016 T_1$

$$R(x) = f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]$$

$$R'(x) = f'(x) - f'(a)$$

في بداية التمرين نجد دالة مساعدة g .

$$g(x) = f'(x)$$

15 تطبيقات الاشتقاقية:

1/ اتجاه تغير الدالة

* نعين الدالة المشتقة $f'(x)$
ثم ندرس اشارة $f'(x)$

قواعد الحساب في \mathbb{R} بالاستعانة بـ \mathbb{R}
أحدى (a, b) نظير
اشارتها في بداية
المسألة .

$f'(x) \geq 0$: f متزايدة تماما

$f'(x) \leq 0$: f متناقصة تماما .

* شكل جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f(x)	$+\infty$	0	$+\infty$

2/ القيمة العديّة الصغرى والعظمى

$f'(x)$ تنعدم من أجل قيمة معددة
ثم ندرس اشارة $f'(x)$

+	0	-
---	---	---

عظمى

-	0	+
---	---	---

صغرى

3/ نقطة الانعطاف

* ط 1: $f'(x)$ تنعدم ولا تغير اشارة

* ط 2: $f''(x)$ تنعدم مغيرة اشارة

* ط 3: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$

والعكس

* ط 4: عند دراسة الوضع النبيل (C_f)
ومماسه (L) نجد أن (L) لا يخرق
 (C_f)

N.B 1

• ذروة \Leftarrow محاس أفقي
• محاس أفقي \Leftarrow ذروة
• نقطة انعطاف .

N.B 2:

ذروة ل $A(a, \beta)$ معناه

$$\begin{cases} f(a) = \beta \\ f'(a) = 0 \end{cases}$$

سؤال:

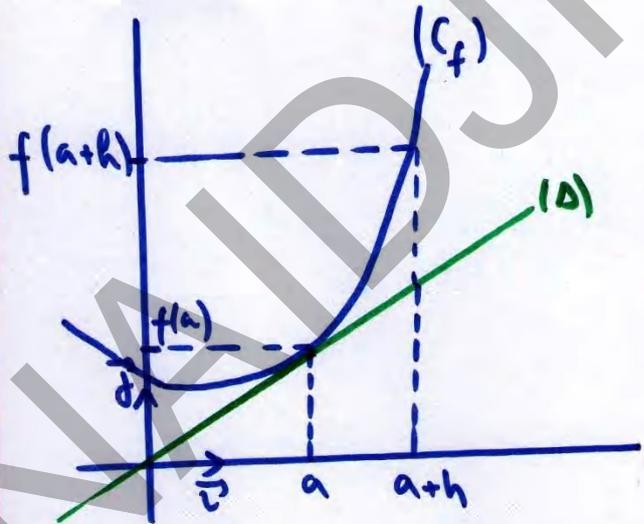
$f(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$ ، عين a وط حتى

تكون النقطة $A(2; 1)$ نهاية حمية
للمستحي (C_f)

1/4 التقريب التآلفي لدالة

المبدأ:

- دالة لها عبارة معقدة $f(x)$.
- نزيد حساب صور أعداد بشكل سهل.
- نستبدل عبارة $f(x)$ بدالة تآلفية بسيطة كما يلي:



(Δ) مماس (f) عند النقطة ذات الإحداثيات a

$$(\Delta): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

لما $x = a+h$

$$\begin{cases} f(x) = f(a+h) \\ y = f'(a) \cdot h + f(a) \\ f(x) \approx y \quad h \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\boxed{f(a+h) \approx h \cdot f'(a) + f(a)}$$

مثال: احسب $(2,0001)^2$

نعتبر $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$

نكتب $f(2+h) \approx f'(2)h + f(2)$

$$f(2+h) \approx 4h + 4$$

$$\boxed{(2+h)^2 \approx 4h + 4}$$

$$(2,0001)^2 \approx 4,0004$$

1/5 إنشاء دالة عبارتها مبهولة باستخدام طريقة Euler

المبدأ:

يمكن إنشاء منحنى تقريبي لـ (f) لدالة لا نعلم سوى دالتها المشتقة ونقطة منها كما يلي:

ملاحظة	M _i	x _i	y _i
	M ₀	x ₀	f(x ₀)
	M ₁	x ₀ +h	h f'(x ₀) + f(x ₀)
	⋮	⋮	⋮

- ننجز جدولين $h \geq 0$ و $h < 0$
- فننتحصل على عدد كبير من النقط القريبة جدا من منحنى (f) الحقيقي
- نربط بين النقط لنحصل على منحنى تقريبي لـ (f) .

الدوال الأسية

ADEL MAJIDI

الدوال الأسية

3/ معادلات تتضمن الحالة الأسية:

$u(x) = v(x) \Leftrightarrow e^{u(x)} = e^{v(x)}$ *
 $\phi : b < 0 \leftarrow e^{u(x)} = b$ *
 $u(x) = \ln b : b > 0$
 * تبديل المتغير واذا كانت كل المتجاهيل مكتوبة على الشكل e^{\dots}
 $y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 2 = 0$
 $\begin{cases} y = e^x > 0 \\ x = \ln y \end{cases}$

تطبيق: حل المعادلات:

$$\begin{array}{l|l}
 e^{-x+2} = 1 & e^{2x+1} = (e^x)^3 \\
 e^{2x} \cdot e^{x-3} = e^{x+6} & 2e^{2x} - 3e^{3x} + e^x = 0 \\
 e^{-x^2} = \frac{1}{e} & 2e^x + \sqrt{e^{2x}} - 3 = 0 \\
 e^{x+3} - e^{\frac{x}{2}} = 0 &
 \end{array}$$

4/ دراسة اشارة عبارة وحل مترجمات:

1/ عبارة من الدرجة الأولى:

* قاعدة اشارة $\alpha e^{ax+b} + \beta$

$\alpha, \beta > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\alpha e^{ax+b} + \beta$	نفس اشارة α	

$\alpha, \beta < 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$\alpha e^{ax+b} + \beta$	عكس	نفس	نفس
	$\alpha \cdot a$	$\alpha \cdot a$	

* $e^{u(x)}$ دوما موجبة. N.B

$\alpha e^{ax+b} + \beta = 0$ العبارة التي تعدم القيمة التي تعدم x_0 (79)

1/ عموميات

1/ تعريف الدالة الأسية النيبيرية:

* توجد دالة وحيدة f معرفة على \mathbb{R} حيث:

f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و $f' = f$
 $f(0) = 1$

* هذه الدالة تسمى الدالة الأسية النيبيرية (ذات الأساس e) اكتشفت كعملية \ln

$f: \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_*^+ =]0, +\infty[$
 $x \mapsto f(x) = \exp(x) = e^x$

* الدالة الأسية النيبيرية هي الحل الخاص للمعادلة

التفاضلية $y' = y$ ، حيث $y(0) = 1$

$n \in \mathbb{Z}, (a, b) \in \mathbb{R}^2$

2/ خواص:

<ul style="list-style-type: none"> $e^a \times e^b = e^{a+b}$ $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ $(e^a)^n = e^{n \cdot a}$ $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ $e^{u(x)} \times e^{-u(x)} = 1$ $\sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}$ $\sqrt[n]{e^a} = e^{\frac{a}{n}}$ 	<ul style="list-style-type: none"> $e^{u(x)} > 0 \forall x$ $e^{u(x)} < 0$ jamais $e^{u(x)} = 0$ jamais $e^0 = 1$ $e^1 = e = 2,718...$ $e^{\ln a} = a ; a > 0$ $\ln e^a = a$
---	---

تطبيق: اكتب على أبسط شكل ممكن ما يلي:

$A = \frac{e^{-5} \times e^8}{\sqrt{e^3} \times e^2} + \frac{e^2 \times e^3}{e^2 \times e^{-4}}$

$B = \frac{e^{-x} \times e^{3x} \times e^{x^2+2}}{e^{2x} \times (e^{2x})^{x+1}}$

14 اشارة $e^x - 1$:

$$0 < e^x < 1 : x < 0$$

$$e^x > 1 : x > 0$$

$$e^0 = 1 : x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+

15 انظر درس دراسة اشارة عبارة + حل من اجابتي

16 تطبيق:

ادرس اشارة العبارات التالية:

$$\begin{array}{l} e^x - 1 \\ 2e^{3x+4} + 3 \\ -3e^{-5x} - 4 \\ -2e^{1-x} + 1 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 7e^{3x} - e^x - 6e^{2x} \\ 2e^{2x} + e^x - 3 \\ 6e^{2x} - 18e^x + 12 \\ e^{2x} - e^x + 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 7e^{3x} - e^x - 6e^{2x} > 0 \\ -2e^{1-x} + 1 < 0 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 2e^{3x+4} + 3 < 0 \\ e^{2x} - e^x + 1 > 0 \end{array} \right.$$

حل المتراجحات:

* حل متراجحات:

* نضع $\alpha e^{ax+b} + \beta > 0$ ثم نحل المتراجحة حتى نجد المجال الذي تكون فيه العبارة موجبة
* تكون العبارة سالبة في المجال المتبقي من \mathbb{R} .

$$\begin{array}{l} a > b \Leftrightarrow e^a > e^b * \\ a > \ln b : \left. \begin{array}{l} b > 0 \\ \mathbb{R} : b < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow e^a > b * \\ a < \ln b : \left. \begin{array}{l} b > 0 \\ \emptyset : b < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow e^a < b * \end{array}$$

2/ عبارة من الدرجة الثانية أو أكثر:

$$\begin{array}{l} ae^{2x} + be^x + c \\ \text{نستعمل تبديل المتغير } y = e^x > 0 \\ ay^2 + by + c \end{array}$$

$$\Delta < 0 : \text{ اشارة } a$$

$$\Delta = 0 : \text{ اشارة } a$$

$$\Delta > 0 : \text{ نحلل العبارة } (e^x - y_1)(e^x - y_2) \text{ ثم نستخدم اشارة الحدود}$$

3/ اشارة عبارة $A(x)$ تتضمن الحالة الاية:

$$\text{نحل المعادلة } A(x) = 0$$

وإذا المرتقبل المعادلة أي حلول فإن:

$$A(x) > 0 : \text{ إذا كان } A(0) > 0 \text{ مثلا}$$

$$A(x) < 0 : \text{ إذا كان } A(0) < 0 \text{ مثلا}$$

العدد الممتق عنده

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = 1$$

التقريب التالي عنده:

$$e^h \approx 1 + h ; h \rightarrow 0$$

5/ اشارة المثقة:

6/ جد دل التغيرات:
 $f'(x) = e^x > 0$ من اجل كل x من \mathbb{R}
 الدالة e^x متزايدة تماما على \mathbb{R} .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			+	
$f(x)$				$+\infty$

7 / نقط التقاطع مع المحاور:

مع (xx) : $S = \emptyset \Leftrightarrow e^x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
 لا يوجد نقط تقاطع

مع (yy) : $f(0) = e^0 = 1$
 $(C_f) \cap (yy') = \{A(0, 1)\}$

8 / اشارة الدالة e^x

$e^x > 0$ برهان: $e^x = (e^{\frac{x}{2}})^2 > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+

كثيره من بي: (f) يقع دوما فوق (xx)

1/ الدالة الأسية النيرية $f(x) = e^x$

1/ تعريف:

مجموعة التعريف: $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

عبارة $f(x)$

$f:]-\infty, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$
 $x \mapsto y = f(x) = \exp x = e^x$

2/ النهايات:

معور الفواصل من افقي
 (C_f) عند $-\infty$
 (C_f) فوق (xx)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

احتمال وجود PM

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

(C_f) يمثل فرع لا نهائي
 عند $+\infty$ باتجاه (yy)

3/ الاستمرارية:

الدالة e^x متممة على \mathbb{R}

4 / الاشتقاق:

f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ودالتها المثقة
 هي f' حيث: $f'(x) = f(x) = e^x$

الهماسات:

مثلا عند النقطة ذات الفاصلة 0

(C_f) يقبل هماسا (T) : $y = x + 1$

(C_f) يقع دوما فوق هذا هماس (T) .

تطبيق: احس مشتقان الدوال التالية

$$f(x) = (x^2 - 2x)e^x$$

$$g(x) = (2x+3)e^{-2x+1}$$

$$h(x) = \frac{e^{2x} - 3}{e^{-x} + 3}$$

$$t(x) = -3x + 4 - 3e^{-2x-2}$$

$$k(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$$

$$z(x) = 2x + 1 - 3 \frac{e^x}{e^x - 1}$$

الأسية ذات الأساس a

مجموعة التعريف: \mathbb{R}

العلاقة: $(a > 0)$

$$f(x) = a^x \begin{cases} f(x) = 1 & ; a = 1 \\ f(x) = e^{x \ln a} & ; a > 0 ; a \neq 1 \end{cases}$$

الاشتقاقية:

$$(a^x)' = \ln a \times e^{x \ln a}$$

$0 < a < 1$

$f'(x) < 0$ اذن f متناقصة تماما.

$$a^x < a^y \iff x > y$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	0

الطول
من
إشارة $\ln a$

$0 < a < 1$

$a > 1$

$f'(x) > 0$ اذن f متزايدة تماما

$$a^x > a^y \iff x > y$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

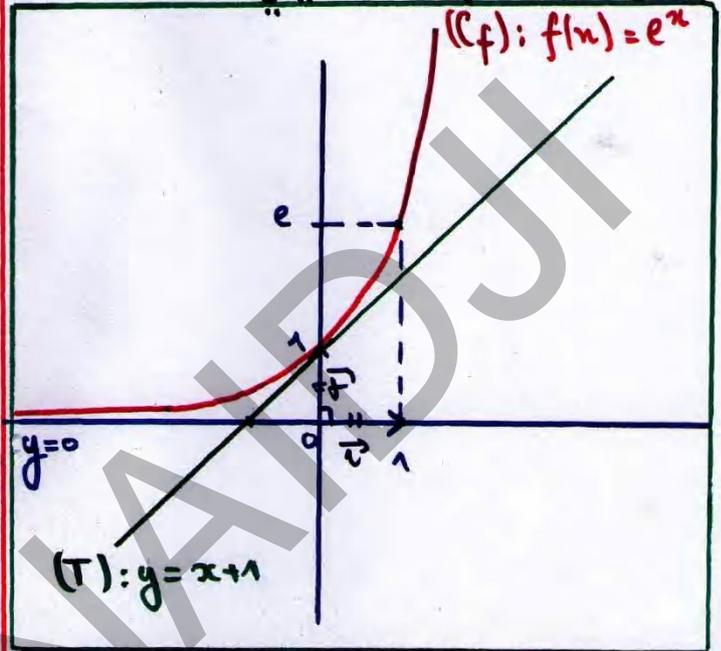
$a > 1$

9 / التمثيل البياني لمنحني الحالة e^x :

انطلاقا من جدول التغيرات أو باستعمال

$$\left(\begin{array}{l} f'(x) = e^x \\ f(0) = 1 \end{array} \right) \text{ طريقة Euler}$$

يمكن انشاء (C_f) كما يلي:



10 / الدالة $f = \exp \circ u$

مجموعة التعريف: $D_f = D_u$

العلاقة: $f(x) = e^{u(x)}$

النهايات: (Voir Apres)

الامتارية: إذا كانت u متمرة على مجال I

فإن f متمرة على نفس المجال I

الاشتقاقية: إذا كانت u قابلة للاشتقاق

على مجال I فإن f قابلة للاشتقاق على I

وبالتالي المشتقة

$$(e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

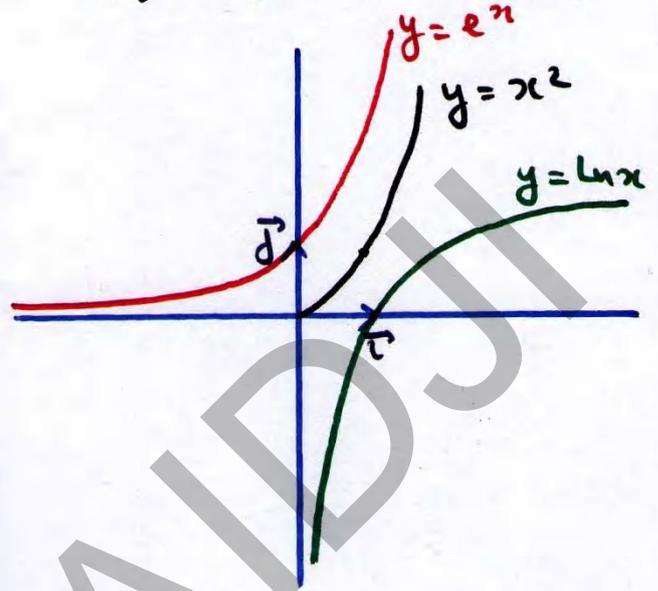
إشارة $f'(x)$ من إشارة $u'(x)$

تغيرات f : لها نفس تغيرات u .

التزايد المقارن (الدالة الأسية)

1/ مدخل:

عند $+\infty$: $e^x > x^n > \ln x$



$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

2/ ازالة ح.عت: نهايات تهيبة:

النهاية التهيبة	حساب النهاية عند
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	
المقلوب $\leftarrow 0^+$	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x$	
$\left. \begin{matrix} \rightarrow 0^- \text{ } n=2k \\ \rightarrow 0^+ \text{ } n=2k+1 \end{matrix} \right\}$	
المقلوب $\leftarrow \infty$	

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

عند عدد

المقلوب $\leftarrow 1$

في هذا الجدول يشرط التماثل (voir Apres)

3/ طرق استعمال هذه النهايات الشهيرة:

1/ التحليل باخراج x و e^x كعامل مشترك:

e^x كعامل مشترك \leftarrow

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \times x^{+\infty}}{e^x \times (1 + \frac{1}{e^x})^0} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1)e^x - 3e^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(\frac{2x}{e^x} - \frac{1}{e^x} - 3 \right) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 3e^x + 4}{e^x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (e^x - 3 + \frac{4}{e^x})}{e^x (1 + \frac{2}{e^x})} = +\infty$

x كعامل مشترك \leftarrow

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x+1} - 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left(\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{2x+3}{x+1} \right) = +\infty$

1/4 تبديل المتغير:

وذلك إذا كانت العبارة فيها e^x فقط

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 3e^x + 4}{e^x + 2}$$

$y \rightarrow 0^+$ فإن $x \rightarrow -\infty$ و $y = e^x$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^2 - 3y + 4}{y + 2}$$

$$= 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 3e^x + 4}{e^x + 2}$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2 - 3y + 4}{y + 2}$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} (y)$$

$$= +\infty$$

1/5 إنشاء القائل:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x} \cdot \frac{e^{2x+1}}{2x+1}$$

$$= +\infty$$

1/6 باستخدام خواص اللوغاريتم

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{2x} - e^x + 1) - 2x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x})) - 2x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = 0$$

(Voir Apres cours $\ln x$): ←

1/2 النشر:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x e^x - e^x$$

$$= 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x - 1)e^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x + 2x e^x - e^x = 0$$

1/3 الانتقال بين $e^{u(x)}$ و $e^{-u(x)}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{+\infty}}{1 + e^{-x}} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 e^{-x} + x e^{-x} + e^{-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(-x)^2 e^{-x} - (-x) e^{-x} + e^{-x}}$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 3e^x + 4}{e^x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+\infty} - 3 + 4e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}$$

$$= +\infty$$

الدوال اللوغاريتمية

ADEL KADUJ

4/ دراسة اشارة عبارة وحل مترجمات:

1/ عبارة من الدرجة الاولى:

* قاعدة اشارة $\alpha \ln(ax+b) + \beta$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$\alpha \ln(ax+b) + \beta$		عكس α	نفس α

x_0 هي القيمة التي تقدم العبارة

$$\alpha \ln(ax+b) + \beta = 0$$

* حل مترجمات: بعد تعيين D

* نضع $\alpha \ln(ax+b) + \beta > 0$ ثم نحل المترجمة حتى نجد المجال الذي تكون فيه العبارة موجبة
* تكون العبارة سالبة في المجال المتبقي من D.

$u(x) > v(x) \Leftrightarrow \ln u(x) > \ln v(x) *$
$u(x) > e^a \Leftrightarrow \ln u(x) > a *$
$u(x) < e^a \Leftrightarrow \ln u(x) < a *$

2/ عبارة من الدرجة 2 أو أكثر:

$$a(\ln x)^2 + b \ln x + c$$

بعد تعيين D: نكمل تبديل المتغير $y = \ln x$

$$ay^2 + by + c$$

$\Delta < 0$: اشارة a
$\Delta = 0$: اشارة a
$\Delta > 0$: نحل العبارة $(\ln x - y_1)(\ln x - y_2)$ وندرس اشارة الحداء.

3/ معادلات تتضمن الدالة اللوغاريتمية:

- ← نعين D (داخل \ln موجب تقالما)
- ← نسط المعادلة باستعمال خواص \ln
- ← نحصل على احدى الحالات.

① $u(x) = v(x) \Leftrightarrow \ln u(x) = \ln v(x) *$

② $u(x) = e^b \Leftrightarrow \ln u(x) = b *$

③ تبديل المتغير اذا كانت كل البجائل مكتوبة على الشكل $\ln \dots$

$ay^2 + by + c = 0 \Leftrightarrow a(\ln x)^2 + b \ln x + c = 0$

$$\begin{cases} y = \ln x \\ x = e^y ; x > 0 \end{cases}$$

تطبيق: حل في R مايلي:

- * $\ln(x^2 - 1) = \ln x$
- * $\ln(2x - 1) = 2$
- * $\ln(x - 1)(x + 2) = 2 \ln 2$
- * $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = 2 \ln 2$
- * $2[\ln x]^2 + (\ln x) - 6 = 0$
- * $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = \ln(2x - 3) + \ln 4$
- * $\ln|x| + \ln|4 - x| = \ln|2x - 1| + \ln 3$
- * $\begin{cases} \ln 2x + \ln 3y = \ln 6 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$
- * $\begin{cases} \ln x - \ln y = -\ln 3 \\ x^2 + 2y = 16 \end{cases}$

3/ اشارة عبارة تتضمن الدالة اللوغاريتمية:

• حل المعادلة $A(x) = 0$

• إذا تم تقبل المعادلة أي حل في مجال ما فإن:

$A(x) > 0$: إذا كان $A(0) > 0$ مثلا

$A(x) < 0$: إذا كان $A(0) < 0$ مثلا

4/ اشارة $\ln x$

$x \in]0, +\infty[$

$\ln x < 0$: $0 < x < 1$

$\ln x = 0$: $x = 1$

$\ln x > 0$: $x > 1$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		0	+

5/ انظر درس اشارة عبارة + حل مترجمات:

6/ تطبيق: بعد تعيين

• حل المترجمات:

$+\ln(2x-1) > 2$

• $\ln(x+2) \leq 5$

• $-\ln(x^2-1) < \ln(x)$

• $\ln(x-1)(x+2) \leq 2\ln 2$

• $\ln(x-1) + \ln(x+2) \leq 2\ln 2$

• $\ln(35-8x) > 3\ln 2 + \ln x^2$

• ادرس اشارة العبارة:

$(1+\ln x)(1-\ln x)(2-\ln x)(e^x-3)(e^{2x}-4)$

(T) يقع دو صامتت (f)

العدد المشتق عند 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

التقريب التآلفي عند 1:

$$\ln(1+h) = h, \quad h \rightarrow 0$$

5/ إشارة المشتقة:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*: f'(x) > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x}; \quad x > 0$$

الدالة \ln متزايدة قاطعة على $]0, +\infty[$

6/ جدول التغيرات:

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$			+	
$f(x)$	$-\infty$		0	$+\infty$

7/ انقط التقاطع مع المحاور:

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \text{مع } (x, x)$$

$$x = 1 \Leftrightarrow x = e^0 \Leftrightarrow$$

$$(f) \cap (x, x) = \{A(1; 0)\}$$

مع (y, y) : لا يمكن أصلاً حساب $f(0)$

لأن 0 لا ينتمي إلى مجموعة تعريف

الدالة \ln .

88

الدالة اللوغاريتمية النييرية

1/ تعريف:

$$D_f = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$$

عارة $f(x)$:

$$f:]0, +\infty[\longrightarrow]-\infty, +\infty[$$

$$x \longmapsto y = f(x) = \ln x$$

2/ النهايات:

معصور الترتيب م م عمودي لـ (f) عند م م	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
احتمال وجود م م م م عند م م	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$	
(f) يمثل فرع لا نهائي عند م م باتجاه (x)	

3/ الاستمرارية:

الدالة $\ln x$ متمرة على $]0, +\infty[$

4/ الاتساقية:

f قابلة للاتساق على $]0, +\infty[$ وبالتالي

المشتقة هي f حيث:

$$(\ln x)' = (\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

الجماسات:

مثلاً عند النقطة ذات الفاصلة 1, (f)

يقبل مماساً (T): $y = x - 1$

٨٠ / الدالة $f = \ln u$

* مجموعة التعريف:

الدالة	مجموعة التعريف
$\ln u(x)$	$u(x) > 0$
$\ln u(x) $	$u(x) \neq 0$
$\ln (u(x))^n$ زوجي	$u(x) \neq 0$
$\ln (u(x))^n$ فردي	$u(x) > 0$
$[\ln u(x)]^n$	$u(x) > 0$
$\frac{1}{\ln(u(x))}$	$u(x) > 0$ $u(x) \neq 1$
$\ln \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)$	$A(x) \times B(x) > 0$
$\ln \left \frac{A(x)}{B(x)} \right $	$\begin{cases} A(x) \neq 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$

* العبارة: $f(x) = \ln[u(x)]$

* النهايات: (Voir Apres)

* الاستمرارية: إذا كانت u موجبة تماما

ومتستمرة على مجال I فالدالة $f = \ln u$

متستمرة على نفس المجال I

* الاشتقاقية: إذا كانت u موجبة تماما

وقابلة للاشتقاق على مجال I

فإن الدالة $f = \ln u$ قابلة للاشتقاق

على نفس المجال I و:

$$[\ln(u(x))]'' = [\ln |u(x)|]'' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

* تغيرات f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $u'(x)$
لأن $f = \ln(u(x))$ مع $u(x) > 0$

٨١ / إشارة الدالة $\ln x$:

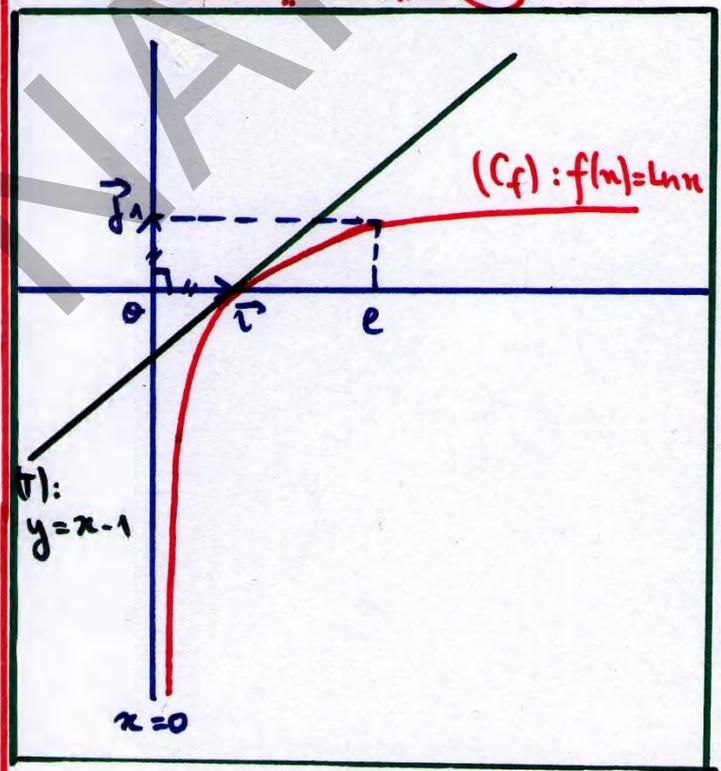
$$\ln x < 0 : 0 < x < 1$$

$$\ln x > 0 : x > 1$$

$$\ln x = 0 : x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $\ln x$		-	+
وضع (f)		تحت (f)	فوق (f)
(\ln)		(x, x)	(x, x)
و (x, x)		$A(1, 0)$	(x, x)

٩ / التمثيل البياني لمنحنى الدالة $\ln x$:



اثارة Ln u(x)

$u(x) > 0$

$\ln u(x) < 0 \quad 0 < u(x) < 1$

$\ln u(x) = 0 \quad u(x) = 1$

$\ln u(x) > 0 \quad u(x) > 1$

$\ln u(x) = 1 \quad u(x) = e$

$u(x)$	0	1	e	$+\infty$
$\ln u(x)$		-	+	

II الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a

مجموعة التعريف: $]0, +\infty[$

العبرة $a > 0; a \neq 1$

$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

الاشتقاقية:

$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$

$0 < a < 1$

f متناقصة كلما $f'(x) < 0$

$\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y$

$0 < a < 1$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

النهاية حسب اشارة ln a

$a > 1$

اذن f متزايدة كلما $f'(x) > 0$

$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$

$a > 1$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس e:

$f(x) = \ln x$

الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس 10:

$f(x) = \log_{10}(x) = \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$\log 10 = 1$	$0 < x < 1$	الدالة log متزايدة
$\log 10^n = n$	$x > 1$	كلما على $]0, +\infty[$
$n \leq \log x \leq n+1 \Leftrightarrow 10^n \leq x \leq 10^{n+1}$		

طرق استعمال هذه النهايات الشهيرة:

1/ التحليل باخراج x كعامل مشترك:

← خارج اللوغاريتم

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x - \ln(1 - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2x) \left(\frac{x^2 + 3x}{-2x + 1} - \frac{\ln(1 - 2x)}{1 - 2x} \right) = +\infty$$

← داخل اللوغاريتم

وذلك لما كان أس x الذي داخل \ln أكبر من أس x الذي خارج اللوغاريتم

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left[x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right]}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} \right] = 0$$

2/ النشر

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (x+2) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x + 2 \ln x = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x + x \ln x = 0$$

التزايه المقارن (الدالة اللوغاريتمية)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

ازالة حعت: نهايات شهيرة:

النهاية الشهيرة	حساب النهاية عند
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$ المقلوب $\leftarrow +\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0^-$ المقلوب $\leftarrow -\infty$	0^+
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ المقلوب $\leftarrow 1$	عدد

في هذا الجدول يشترط التماثل

7/ تبديل المتغير

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\ln x)^2 - \ln x + 3]$$

$y \rightarrow +\infty$ عند $x \rightarrow +\infty$: $y = \ln x$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} y^2 - y + 3$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [(\ln x)^2 - \ln x + 3]$$

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} y^2 - y + 3$$

$$= +\infty$$

8/ الانتقال بين اللوغاريتمية والأيية

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^n}{e^y} = 0^+$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln x)^n = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y \cdot y^n$$

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} y^n e^y = 0$$

وذلك بوضع $y = e^x$

9/ باستعمال خواص $\ln \Leftarrow$ هامة جدا

العبارة التي داخل \ln فيها الالفة.
تعمل الطريقة التالية لازالة ح وتو كذا
اطها ر المقيم المقاربه المائل

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$

$$= \ln[e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x})]$$

$$= \ln e^{2x} + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$$f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

• (D): $y = 2x \leftarrow +\infty$ عند $x \rightarrow +\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})] = +\infty$$

3/ توحيد المقامات

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2x-1} + \ln(2x-1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 + (2x-1)\ln(2x-1)}{(2x-1)} = +\infty$$

4/ انشاء التماثل

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x+2} \times \frac{x+2}{x}$$

$$= 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x^2 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{2x^2 - x + 3} \right)$$

$$= 0$$

5/ استخدام خواص اللوغاريتم

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\ln x - \ln(x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2) - \ln(x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$$

= +\infty

6/ باستخدام تعريف العدد الممتق

$$\bullet \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = (\ln x)'_{x=e}$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)_{x=e} = \frac{1}{e}$$

أسئلة نظرية حول

الدوال الأسية و

اللوغاريتمية

الدوال الأسية واللوغاريتمية (أمثلة نظرية)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} \quad ; \quad D_f = [0, +\infty[$$

$$f'(x) = e^x - x > 0 \quad \forall x \in D_f$$

x	0	+∞
f'(x)	+	
f(x)	↗	

$$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2} \Leftrightarrow e^x - \frac{x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2} : \text{ لكن عند } +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{اذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{-x}} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y}{e^y} \quad y = -x \\ &= 0^- \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

A عدد حقيقي كبير جدا ($A \rightarrow +\infty$) حيث $A(x)$
 هل يوجد عدد حقيقي كبير جدا B يحقق $x > B$ ؟
 $\ln x > A \Leftrightarrow x > e^A$ يمكن أخذ B
 على الأقل e^A محققة.

١٨ اثبات النهايات الشهيرة:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$f(x) = e^x - x \quad ; \quad D_f = [0, +\infty[$$

$$f'(x) = e^x - 1 > 0 \quad \forall x \in D_f$$

x	0	+∞
f'(x)	+	
f(x)	↗	

$$e^x > x \Leftrightarrow e^x - x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$e^x > x \quad \text{لكن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{اذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = (e^x)'_{x=0} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{\ln x^n}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{n \ln x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - n \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x(1 - \frac{n \ln x}{x})}{1}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^n}{e^{-x}} / y = -x \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(-y)^n}{e^y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{y^n}{e^y} \\ &\quad \begin{array}{l} \swarrow \text{فردی} \quad \searrow \text{زوجی} \\ 0^- \quad \quad \quad 0^+ \end{array} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y^{\frac{1}{n}}}{y} / y = x^n \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{\ln y}{y} = 0^+ \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0^-}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^n \ln\left(\frac{1}{y}\right) / y = \frac{1}{x} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^n} x - \ln y = \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{\ln y}{y^n} \\ &= 0^- \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{y}\right) ; y = \frac{1}{x} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} -\ln(y) = -\infty \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0^+ / y = \ln x$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{y \rightarrow -\infty} y e^y = 0^- / y = \ln x$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \\ &= (\ln x)'_{x=1} = \left(\frac{1}{x}\right)_{x=1} = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$h = x - 1 \quad \text{بص } x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h+1)}{h} = 1$$

$$(\ln |u|)' = (\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\ln |u|)' \begin{cases} \rightarrow u > 0 : (\ln u)' = \frac{u'}{u} \\ \rightarrow u < 0 : (\ln -u)' = \frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u} \end{cases}$$

Equations fonctionnelles

دوال تحول مجموع الجداء:

الدوال غير المعدومة f والقابلة للاتفاق على \mathbb{R} والتي تحقق من أجل كل عددين حقيقيين x و y

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

هي الدوال

$$x \mapsto e^{kx} ; k \in \mathbb{R}$$

دوال تحول الجداء لمجموع:

كمثال عن هذه الدوال نأخذ الدوال
 $\dots \log_a x, \log_n x, \ln x$

$$\ln(axb) = \ln a + \ln b$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln \left(x + \frac{1}{x}\right)^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{y} \ln(1+y)} \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{بجاء}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(1+y)}{y}} = e$$

2/ اثبات خواص أخرى لـ e^x و $\ln x$:

$$e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = e^{\frac{x}{2} \times 2} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(x) = e^x$$

$$\exp x = \exp(1 \times x) = (\exp 1)^x$$

$$\exp 1 = e = 2.718 \dots$$

$$\exp x = e^x \quad \text{اذن}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x \Rightarrow f'(1) = 1$$

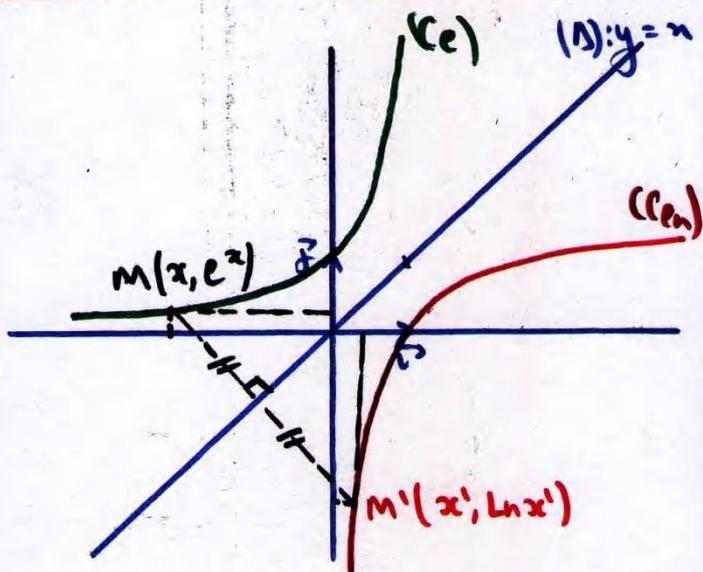
$$\begin{aligned} f(x) = e^{\ln x} &\Rightarrow f'(x) = (\ln x)' e^{\ln x} \\ &= (\ln x)' \times x \end{aligned}$$

$$(\ln x)' \times x = 1$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

15 اثبات بعض التناضرات:

(C_e) و (C_{ln}) متناظران بالنسبة للمنهف الأول



$$M'(b,a) \in (C_{ln}) \iff M(a,b) \in (C_e)$$

بهازي:

$$b = e^a \iff M(a,b) \in (C_e)$$

$$\ln b = a$$

$$M(b,a) \in (C_{ln}) \iff$$

اذ لكل نقطة $M(a,b) \in (C_e)$ نقطة اخرى $M'(b,a) \in (C_{ln})$

اثبات ان M' نظيرة M بالنسبة للمنهف الاول

$$M(a,b) / M'(b,a) / \overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} b-a \\ a-b \end{pmatrix}$$

$$(\Delta): y=x / \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{v} = (b-a) + (a-b) = 0$$

اذن (Δ) عمودي على (MM')

$$I \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2} \right) [MM']$$

$$x_I = y_I \implies I \in (\Delta)$$

اذن (Δ) محور $[MM'] \iff M'$ صورة M بالانعكاس
 \iff لكل M من (C_e) صورة M' من (C_{ln}) تناضرا
 بالنسبة للمنهف الاول $\iff (C_e)$ و (C_{ln}) متناظران
 بالنسبة للمنهف الاول.

3 الدوال العكسية:

f	f^{-1}
e^x	$\ln x$
a^x	$\log_a x$
10^x	$\log x$
x^n	$\sqrt[n]{x}$

$$* f[f^{-1}(x)] = x$$

* (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ متناظران بالنسبة للمنهف الاول $(\Delta): y=x$

4 نظرة عن الدالة الجذر النوني:

* مجموعة التعريف: $[0, +\infty[$

* العبارة: $n \in \mathbb{N}^*$

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln x} \quad x \neq 0$$

* الاشتقاقية:

f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ (غير قابلة

للاشتقاق عنده) وبالتالي المشتقة f'

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx} e^{\frac{1}{n} \ln x}$$

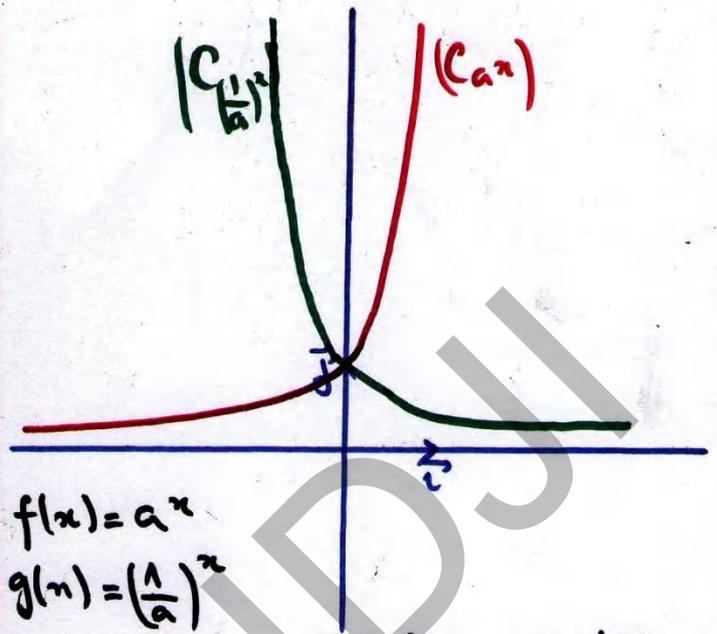
$$* f'(x) > 0$$

* الدالة الجذر النوني متزايدة قاما

على $[0, +\infty[$

* امصلا $f(0) = 0$

(C_{a^x}) و $(C_{(\frac{1}{a})^x})$ متناظران بالنسبة لـ (y, y)



$$f(x) = a^x$$

$$g(n) = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$$g(n) = \left(\frac{1}{a}\right)^n = e^{\ln\left(\frac{1}{a}\right)^n} = e^{n \ln\left(\frac{1}{a}\right)}$$

$$= e^{-n \ln a} = e^{\ln a^{-n}} = a^{-n} = f(-n)$$

(f) انظير (g) بالنسبة لـ (y, y) .

16 دوال تؤول دراستها لدراسة دوال ابيية:

الدالة نجح الزائدية:

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } a$$

. دالة زوجية .

الدالة نجح الزائدية:

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } a$$

. دالة فردية .

N.B. : عند $+\infty$: (C_{sh}) و (C_{ch})

منحنيان متقاربان .

الدوال الأصلية

ADEL NAIDU

الدوال الأصلية

لأثبت أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة، نوجد طريقتان:

← F و G قابلتان للاشتقاق على I

و $F'(x) = G'(x)$

← $F(x) - G(x) = C^{te}$

مثالي

$G(x) = \frac{2x-1}{x-2} + x$ $F(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2}$

أثبت أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة.

3/ الدوال الأصلية لدوال مألوفة:

دوال عددية:

f	F
a	$ax + C$
$x^n ; n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
ex: x	$\frac{1}{2}x^2 + C$
$\frac{1}{x^n} ; n \neq 1$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
ex: $\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C ; x \neq 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C ; x > 0$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C ; x > 0$

1/ مفهوم الدالة الأصلية:

F دالة أصلية لـ f على مجال I معناه:

← F قابلة للاشتقاق على I

← $F'(x) = f(x)$

مثال:

$f(x) = 2x - 3$, $F(x) = x^2 - 3x + 1$

بين أن F دالة أصلية لـ f على \mathbb{R}

2/ مجموعة الدوال الأصلية لدالة:

f تقبل دوالاً أصلية على مجال I وإذا وفقط إذا كانت متممة على هذا المجال

إذا كانت F دالة أصلية لـ f على مجال I فإن كل الدوال $F + C$ هي دوال أصلية لـ f على I

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f والتي نتحقق $F(x_0) = y_0$

مثال:

$f(x) = 2x + \cos x$

• أثبت أن f تقبل دوالاً أصلية على \mathbb{R}
 • عين مجموعة الدوال الأصلية لـ f
 • عين الدالة الأصلية لـ f والتي نتحقق $F(\pi) = -1$

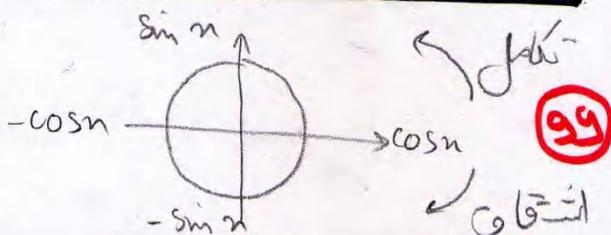
14 عمليات على الدوال الأصلية:

f	F
$u' u^{n, n \neq -1}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
ex: $u'u$	$\frac{u^2}{2} + C$
$\frac{u'}{u^n}, n \neq 1$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + C$
ex: $\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C; u \neq 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C; u \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C; u > 0$
$u'e^u$	$e^u + C$

$u' + v'$	$U + V + C$
$k \cdot u'$	$k \cdot U + C$

$u' \cdot v'$	$U \cdot V$	⚠ jamais
$\frac{u'}{v'}$	$\frac{U}{V}$	

N.B : لايجاد الحالة الأصلية لجداء دالتين، نستخدم التكامل بالتجزئة في بعض الأحيان (voir Apres).



دوال مثلثية:

f	F
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$1 + \tan^2 x$ $= \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$

دوال أسية ولوغاريتمية:

f	F
e^n	$e^n + C$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\ln x$ تجزئة	$x \ln x - x + C$
$\ln(ax+b)$ تجزئة	$\frac{1}{a} (ax+b) \ln(ax+b) - x + C$
$\frac{\ln(x+d)}{x+d}$	$\frac{1}{2} [\ln(x+d)]^2 + C$
$\frac{1}{x \ln x}, \frac{u'}{u}$	$\ln[\ln x] + C$
$\frac{1}{(ax+b) \ln(ax+b)}$	$\ln[\ln(ax+b)] + C$

قواعد تكامل لا تبرهن بالتجزئة

$$+ \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{\alpha}{x - a} + \frac{\beta}{x + a}$$

$$* \frac{f(x)}{g(x) \times h(x)} = \frac{\alpha}{g(x)} + \frac{\beta}{h(x)}$$

4 / دوال مشتقة:

$$\cos u \times \cos v = \frac{1}{2} [\cos(u-v) + \cos(u+v)]$$

$$\sin u \times \sin v = \frac{1}{2} [\cos(u-v) - \cos(u+v)]$$

$$\sin u \times \cos v = \frac{1}{2} [\sin(u-v) + \sin(u+v)]$$

$$\sin^n x \cos^m x, \cos^n x, \sin^n x$$

نحول العبارة إلى الشكل u^n وذلك باستعمال الدساتير التالية:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} [1 + \cos 2x]$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} [1 - \cos 2x]$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ (تأديراً)}$$

15 / إيجاد علاقة بين f' و f'' :

لتكن f دالة معرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$f(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x$$

$$\text{تحقق أن } f(x) - 2f'(x) + f''(x) = 4e^x$$

عين دالة أصلية لـ f .

$$F(x) = 2f(x) - f'(x) - 4 \int e^x$$

$$F(x) = 2f(x) - f'(x) - 4e^x + C$$

15 / تقنيات لإيجاد الدوال الأصلية:

1 / اظهر أحد الأشكال u^n, u^m, \dots وذلك بالضرب والقسم في أعداد معينة:

$$f(x) = (x+1)(x^2+2x+5)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (2x+2)(x^2+2x+5)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{2} u' u^2 \text{ tq: } u(x) = x^2+2x+5$$

$$F(x) = \frac{1}{6} (x^2+2x+5)^3 + C$$

$$g(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{2} \times \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$g(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{3}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$$

$$\text{tq } u(x) = x^2+1$$

$$G(x) = 3\sqrt{x^2+1} + C$$

2 / تغيير شكل الدالة في التقرين قبل حساب دالتها الأصلية:

مثال: f دالة معرفة على $]\ln, +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x - 1}$$

$$f(x) = e^x + a + \frac{be^x}{e^x - 1}$$

نترجم دالة أصلية للدالة f .

3 / دوال ناطقة:

يجب أن نغير شكلها كما يلي:

$$* \frac{ax+b}{cx+d} = \alpha + \frac{\beta}{cx+d}$$

$$* \frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'} = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{a'x+b'}$$

$$+ f(x) = \cos^3 x = (1 - \sin^2 x) \cos x$$

$$\cdot f(x) = \cos^2 x \sin x = -u^2 u'$$

$$\begin{aligned} \cdot f(x) &= \sin^2 x \cos^3 x \\ &= (\sin x \cos x)^2 \cos x \\ &= [\sin^2 x (1 - \sin^2 x)] \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot f(x) &= \sin^4 x = (\sin^2 x)^2 \\ &= \left[\frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{4} \left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \right] \end{aligned}$$

$$\cdot f(x) = \cos 2x \cdot \cos 4x$$

$$\cdot f(x) = \sin 3x \cdot \sin x$$

$$\cdot f(x) = \sin 3x \cdot \cos 2x$$

$$\begin{aligned} \cdot f(x) &= \cos^2 x \cdot \sin^2 x \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos 2x) (1 + \cos 2x) \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \right] \end{aligned}$$

6/ دراسة دالة أصلية دون حسابها:

$F(x) = \int f(x) dx$	$F(a) = b$	← دالة معرفة بـ
$F(a) = 0$	$f(x) = \dots$	←

الهدف دراسة تغيرات F دون حسابها.

تمارين:

ص 154 / ص 181 / ص 91 ص 69

504

6/ تطبيقات:

عين مجموعة الدوال الأصلية لـ f في كل حالة

$$\cdot f(x) = (x^2 + 3)(2x - 1)$$

$$\cdot f(x) = x - \frac{3}{x}$$

$$\cdot f(x) = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\cdot f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$\cdot f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2}$$

$$\cdot f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$\cdot f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$$

$$\cdot f(x) = \frac{1}{x} \ln^2 x$$

$$\cdot f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\cdot f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 3}}$$

$$\cdot f(x) = \frac{2x^2 + 10x + 9}{x^2 + 3x + 2}$$

$$= 2 + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+2}$$

$$\cdot f(x) = \frac{2x^4 + 13x^2 + x + 18}{(x+1)(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{2}{x+1} + \frac{x}{(x^2+3)^2}$$

$$\cdot f(x) = \cos^2(2x) = \frac{1}{2} (1 + \cos 4x)$$

$$\cdot f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x = u^3 u'$$

$$\cdot f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cdot f(x) = \frac{3}{x+1}$$

$$\cdot f(x) = 4\sin 2x + 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cdot f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3}$$

$$\cdot f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$$

$$\cdot f(x) = \frac{2\cos x}{\sin x}$$

$$\cdot f(x) = \frac{1}{(x+1)^n}$$

$$\cdot f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^3}$$

$$\cdot f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$$

$$\cdot f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x-4}$$

$$\cdot f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$$

المعادلات التفاضلية

ADEL M. AL-DJ

المعادلات التفاضلية .

1/ مفهوم معادلة تفاضلية

* نسمي معادلة تفاضلية كل معادلة تحتوي على $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ حيث $y = f(x)$ و $y', y'', \dots, y^{(n)}$ هي المشتقات المتتالية للدالة f .

* المجهول في المعادلات التفاضلية هو الدالة $y = f(x)$

* مجموعة حلول المعادلة التفاضلية هي كل الدوال التي تحقق هذه المعادلة التفاضلية.

الحل

- $y = C e^{\frac{2}{3}x}$
- $y = C e^{-\frac{1}{2}x} + 1$
- $y = C_1 \cos \pi x + C_2 \sin \pi x$

3/ معادلات تفاضلية باستعمال الدوال الأصلية

* f دالة مستمرة على I و F دالتها الأصلية.
* F دالة مستمرة على I و G دالتها الأصلية.

المعادلة التفاضلية	الحل العام
$y' = f(x)$	$y = F(x) + C$
$y'' = f(x)$	$y = G(x) + C_1 x + C_2$

أمثلة: حل المعادلات التفاضلية التالية:

1/ $y' = \frac{1}{x^2}$

2/ $y'' = \sin x$

1/ $y = -\frac{1}{x} + C$

2/ $y = -\sin x + C_1 x + C_2$

الحل

4/ معادلات تفاضلية تحتوي على y, y', y'' ، دالة f

المعادلة التفاضلية	الحل العام
$y' - ay = f(x)$	الحل الخاص + $y = C e^{ax}$

تحقق أن a حل خاص؟ عين a و a حتى تكون a حل خاص

2/ معادلات تفاضلية تحتوي على y, y', y'' فقط

المعادلة التفاضلية	الحل العام
$y' = ay; a \neq 0$	$y = C e^{ax}$
$y' = ay + b; a \neq 0$	$y = C e^{ax} - \frac{b}{a}$
$y'' = -w^2 y$	$y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$

أمثلة: حل المعادلات التفاضلية التالية:

1/ $3y' - 2y = 0$

2/ $2y' + y = 1$

3/ $y'' + \pi^2 y = 0$

مثال:

$$(E): y' + 2y = 6x - 1$$

1/ تأكد ان $p(x) = 3x - 2$ حل خاص لـ (E)

ب- عين $p(x)$ كثير حدود من الدرجة الأولى والذي هو حل خاص للمعادلة (E)

2/ بين ان y حل للمعادلة (E) معناه

$$z = y - p \text{ حل للمعادلة التالية}$$

$$(E'): z' + 2z = 0$$

3/ حل للمعادلة (E')

4/ بين ان حلول المعادلة (E) تكتب

$$y = z + p$$

5/ استنتج حلول المعادلة (E)

الحل:

السؤال 1/

حل لـ (E) معناه $p' + 2p = 6x - 1$!

$$\begin{aligned} p'(x) + 2p(x) &= 3 + 2(3x - 2) \\ &= 3 + 6x - 4 \\ &= 6x - 1 \end{aligned}$$

محققة

اذن $p(x) = 3x - 2$ حل خاص لـ (E).

السؤال 2/ ب: ايجاد $p(x)$

$p(x) = ax + b$ حل لـ (E) معناه

$$p'(x) + 2p(x) = 6x - 1$$

$$a + 2(ax + b) = 6x - 1$$

$$a + 2ax + 2b = 6x - 1$$

$$(2a)x + (a + 2b) = 6x - 1$$

$$\begin{cases} 2a = 6 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow p(x) = 3x - 2$$

السؤال 2/:

$$y \text{ حل لـ (E): } y' + 2y = 6x - 1$$

$$p \text{ حل خاص لـ (E): } p' + 2p = 6x - 1$$

$$\text{بالطرح نجد: } y' - p' + 2y - 2p = 0$$

$$(y - p)' + 2(y - p) = 0$$

نسمي $z = y - p$ ، منه فان

$$z = y - p \text{ حل للمعادلة } z' + 2z = 0 \text{ (E')}$$

السؤال 3/:

$$(E'): z' = -2z \Rightarrow z = Ce^{-2x}$$

السؤال 4/ اثبات ان $y = z + p$

لدينا $z = y - p$ اذن $y = z + p$.

السؤال 5/ حلول المعادلة (E):

حلول المعادلة (E) هي $y = z + p$

$$\begin{cases} z = Ce^{-2x} \\ p = 3x - 2 \end{cases} \text{ حيث}$$

$$\text{اذن } y = Ce^{-2x} + 3x - 2$$

5/ تعيين حل خاص بمعرفه الحل العام ونشرط

* كل معادلة تفاضلية تقبل لا نهاية من الحلول

التي لها نفس الشكل المشترك (الحل العام)

* بتغير الثوابت C_1, C_2, \dots, C_n نحصل على حلول مختلفة.

* في بعض الأحيان يضاف الى المعادلة

التفاضلية شرط من اجل تعيين الثابت C

وايجاد الحل الخاص.

* عدد الثوابت المجهولة = عدد الشروط المعطاة

6/ تمارين

تمرين 1: حل في \mathbb{R} المعادلات التفاضلية

1/ $y' = x^3 + 3x^2 - 2$

2/ $y' = e^{2x+1} + \frac{x}{x^2+1}$

3/ $y' = 2 \cos^2 x + \sin 2x$

4/ $y'' = -3x^2 + 2x + 1$

5/ $y'' = x + 1 + e^{-x}$

6/ $y'' = 2 \sin^2 x + 2x$

7/ $(x^2+1)y' = x$ / $y(+2) = \ln 10$

8/ $y' - 2y = 0$ / $y(1) = e^2$

9/ $y'' = -y$

10/ $y'' + 4y = 0$

تمرين 2:

(E)... $y' + y = \sin 2x$

عين a و b حتى تكون الدالة u حل خاص لـ (E) حيث $u(x) = a \cos 2x + b \sin 2x$ ثم عين الحل العام لـ (E) والحل الخاص من أجل $y(0) = \frac{1}{2}$

تمرين 3:

(E): $2y' - y + 2 = 0$

برهنا ان (E) تقبل الدالة الثابتة كحل خاص ثم جد الحل العام لـ (E).

عين الحل الخاص الذي يحقق $y(0) = 3$

أمثلة:

1/ عين الحل الخاص للمعادلة $2y' + y = 1$ حيث $y(-1) = 2$

2/ عين الحل الخاص لـ $y'' + \pi^2 y = 0$ حيث $y(\frac{2}{3}) = 0$ و $y(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$

الحل:

السؤال 1:

$y = Ce^{-\frac{1}{2}x} + 1 \Leftrightarrow 2y' + y = 1$

$$\begin{cases} y(-1) = Ce^{\frac{1}{2}+1} \\ y(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ce^{\frac{1}{2}+1} + 1 = 2 \\ c = e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$y = e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} + 1$

اذن

السؤال 2:

$$\begin{cases} y = C_1 \cos \pi x + C_2 \sin \pi x \\ y' = -\pi C_1 \sin \pi x + \pi C_2 \cos \pi x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(\frac{1}{2}) = C_2 \\ y'(\frac{2}{3}) = -\pi C_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi C_2 \left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = C_2 \\ 0 = -\pi C_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi C_2 \left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = \frac{2}{3} \\ C_1 = \frac{-2}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$

$y = \frac{-2}{3\sqrt{3}} \cos \pi x + \frac{2}{3} \sin \pi x$

الحساب التكاملي

ADEL MAJDI

احساب التكامل

2/ خواص التكامل

* من التعريف:

$$\begin{aligned} * \int_a^a f(x) dx &= 0 \\ * \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx \\ * \int_a^b k \cdot dx &= k(b-a) \\ \text{N.B: } \int_a^b dx &= (b-a) \end{aligned}$$

* علاقة شال:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

* خطية التكامل:

$$\begin{aligned} * \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ * \int_a^b k f(x) dx &= k \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

* شفعية دالة:

$$\begin{aligned} * \int_{-a}^a f(x) dx = 0 &\Leftrightarrow \text{فردية} \\ * \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx &\Leftrightarrow \text{زوجية} \end{aligned}$$

1/ تعريف التكامل "المحدود"

f دالة مستمرة على مجال [a, b] و F دالة أصلية لها على هذا المجال (أي دالة أصلية)

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

التكامل من a إلى b لـ f(x) تفاضل x (a هو الحد الأسفل و b الحد الأعلى)

أمثلة: احسب التكاملات التالية:

1/ $\int_{-1}^2 (-3x^2 + 1) dx$	4/ $\int_{-1}^1 (x^2 - 4x + 1) dx$
2/ $\int_0^1 e^{2x-1} dx$	5/ $\int_{\ln 2}^3 \frac{e^x}{e^x + 3} dx$
3/ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$	6/ $\int_0^1 (2x + e^{-x+1}) dx$

الحل:

$$I = \int_{-1}^2 (-3x^2 + 1) dx = \left[-x^3 + x \right]_{-1}^2$$

$$= (-2^3 + 2) - (-(-1)^3 - 1)$$

$$= -6 - 0$$

$$= -6$$

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= (-\cos \pi) - (-\cos -\pi)$$

$$= 1 - 1$$

$$= 0$$

* استقلالية حساب التكامل بالحدود
عن اختيار الدالة الأصلية

دالة مستمرة على $[a, b]$
 F, G, H دوال أصلية لـ f على $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = [G(x)]_a^b$$

$$= [H(x)]_a^b = \dots$$

مثال: احب
 حيث $\int_0^2 f(x) dx$
 $f(x) = 2x + 2$

$$F(x) = x^2 + 2x$$

$$G(x) = x^2 + 2x + 100$$

$$I = \int_0^2 f(x) dx = [F(x)]_0^2 = [x^2 + 2x]_0^2$$

$$= (2^2 + 2 \times 2) - (0^2 + 2 \times 0)$$

$$= 8$$

$$I = \int_0^2 f(x) dx = [G(x)]_0^2 = [x^2 + 2x + 100]_0^2$$

$$= (2^2 + 2 \times 2 + 100) - (0^2 + 2 \times 0 + 100)$$

$$= 8$$

* التكامل غير المحدود:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \int f' = f \quad \int f'' = f'$$

مثال:

$$\int (2x + 2) dx = x^2 + 2x + C$$

* اشارة التكامل + المقارنة:

x عدد كيفي من المجال $[a, b]$

$$f(x) \geq 0 : \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$f(x) < g(x) : \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$$

* المتغير عند حساب التكامل:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt \dots$$

المتغير عند اجراء التكامل او الاشتقاق هو x وطا سواه من الاحرف يعتبر ثابتا

مثال:

$$\int_0^2 (2x + 2) dx = [x^2 + 2x]_0^2 = 8$$

$$\int_0^2 (2t + 2) dt = [t^2 + 2t]_0^2 = 8$$

$$\int_0^2 (2x + 2) dt = (2x + 2)(2 - 0) = 4x + 4$$

$$\int_0^2 (2x) dx = [x^2]_0^2 = 4$$

$$\int_0^2 2x dy = 2x [y]_0^2 = 4x$$

$$\int_0^2 (2x + t) dt = \left[(2x)t + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^2$$

$$= 4x + 2$$

3/ تقنيات لحساب التكامل

1/ استعمال خواص التكامل

فكرة ①: علاقة مثال (في حال وجود قيمة مطلقة)

① احب $I = \int_0^3 |x^2-1| dx$

من اجل كل x من $[0; 1]$: $x^2-1 \leq 0$
 $|x^2-1| = -x^2+1$

من اجل كل x من $[1; 3]$: $x^2-1 \geq 0$
 $|x^2-1| = x^2-1$

$$I = \int_0^3 |x^2-1| dx = \int_0^1 |x^2-1| dx + \int_1^3 |x^2-1| dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2+1) dx + \int_1^3 (x^2-1) dx$$

$$= \int_0^1 (x^2-1) dx + \int_1^3 (x^2-1) dx$$

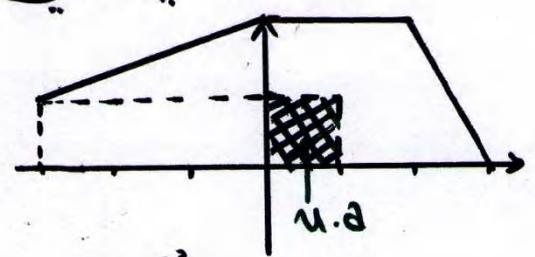
$$= \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^3$$

$$= \frac{2}{3} + 6 - \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{22}{3}$$

② بنفس الطريقة احب $\int_0^6 |x^2-4x| dx$

فكرة ②: العلاقة بين التكامل والمساحات

f دالة تمثيلها البياني كمايلي



احب $I = \int_{-3}^3 f(x) dx$

$$I = \int_{-3}^3 f(x) dx = S \left(\begin{matrix} x=-3 ; x=3 \\ y=0 ; y=f(x) \end{matrix} \right)$$

$$= \frac{(2+1) \times 3}{2} + \frac{(3+2) \times 2}{2}$$

$$= \frac{19}{2} \text{ u.d (u.d = 1cm} \times \text{1cm)}$$

$$= \frac{19}{2}$$

التكامل = المساحة مكتوبة بالوحدة u.d

فكرة ③: ايجاد تكامل معرفة تكاملات اخرى

مثال ①: $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx, I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

احب I, I+J, واستنتج J

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$I+J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3+x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} dx$$

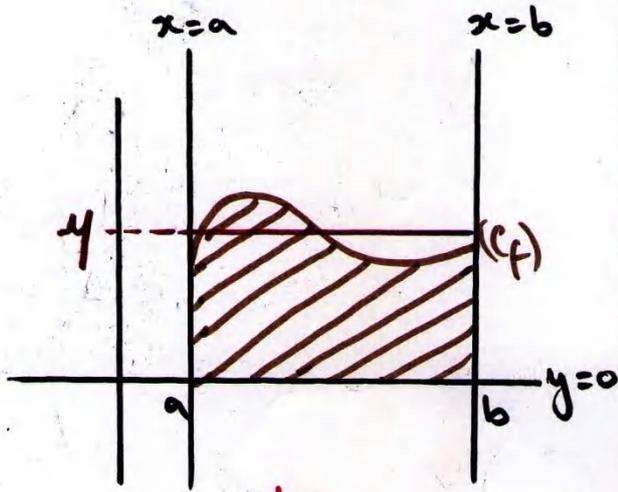
$$= \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$J = (I+J) - I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$J = \frac{1}{2} (1 - \ln 2)$$

مثال ②: $J = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx, I = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

احب I و J



$$y(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

③ حصر القيمة المتوسطة

① إذا كان $m \leq f(x) \leq M : \forall x \in [a, b]$
 minorant Majorant

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

② إذا كان $|f(x)| \leq m : \forall x \in [a, b]$

$$-m \leq f(x) \leq m \quad \text{فان}$$

$$m(a-b) \leq \int_a^b f(x) dx \leq m(b-a)$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt \quad \text{④ تطبيق رقمه}$$

بما أننا لا يمكن إيجاد قيمة مضبوطة لـ I لكن يمكن إيجاد حصر له.

$$0 < \frac{1}{t^2+1} \leq 1 \quad \forall x \in [0; 1] \text{ فان}$$

2. نجد حصر لـ I.

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} (\cos 2x) dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} I+J = \frac{\pi}{4} \\ I-J = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \frac{\pi+2}{8} \\ J = \frac{\pi-2}{8} \end{cases}$$

2/ باستعمال القيمة المتوسطة

① تعريف

f دالة مستمرة على المجال [a, b]، القيمة المتوسطة للدالة f على المجال [a, b] هي:

$$y = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

② التفسير البياني

y هي ارتفاع المستطيل الذي

← قاعدته b-a

← له نفس المساحة المعصورة

بين x=a و x=b و y=0
و المنحني (f)

3/ المكاملة بالتجزئة

مبرهنة

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

برهان

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx$$

$$[uv]_a^b = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx$$

$$\int_a^b u \cdot v' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx$$

طريقة اختيار u و v'

$$\begin{cases} u = \text{اللوغاريتمية} \\ u' = \end{cases}$$

$$\begin{cases} v' = \text{الايه / الجيبية} \\ v = \end{cases}$$

أمثلة عن المكاملة بالتجزئة في التكامل غير المحدود (لحساب الدوال الأصلية)

$$\int \ln x dx \quad \int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

$$\begin{cases} u = \ln x \\ v' = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = x \end{cases}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

مع $x \ln x - x$ دالة أصلية لـ $\ln x$

تطبيق رقم 2

$$f(x) = \frac{x e^x}{1 + e^x}$$

بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R}

$$\frac{e^x}{1 + e^x} \leq f(x) \leq x$$

استنتج حاصل: $J = \int_0^2 f(x) dx$

تطبيق رقم 3

دالة معرفة على $]-1, +\infty[$ بـ:

$$f(x) = 1 + \ln(x+1)$$

ادرس اتجاه تغير f على المجال $[0; e-1]$

استنتج حاصل f .
 استنتج حاصل $J = \int_1^{e-1} f(x) dx$

تطبيق رقم 4

f الدالة المعرفة على $[-1; 1]$ بـ $f(x) = x^2$

احب y القيمة المتوسطة لـ f على المجال $[-1; 1]$ ، فربانيا.

أمثلة عن المكاملة بالتجزئة في التكامل المحدود

$$I = \int_0^1 x e^n$$

$$\begin{cases} u = x \\ v = e^n \end{cases} \quad \begin{cases} u' = 1 \\ v = e^n \end{cases}$$

$$I = [x e^n]_0^1 - \int_0^1 e^n$$

$$I = [x e^n]_0^1 - [e^n]_0^1$$

$$I = e - (e - e^0)$$

$$I = 1$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin x$$

$$\begin{cases} u = x \\ v = \sin x \end{cases} \quad \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$J = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x$$

$$J = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$J = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

احب بالتجزئة، التكاملات التالية

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1/ $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$ | 4/ $\int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2} \, dx$ |
| 2/ $\int_1^0 (x+1)e^x \, dx$ | 5/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3x+2)\sin 2x \, dx$ |
| 3/ $\int_1^2 (x^2+x)\ln x \, dx$ | 6/ $\int_0^1 x(e^x - e^{-x}) \, dx$ |
| | 7/ $\int_0^{\frac{\pi}{8}} x \cos 4x \, dx$ |

$$\bullet \int \ln(x+a) \, dx$$

$$\begin{cases} u = \ln(x+a) \\ v' = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = \frac{1}{x+a} \\ v = x \end{cases}$$

$$\int \ln(x+a) \, dx = x \ln(x+a) - \int \frac{x}{x+a}$$

$$= x \ln(x+a) - \int \left(1 - \frac{a}{x+a}\right) \, dx$$

$$= x \ln(x+a) - \int dx + a \int \frac{1}{x+a} \, dx$$

$$= x \ln(x+a) - x + a \ln(x+a)$$

$$= (x+a) \ln(x+a) - x + C$$

$$\bullet \int \ln(x+a) \, dx$$

$$\begin{cases} u = \ln(x+a) \\ v' = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = \frac{1}{x+a} \\ v = x+a \end{cases}$$

$$\int \ln(x+a) \, dx = (x+a) \ln(x+a) - \int dx$$

$$= (x+a) \ln(x+a) - x + C$$

$$\bullet \int \ln(ax+b) \, dx$$

$$\begin{cases} u = \ln(ax+b) \\ v' = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = \frac{a}{ax+b} \\ v = x + \frac{b}{a} \end{cases}$$

$$\int \ln(ax+b) \, dx = \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln(ax+b) - \int dx$$

$$= \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln(ax+b) - x$$

14 حساب التكامل بتبديل المتغير

مثال ①
احسب $I = \int_0^4 \sqrt{x} dx$

• نتعمل تبديل المتغير:

$$I = \int_0^4 \sqrt{x} dx$$

نضع $x = t^2$ أي $\sqrt{x} = t$

$$x=0 \Rightarrow t=0$$

$$x=4 \Rightarrow t=2$$

dx يجب تعويضها بـ dt

نشتق بالنسبة لـ x نشتق بالنسبة لـ t

$$x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$$

$$dx = 2t dt$$

$$I = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \int_0^2 t \cdot 2t dt$$

$$= \int_0^2 2t^2 dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

• طريقة أخرى:

$$I = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

أمثلة عن استعمال التكامل بالتجزئة قسرتين

$$* \int_0^1 x^2 e^x dx$$

$$\begin{cases} u = x^2 \\ v' = e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = 2x \\ v = e^x \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx$$

$$J = \int_0^1 x e^x dx$$

$$\begin{cases} u = x \\ v' = e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = 1 \\ v = e^x \end{cases}$$

$$J = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [x e^x]_0^1 - [e^x]_0^1$$

$$I = [x^2 e^x]_0^1 - 2J$$

$$I = [x^2 e^x]_0^1 - 2[x e^x]_0^1 + 2[e^x]_0^1$$

$$I = e - 2$$

$$1. \int_0^{\pi} (x^2 + 2x) \sin x dx$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 2x dx$$

$$3. \int_1^e (\ln x)^2 dx$$

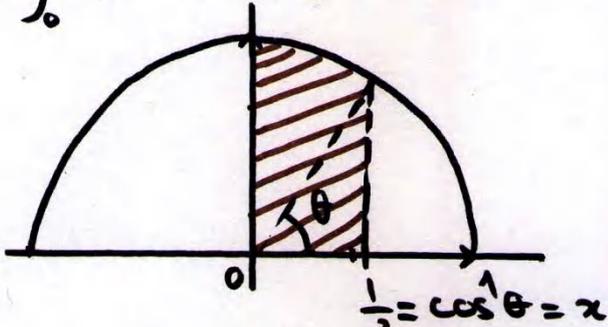
$$I = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right)$$

$$I = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$I = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

الاجابة هندسيا:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$$



$$I = S = S_{\Delta} - S_{\Delta} + S_{\Delta}$$

$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$S_{\Delta} : 90^{\circ} \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\theta \rightarrow S_{\Delta}$$

$$S_{\Delta} = \frac{\pi}{4} \frac{\theta^{\circ}}{90^{\circ}} = \frac{\pi}{4} \frac{\cos^{-1} x}{90} = \frac{\pi}{6}$$

$$S_{\Delta} = \frac{\cos \theta \times \sin \theta}{2} = \frac{\cos \theta \sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{2}$$

$$S_{\Delta} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$I = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

او

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx : \text{مثال 2}$$

نتعمل تبديل المتغير:

$$t = \cos^{-1}(x) \text{ ف } x = \cos t \text{ نضع}$$

$$x=0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

$$dx = -\sin t dt$$

$$x = \cos t$$

$$1 dx = -\sin t dt$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 t} x - \sin t dt$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t} x (-\sin t) dt$$

$$\sin t > 0 : \frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{3}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (+\sin t)(-\sin t) dt$$

$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t dt$$

تغيير كتابة $\sin^2 t$:

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$\cos 2t = 1 - \sin^2 t - \sin^2 t$$

$$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$$

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1 - \cos 2t)}{2} dt \quad \text{او}$$

$$I = -\frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}$$

① أ حسب التكمالات التالية :

$\int_0^1 \frac{dt}{4+t^2}$	$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$	$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$	$\int_1^2 (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$	$\int_1^2 (x + \frac{1}{x^2}) dx$	$\int_0^1 x\sqrt{3+x^2} dx$
$\int_0^1 \frac{x}{2+x^2} dx$	$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$	$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx$	$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^4} dx$	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+7}}$	$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$
$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx$	$\int_0^1 \frac{x^2-x+1}{x^2+1} dx$	$\int_0^1 x(2+x^2)^4 dx$	$\int_0^1 \frac{t+1}{t-2} dt$	$\int_0^1 \frac{t^4}{1+t^2} dt$	$\int_0^2 2x-1 ^3 dx$
$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin x} \cos x dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$	$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$
$\int_0^1 e^x \sqrt{1+e^x} dx$	$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$	$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x} dx$	$\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x} dx$	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$	$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$

② باستعمال مكاملة بالاجزاء أ حسب التكمالات التالية :

$\int_2^3 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) dx$	$\int_1^2 x \ln(x+1) dx$	$\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1}) dx$	$\int_1^2 \ln(x+2) dx$	$\int_1^e \ln x dx$
$\int_{\sqrt{e}}^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$	$\int_0^1 (x^2-2x+3)e^x dx$	$\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$	$\int_0^1 \ln(x^2+1) dx$	$\int_0^1 xe^x dx$
$\int_0^1 \frac{-2x^3}{(x^2+1)^2} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$	$\int_0^2 x\sqrt{2-x} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2x-1) \sin x dx$
$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$	$\int_0^1 (2x+1)e^{-x} dx$	$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)(1+\tan^2 x) dx$	

③ باستعمال مكاملة بتغيير المتغير أ حسب التكمالات التالية :

$\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$ ($t=e^x$)	$\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} dx$ ($t=\sqrt{x+1}$)	$\int_5^{10} \frac{1+\sqrt{x-1}}{x-2} dx$ ($t=\sqrt{x-1}$)	$\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ ($t=1+\sqrt{x}$)	$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ ($t=\sqrt{e^x-1}$)
$\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x}{(e^x-1)\sqrt{e^x-2}} dx$ ($t=\sqrt{e^x-2}$)	$\int_{-2}^{-1} x\sqrt{x+2} dx$ ($t=\sqrt{x+2}$)	$\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$ ($t=\sqrt{x-1}$)	$\int_1^{\sqrt{5}} \frac{4}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx$ ($t=\frac{1}{x}$)	$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$ ($t=\frac{x+1}{2}$)

تطبيقات التكامل

ADEL M. AL-DUJ

2/ حساب المساحات

4/ تطبيقات التكامل

$$S = \int_{L \rightarrow en(u.a)}^{عين} (أعلى - أسفل) dx$$

يسار

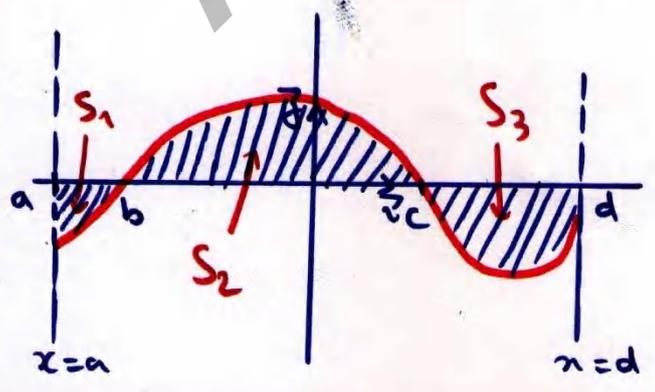
* طرح الأسئلة:

س1: احب المساحة من المستوى المحصور
 بين (f) و (C) و (g) و (h)
 المستقيم (a)
 المستقيم (c)
 والمستقيمين $x=a$ و $x=b$

س2: احب مساحة الجير من المستوى
 المعروف بمجموعة النقط $M(x, y)$
 $a \leq x \leq b$
 $c \leq y \leq d$
 لدراية الوضغ
 التي والاشارة $f(x)$

f دالة متمرة على $[a, b]$ و $(a \leq b)$ و (C) قتيها
 البياني في معلم متعامد (ليس شرط متجانس)

1) المساحة المحددة بـ (C)، محور الفواصل
 والمستقيمان $x=a$ و $x=b$



1/ الدالة الأصلية لدالة والتي تنعدم من أجل
 قيمة معلومة مسبقا

الطريقة التقليدية:

* نعين الدالة الأصلية لـ f باستعمال
 قواعد الدوال الأصلية

* نعين الثابت C من الشرط $F(a) = 0$

الطريقة الثانية باستعمال التكامل:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

مثال:

عين الدالة الأصلية للدالة $\ln x$ والتي
 تنعدم عند 1:

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \ln t dt$$

$$\begin{cases} u = \ln t & u' = \frac{1}{t} \\ v' = 1 & v = t \end{cases}$$

$$F(x) = [t \ln t]_1^x - \int_1^x dt$$

$$F(x) = [t \ln t]_1^x - [t]_1^x$$

$$F(x) = x \ln x - \ln 1^0 - x + 1$$

$$F(x) = x \ln x - x + 1$$

يا $f(x) < \alpha x + \beta$ (تحت)

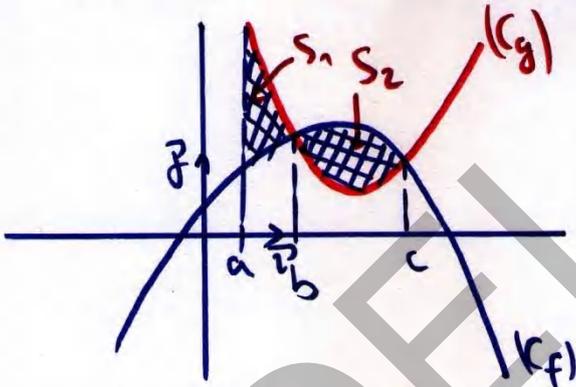
$$S_1 = \int_a^b (\alpha x + \beta - f(x)) dx$$

$$S_3 = \int_c^d (\alpha x + \beta - f(x)) dx$$

ج. الوضع التبي يتغير:

$$S = \int_a^b (\alpha x + \beta - f(x)) dx + \int_b^c f(x) - (\alpha x + \beta) dx + \int_c^d (\alpha x + \beta - f(x)) dx + \int_a^b f(x) dx$$

③ + المساحة المحددة بـ (C) ، (G) ،
المستقيمت $n=a$ و $n=b$



* ندرس الوضع التبي بين (C) و (G) :

يا $f(x) > g(x)$ (فوق)

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

يا $f(x) < g(x)$ (تحت)

$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

ج. الوضع التبي يتغير:

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx + \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

115

وندرس إشارة f ونميز 3 حالات:

يا $f(x) > 0$

$$S_2 = \int_b^c f(x) dx$$

يا $f(x) < 0$

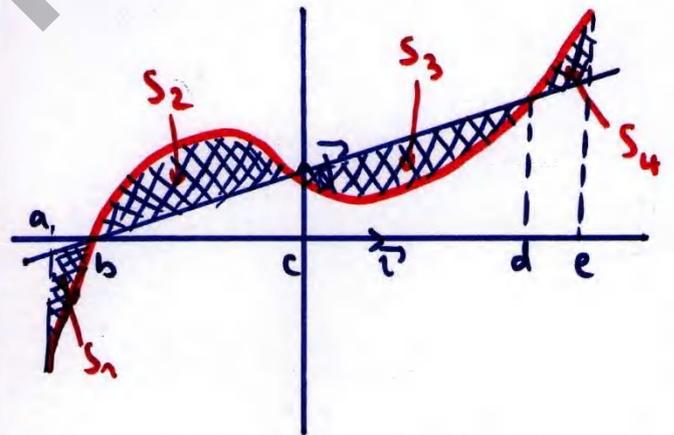
$$S_1 = \int_a^b -f(x) dx$$

$$S_3 = \int_c^d -f(x) dx$$

ج. تغير إشارة f :

$$S = \int_a^b -f(x) dx + \int_b^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx$$

② + المساحة المحددة بـ (C) ، مستقيم $y = \alpha x + \beta$ ،
والمستقيمت $n=a$ و $n=b$



* ندرس الوضع التبي بين (C) و (D) ونميز

3 حالات:

يا $f(x) > \alpha x + \beta$ (فوق)

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - (\alpha x + \beta)) dx$$

$$S_4 = \int_d^e (f(x) - (\alpha x + \beta)) dx$$

4 * ملاحظات هامة جدا:

في كل ما سبق حسبنا d_n (انزل - اعل) ^(ب) حيث a عدد معطى في التمرين ^a

← عوضه: حيث a هو العدد

الذي يحقق $g(n) = 0$... السؤال يكون كما يلي:

1- احب $A(a)$ بدلالة a !

2- بين ان $A(a) = \dots$ (منازل)

مع d لنصل للنتيجة (تم احصر $A(a)$)

← نبتل: حيث n عدد طبيعي أكبر من a ... والسؤال كما يلي:

1- احب $A(n)$ بدلالة n .

2- نعرف المتتالية $u_n = A(n)$

احب $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n)$

3- عين n حتى يكون $A(n) > 8$ أو $A(n) < 6$ مثلا ...

بعد حساب المساحة بالتكامل نجدها

بوحدة $u.d$.

$$\| \vec{f} \| \cdot \| \vec{t} \| = 1 \text{ u.d.}$$

5 * تطبيقات

تمرين 1:

f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ ب:

$$f(x) = x + 2 + \frac{\ln x}{x}$$

1- ادرس f في $(0, 1)$ وذو المعادلة $y = x + 2$ M m لـ (C_f) عند $x = e$

2- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (A)

3- احب S المساحة المحددة بـ (C_f)

$$y = x + 2, \quad x = \frac{1}{e}, \quad x = e$$

تمرين 2:

احب مساحة العيز من المستوى المعرف

$$1 \leq x \leq 3$$

$$3x + 1 \leq y \leq 2x^2 + x + 5$$

تمرين 3:

f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x} \text{ و } (d) \text{ مستقيم معادلة}$$

$$y = 1$$

1- ادرس تغيرات f

2- ادرس الوضع بالنسبة لـ (C_f) و (d)

3- بين ان $f(x) = 0$ تقبل حلا a حيث $-\frac{1}{2} < a < -1$

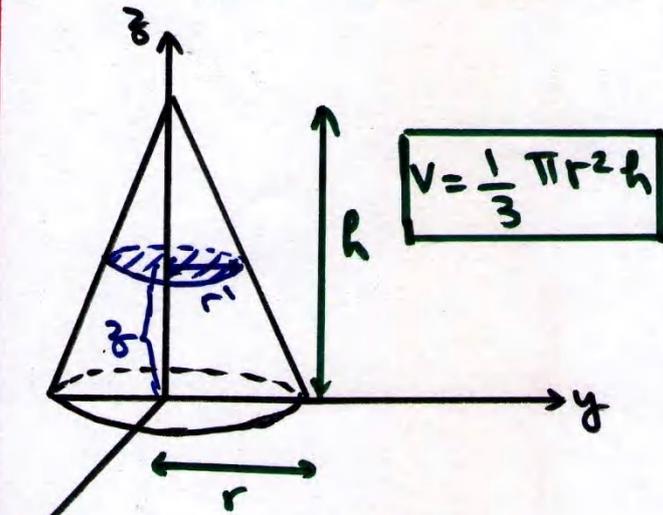
4- احب $A(a)$ مساحة العيز من المستوى

المحدد بـ (C_f) , (d) , $x = 1$, $x = a$

$$A(a) = \frac{a^2}{4}$$

5- جد حصر $A(a)$

مثال ② حجم المخروط الدوراني



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \int_0^h S(z) dz = \int_0^h (\pi r'^2) dz$$

$$S(z) = \pi r'^2 \quad / \quad \frac{r'}{r} = \frac{h-z}{h} \quad / \quad r' = \frac{r(h-z)}{h}$$

$$V = \int_0^h \pi \left(r \left(1 - \frac{z}{h} \right) \right)^2 dz = \pi r^2 \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h} \right)^2 dz$$

$$V = \pi r^2 \int_0^h \left(-\frac{1}{h} z + 1 \right)^2 dz$$

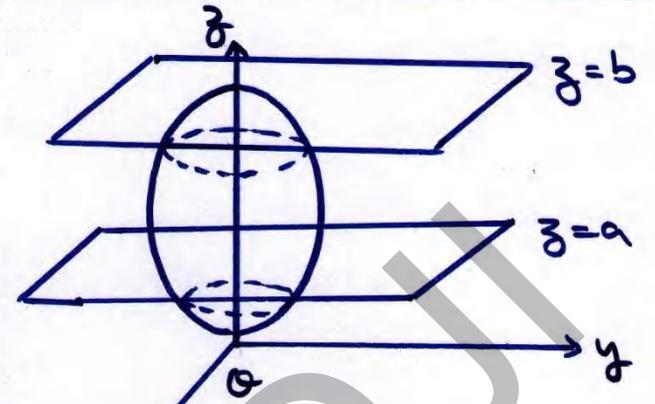
$$V = \pi r^2 (-h) \int_0^h -\frac{1}{h} \left(-\frac{1}{h} z + 1 \right)^2 dz$$

$$V = -\pi r^2 h \left[\left(-\frac{1}{h} z + 1 \right)^3 \right]_0^h \times \frac{1}{3}$$

$$V = -\frac{\pi r^2 h}{3} \left[\frac{(-1+1)^3 - (-1)^3}{-1} \right] = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

13 حساب الحجم

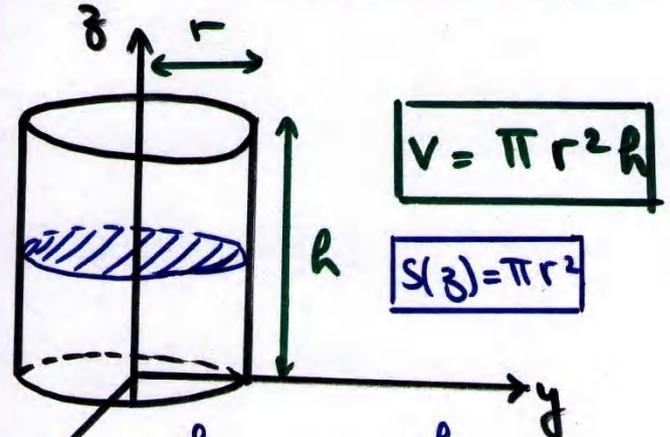
① قواعد حجوم مجسمات بسيطة



$S(z)$ مساحة مقطع الجسم
بمستوى مواز لـ (x, y)
واقعه z حيث $a \leq z \leq b$

$$V = \int_a^b S(z) dz$$

مثال ① حجم الأسطوانة:



$$V = \pi r^2 h$$

$$S(z) = \pi r^2$$

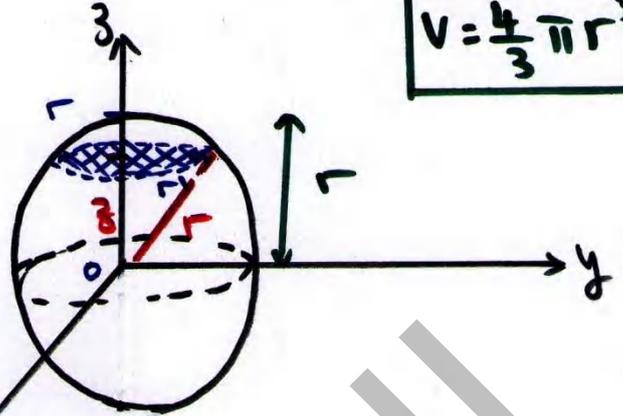
$$V = \int_0^h S(z) dz = \int_0^h (\pi r^2) dz$$

$$V = [\pi r^2 z]_0^h = \pi r^2 h$$

$$V = \pi r^2 h$$

مثال (3): حساب حجم الكرة

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



$$V = \int_{-r}^r S(z) dz = 2 \int_0^r S(z) dz$$

$$S(z) = \pi r^2 / r^2 = r^2 - z^2$$

$$S(z) = \pi (r^2 - z^2)$$

$$V = 2 \int_0^r \pi (r^2 - z^2) dz = 2\pi \int_0^r (r^2 - z^2) dz$$

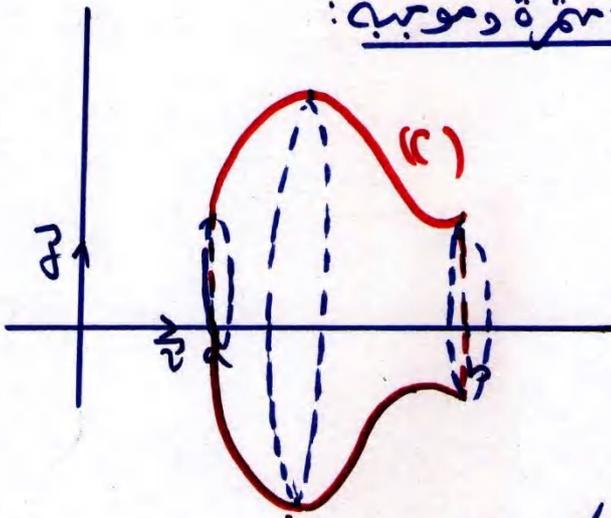
$$V = 2\pi \left[r^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^r$$

$$V = 2\pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - 0 \right] = 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3} \right)$$

$$V = 2\pi \left(\frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

(2) حجم مجسم دوراني متحور (x, n)

f منقرة وموجبة:



ليكن V حجم المجسم المولد عند دوران (f) حول حامل محور الفواصل.

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

تطبيق:

1. باستخدام البكاملة بالتجزئة احب:

$$I = \int_2^3 (x-2) e^{2x} dx$$

$$J = \int_2^3 (x-2)^2 e^{2x} dx$$

2. لتكن f الدالة المعرفة على [2; 3] ب:

$$f(x) = (x-2) e^x$$

وليكن (C) منحناها البياني في معلم

متعامد ومتجانس، احب V حجم

المجسم المولد بدوران (C) حول (x, n)

5/ منهجية طرح أسئلة التكامل:

طريقة ①:

① أسئلة مساعدة لتعيين $F(x)$

- احب التكامل التالي
- باستعمال التكامل بالتجزئة، عيّن .
- تحقق ان G دالة أصلية لـ f (جزء من f)
- عيّن G وم حتى تكون G أصلية لـ f (جزء من f)
- اثبت ان f تكّتب على الشكل او يطلب تعيين ثوابت a, b
- اثبت ان $a f' + b f + c f = \dots$

② حساب $F(x)$

- بين ان f تقبل دالة أصلية على $[a, b]$
- جد الدالة الأصلية لـ f والتي نتحقق
- جد الدالة الأصلية لـ f والتي تنعدم
- مناجمل $a \leftarrow 2$ طرق .

③ حساب المساحات:

- عميد انشارة f
- ادرس الوضع النقي بين \dots و \dots
- احب مساحة الحيز المحصور بين \dots و \dots و \dots و \dots
- او الحيز المعروف \dots و \dots

الحد الأعلى للتكامل قد يكون

\leftarrow عددا ما

\leftarrow a ، بين ان $A(x) = \dots$ وجد حوا

\leftarrow عدد طبيعي n : بين ان $A(n) = \dots$
احب $A(n)$ حين n عيّن n حتى $A(n)$

④ حساب الحجم:

احب V حجم المجسم المولد عن دوران (f) حول (xx)

طريقة ②:

نفرز F كما يلي

$$\begin{cases} f(x) = \dots \\ F(a) = b \end{cases}$$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ او } \dots$$

نريد دراسة الدالة F دون ايجاد عبارتها .

أمثلة:

ص 154

ص 181

ص 91 و 99

... Bac 2015 M₁

تابع لحساب المساحة

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$h(x) = f(x) + n$$

فرضنا ان الحد $A(x)$

$A(x)$ هي مساحة الحيز المحصور بين

المحصور بين \dots

$n=0$
 $n=1$
 (cf)

المستقيم $y = \dots$

استنتاج منحيات

انطلاقاً من منحيات

أخرى

استنتاج تمثيل بياني (C_g) مجهول انطلاقاً من تمثيل بياني معلوم (C_f)

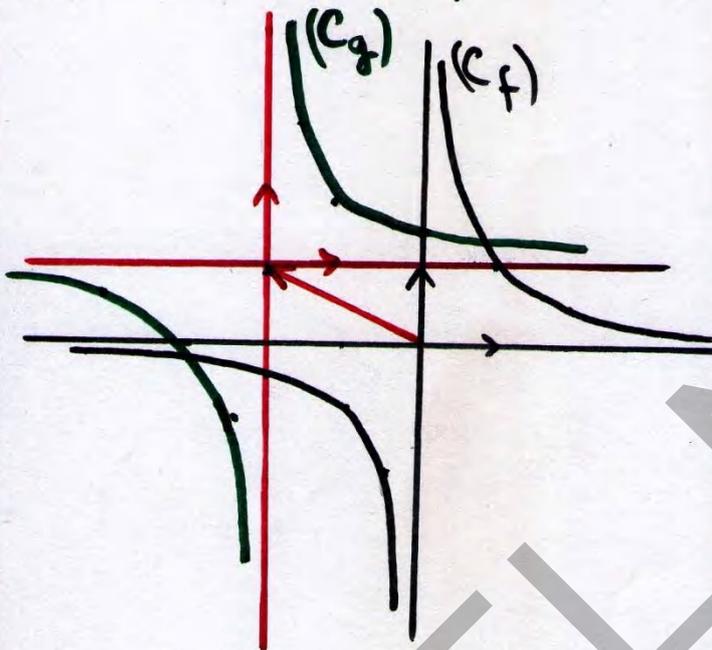
$$g(x) = \frac{x+3}{x+2} \quad (2)$$

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$$

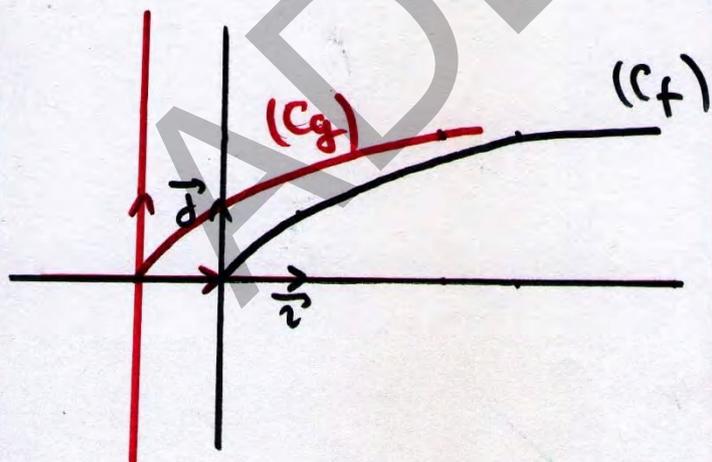
$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ بوضع}$$

$$g(x) = f(x+2) + 1$$

(C_g) صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, g(x) = \sqrt{x+1} \quad (3)$$



$$g(x) = f(x+a) + \beta \quad / 1$$

(C_g) صورة (C_f) بانسحاب شعاعه

$$\vec{v} \begin{pmatrix} -a \\ \beta \end{pmatrix}$$

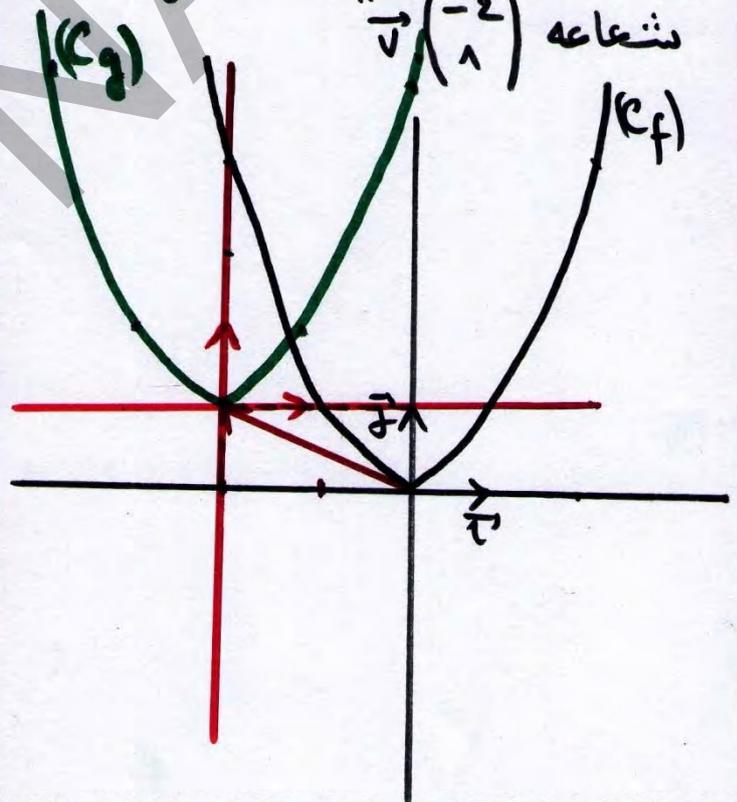
مثال: باستعمال دالة صرعية و دوز دراية
تغييرات الدالة g , مثل (C_g)

$$g(x) = x^2 + 4x + 3 \quad (1)$$

$$g(x) = (x+2)^2 + 1$$

(C_g) صورة منحنى الدالة مربع بانسحاب

$$\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ شعاعه}$$



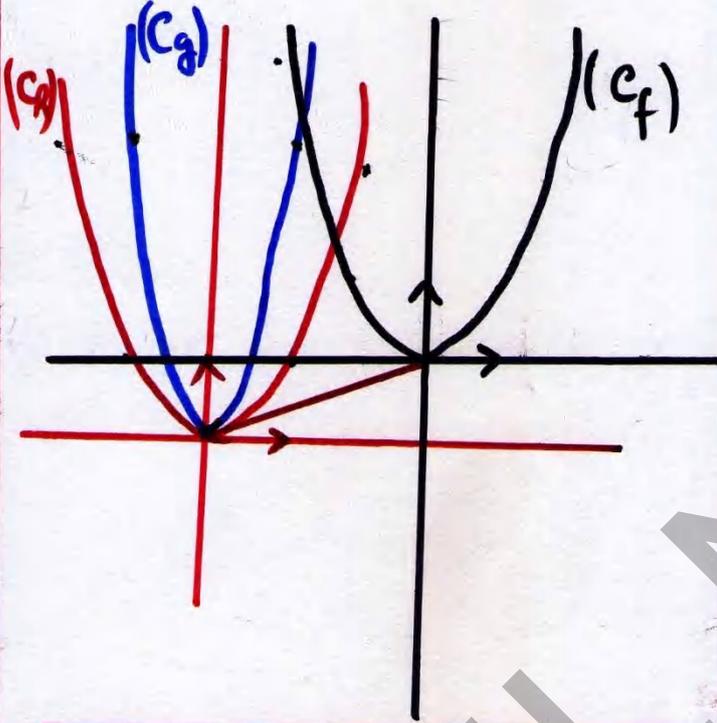
$$g(x) = (2x+6)^2 - 4$$

$$g(x) = 4[(x+3)^2 - 1] = 4h(x)$$

انطلاقاً من منحني الدالة مربع، نتجبه

بتتبع $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ لنحصل على (C_h)

انطلاقاً من (C_h) ننشئ (C_g)



④ العبارة تتضمن قيمة مطلقة

تطابق : $g(x) = f(x)$

تناظر بالنسبة لمحور الترتيب : $g(x) = f(-x)$

تناظر بالنسبة لمحور الفواصل : $g(x) = -f(x)$

تناظر بالنسبة للمبدأ : $g(x) = -f(-x)$

121

$$g(x) = k \cdot f(x) \quad (2)$$

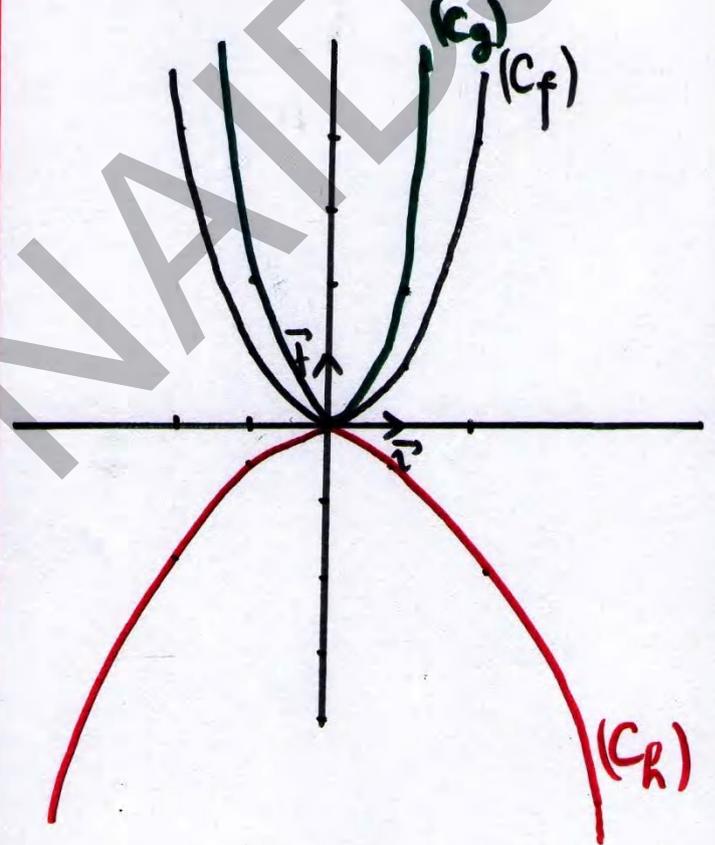
$$M(x, y) \in (C_f)$$

$$M(x, ky) \in (C_g)$$

$k > 0$: (C_f) و (C_g) في نفس الجزء
 $k < 0$: (C_f) و (C_g) في جزئين متعاكسين

$$g(x) = 2x^2 \quad \text{مثالي}$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x^2$$



$$g(x) = f(ax+b) + \beta \quad (3) \text{ حالة خاصة}$$

في بعض الأحيان يمكننا إنشاء (C_g) وذلك باستعمال التحويلين السابقين معاً.

$$g(x) = 4x^2 + 24x + 32 \quad \text{مثال}$$

2

الخطوات:

- ندرس شفعية الدالة
- نتخلص من رمز القيمة المطلقة
- نختار مجال مناسب للدراسة
- ثم نرسم (C_f) على هذا المجال
- نناظر الجزء المرسوم

حالة ① $g(x) = f(|x|)$

- g دالة زوجية (C_f) متناظر
- بالنسبة لمحور الترتيب

$$g(x) = f(x) \quad : x \geq 0$$

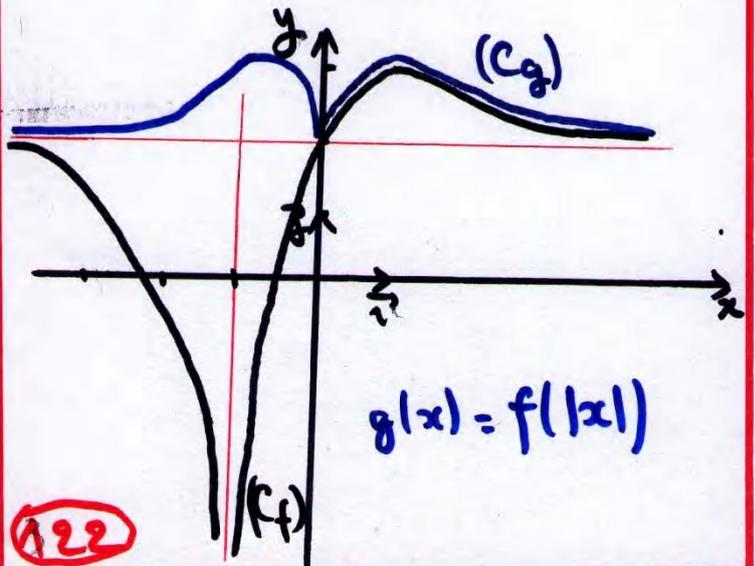
(C_g) يطابق (C_f) على هذا المجال

$: x < 0$

• نناظر الجزء المرسوم بالنسبة لـ (y, y) من شفعية (C_f)

• إذن: $g(x) = f(-x)$ إذن نناظر الجزء المرسوم بالنسبة لـ (y, y)

$$f(x) = \frac{2x^2 + 8x + 2}{x^2 + 2x + 1} \quad \text{مثال:}$$



122

حالة ② $g(x) = f(-|x|)$

• g دالة زوجية (C_f) متناظر بالنسبة لـ (y, y)

$$g(x) = f(x) \quad : x < 0$$

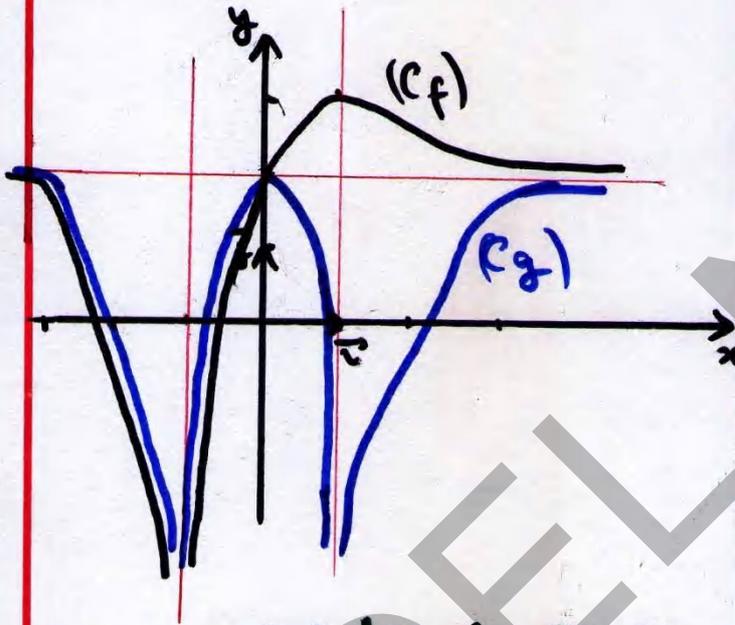
(C_g) يطابق (C_f)

$: x > 0$ نناظر الجزء المرسوم بالنسبة

لـ (y, y)

المثال السابق:

$$g(x) = f(-|x|)$$



حالة ③ $g(x) = |f(x)|$

$$g(x) = |-f(x)|$$

لما $f(x) \geq 0$ (C_f) فوق محور الفواصل

$$g(x) = f(x)$$

(C_g) يطابق (C_f)

لما $f(x) < 0$ (C_f) تحته (x, x)

$$g(x) = -f(x)$$

(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

المثال السابق:

$g(x) = |f(x)|$



(g) دوماً فوق (x)

$g(x) = [f(x)]^n / 5$

$g'(x) = n \cdot f'(x) \cdot [f(x)]^{n-1}$

* n فردي: إشارة $g(x)$ من إشارة $f'(x)$ و تغيرات g نفسها تغيرات f

* n زوجي: إشارة $g(x)$ من إشارة $f'(x) \cdot f(x)$

مثال:

لنكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ

$f(x) = -x^2 - 4x + 5$

* نكامل جدول تغيرات f

* استنتج جدول تغيرات k / h حيث

$k(x) = [f(x)]^2, h(x) = [f(x)]^3$

①

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$			g		

$R(x) = [f(x)]^3$

$R'(x) = 3 \cdot f'(x) \cdot f(x)^2$

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$
$R'(x)$		+	0	-	
$R(x)$			g^3		

$k(x) = f(x)^2$

$k'(x) = 2f'(x) \cdot f(x)$

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$
$k'(x)$		-	0	+	0
$k(x)$			g^2		

إشارة $k'(x)$ تستنتج من الجدول

①

6/ بحساب $g'(x)$ ودراسة اشارتها

فدالة عددية معرفة على $]-2; +\infty[$ كما يلي:

x	-2	e^{-2}	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	
$f(x)$	6	4	5	9

استنتج جدول تغيرات g, h, k

$$g(x) = f(x^2)$$

$$h(x) = f(e^x) ; D =]-2; +\infty[$$

$$k(x) = \sqrt{f(x)}$$

$$g(x) = f(x^2)$$

$$g'(x) = 2x \cdot f'(x^2)$$

من أجل كل x من $]-2; +\infty[$:

$$x^2 \geq 0$$

$$f'(x^2) \geq 0$$

$$f'(x^2) = 0 : x^2 = 0 : x = 0$$

x	-2	0	$+\infty$
$2x$	-	0	+
$f'(x^2)$	+	0	+
$g'(x)$	-	0	+

x	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	6	4	9

$$g(+\infty) = f(+\infty) = 9$$

$$g(0) = f(0) = 4$$

$$g(-2) = f(4) = 6$$

$$h(x) = f(e^x)$$

$$h'(x) = e^x \cdot f'(e^x)$$

من أجل كل $x \in]-2; +\infty[$: $e^x > 0$
 $f'(e^x) > 0$

x	-2	0	$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$	5	$f(1)$	9

$$h(+\infty) = f(e^{+\infty}) = f(+\infty) = 9$$

$$h(-2) = f(e^{-2}) = 5$$

$$k(x) = \sqrt{f(x)}$$

$$k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

تغيرات k من تغيرات f

x	-2	0	$+\infty$
$k'(x)$	$-$	0	$+$
$k(x)$	$\sqrt{+\infty} = +\infty$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$

ADEL NAIDJI

ADEL ALMAJIDI

تمكين

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = x^3 + 6x + 12$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-1,48; -1,47[$ ثم استنتج حسب قيم العدد

الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{x g(x)}{(x^2 + 2)^2}$

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(3) بيّن أنّ $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(4) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

(5) نرمز بـ S إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين التي معادلاتها

$x = \alpha$ ، $x = 0$ و $y = 0$.

أثبت أنّ: من أجل كل $x \in [\alpha; 0]$ ، $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ ، ثم بيّن أنّ: $-\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha$.

الوحدة: الدوال العددية

عادل نعيجي

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) - لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R} ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$.

ب) استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

(3) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$ حيث f' مشتقة الدالة f .

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f . (نأخذ $f(\alpha) \approx -0,1$)

(4) احسب $f(1)$ ثم حل في \mathbb{R} المعادلة $f(x) = 0$.

(5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

(6) لتكن h الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$.

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) تحقق أنّه من أجل كل x من \mathbb{R} : $h(x) = f(x) - 2$.

ب) استنتج أنّ (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h) .

التمرين الرابع: (06 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أثبت أن الدالة f فردية.

ب- أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

ج- ادرس تغيرات الدالة f .

(2) أ- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتج أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

ج- بيّن أنّ المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$ ، ثم استنتج معادلة

(d') المستقيم المقارب الآخر.

د- ارسم (d) و (d') و (C_f) في المعلم السابق.

(3) g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$.

أ- بيّن أنّ الدالة g زوجية.

ب- انطلاقا من (C_f) ارسم (C_g) منحنى الدالة g في نفس المعلم السابق.

التمرين الرابع: (07.5 نقطة)

(I) دالة معرفة على $I =]-\infty; -1[\cup]-1; 0]$: $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$

(c_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

كما هو مبين في الشكل.

(1) أ) أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

(ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات f شكل جدول تغيراتها.

(2) دالة معرفة المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$

(c_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس.

(أ) أحسب نهاية g عند $+\infty$.

(ب) تحقق من أن (c_g) يقبل مستقيما مقاربا مانلا (Δ)

عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

(ج) أدرس تغيرات g .

(II) دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي: $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

(1) أ) أحسب $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ، $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ، ماذا تستنتج ؟

(ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

(2) أكتب معادلتى المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

(3) أرسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) .

(4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمت التي معادلاتها:

$$x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}, y = 0$$

تمرين 4: (7 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يأتي : $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$

(C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ادرس تغيرات الدالة f .

(2) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته: $y = x$.

ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (D) .

(3) أ- بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1,3 < x_0 < 1,4$.

ب- عين معادلة (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب.

ج- ارسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم.

(4) أوجد الدالة الأصلية للدالة f والتي تتعد من أجل القيمة 0 للمتغير x .

(5) دالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعبارة: $g(x) = |f(x)|$

(C_g) منحنى الدالة g في المعلم السابق.

- بين كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

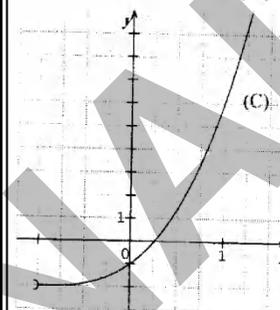
(6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $g(x) = m^2$.

التمرين الرابع (07 نقط)

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يأتي :

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

1- أ - بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g و حدّد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.



ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $]\frac{1}{2}; 1[$ يحقق : $g(\alpha) = 0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

2- f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بما يأتي :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$

حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

ب) عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ و فسّر النتيجة بيانياً.

ج) احسب : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$ و فسّر النتيجتين بيانياً.

د) شكل جدول تغيرات الدالة f .

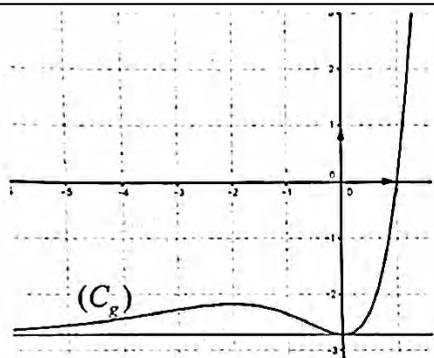
3 - نأخذ $\alpha \approx 0,26$

أ) عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

ب) ارسم المنحنى (Γ)

4- أ) أكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان.

ب) عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تحقق : $F(1) = 2$



التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = x^2 e^x - e$
 تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (كما هو في الشكل المقابل).
 - احسب $g(1)$.

- بقراءة بيانية عتّن إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجموعة \mathbb{R}^* كما يلي: $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب النهايات الآتية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 بيّن أنّ المنحنى (γ) الذي معادلته : $y = e^{-x} - 2$ والمنحنى (C_f) متقاربان بجوار $-\infty$ ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (γ).

3 بيّن أنّ : من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا : $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$.

4 استنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1; 0]$ و $]0; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $] -\infty; -1]$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

5 بين كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) انطلاقا من منحنى الدالة: $x \mapsto e^x$ ثم ارسم بعناية كلا من المنحنيين (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق.

6 ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = -e^n$ و $x = -e^{n+1}$.

احسب العدد الحقيقي I حيث $I = A(0) + A(1) + \dots + A(2016)$

الوحدة : الدوال الأسية

عادل نعيجي

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$.

I نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$. (C) تمثيلها البياني.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) أثبت أنّ المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثيهما، احسب $f(-2)$ ، ثم ارسم المنحنى (C) .

II ليكن m وسيط حقيقي، نعتبر الدالة f_m المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f_m(x) = (x^2 + mx + 1)e^{-x}$.

وليكن (C_m) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

(1) أثبت أنّ جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω يطلب تعيين إحداثيهما.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f_m واستنتج قيم m التي من أجلها تقبل الدالة f_m قيمتين حديتين يطلب تعيينهما.

(3) M_m نقطة من المنحنى (C_m) فاصلتها x_m حيث $x_m = 1 - m$.

أثبت أنّه عندما m يسمح \mathbb{R} فإنّ M_m تنتمي إلى منحني يطلب تعيين معادله له.

(4) ادرس حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، حيث $m \neq 2$ ، الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (C_m) .

(5) احسب بدلالة العدد الحقيقي الموجب تماما α ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين

(C) و (C_3) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = \alpha$ و $x = 0$ ، ثم احسب: $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 1 - 2xe^{-x}$.

- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = (x+1)(1+2e^{-x})$.

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) أ) بيّن أنّ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$ ثم استنتج معادلة لـ (Δ) ، المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f) .

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(3) اثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادله له.

(4) باستعمال المنحنى (C_f) ، عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = x + m$ حلين مختلفين.

(5) ليكن α عددا حقيقيا موجبا، نرمز بـ $A(\alpha)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)

والمستقيمتين التي معادلاتها على الترتيب: $y = x + 1$ ، $x = -1$ و $x = \alpha$.

- احسب $A(\alpha)$ بدلالة α ثم $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحني (C_f) يطلب تعيين معادله له.

ب) بين أن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$ ،

ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2) اكتب معادلة (T) مماس المنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 .

3) الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = x^2e^{-x+2} - 4$

ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج إشارة $h(x)$ حدد عندئذ وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (T)

على المجال $[0; +\infty[$.

4) ارسم المماس (T) والمنحني (C_f) على المجال $[0; +\infty[$.

5) نعتبر m وسيط حقيقي والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب : $f(x) = m(x - 2) \dots (E)$

ناقش بيانها حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) .

6) الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

اعتمادا على السؤال رقم (1)، شكل جدول تغيرات الدالة g .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = 2 - x^2e^{1-x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ وأعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة ، ثم احسب النهاية $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2) أ) بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} ، $f'(x) = x(x - 2)e^{1-x}$ ،

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) اكتب معادلة (T) المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

II) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $h(x) = 1 - xe^{1-x}$

1) بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} فإن : $h(x) \geq 0$ ، ثم ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (T) .

2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

3) أنشئ المماس (T) والمنحني (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.

4) الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$

تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} ، ثم احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f)

وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما : $x = 0$ و $x = 1$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$.

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) (أ) بيّن أنّ للمعادلة $g(x) = 0$ حلّين في \mathbb{R} ، أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1,52 < \alpha < -1,51$.

(ب) استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (وحدة الطول $1cm$).

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = -g(x)$ ، (حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f).

(ج) شكّل جدول تغيرات الدالة f على \mathbb{R} ، (نأخذ $f(\alpha) \approx 0,38$).

(د) عيّن نون حساب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

(2) (أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(ج) بيّن أنّ للمنحنى (C_f) نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثيهما.

(د) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$.

(هـ) ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$.

على المجال $[-2; +\infty[$.

(III) h و H الدالتان المرفقتان على \mathbb{R} بـ: $h(x) = x + f(x)$ و $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

(1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على \mathbb{R} .

(2) (أ) احسب التكامل التالي: $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماماً وفسّر النتيجة هندسياً.

(ب) احسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

-1- لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 2e^x - x^2 - x$.

(أ) احسب $g'(x)$ من أجل كل x من \mathbb{R} ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g).

(ب) بيّن أنه، من أجل كل x من \mathbb{R} ، $g'(x) > 0$.

(ج) احسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

-2- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $-1,38 < \alpha < -1,37$.

-3- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

-II- لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) بيّن أنّه، من أجل كل x من \mathbb{R} ، $f'(x) = \frac{x e^x g(x)}{(e^x - x)^2}$ (حيث f' هي مشتقة الدالة f).

(ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f على \mathbb{R} ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

-2- (أ) بيّن أنّ $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$ ، ثم فسّر النتيجة بيانياً.

(ج) أنشئ المنحنى (C_f) ، (تعطى $f(\alpha) \approx 0,29$).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$.

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل في \mathbb{R} ، حلاً α يختلف عن 1 ثم تحقق أن: $2,79 < \alpha < 2,80$.

(3) استنتج إشارة $\varphi(x)$ على \mathbb{R} .

(II) f و g الدالتان العدديتان المرفقتان على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = (2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$.

(C_f) و (C_g) تمثيلهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن للمنحنيين (C_g) و (C_f) مماساً مشتركاً (T) في النقطة ذات القاصلة 1 ثم جد معادلة له.

(3) ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f).

(4) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) - g(x) = \frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$.

(ب) ادرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ على \mathbb{R} ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_g) و (C_f).

(ج) باستعمال مكاملة بالتجزئة، احسب بدلالة العدد الحقيقي x : $\int_1^x f(t) dt$.

(د) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$$x=2 \text{ و } x=1$$

(III) (1) احسب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$. أعط تخميناً لعبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

($f^{(n)}$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f).

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x) = (-1)^n [2x - (2n+1)] e^{1-x}$.

(3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n = f^{(n)}(1)$.

(أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع: $u_k + u_{k+1}$.

(ب) استنتج بدلالة n ، المجموع: $u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) g الدالة المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $g(x) = (x+2)e^x - 2$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

(II) f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $f(x) = 2x + 3 - (x+1)e^x$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = -g(x)$.

(ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(ج) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

(3) (أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $0,92 < \alpha < 0,93$ و $-1,56 < \beta < -1,55$.

(ب) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; \frac{3}{2}]$.

(4) (أ) بين أن الدالة: $x \mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+1)e^x$ على \mathbb{R} .

(ب) احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$x = \alpha$ ، $x = 0$ (حيث α هي القيمة المعرفة في السؤال (3) أ).

(ج) جد حصرًا للعدد A .

التمرين الرابع: (06 نقاط)

(I) . $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$: الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R} .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R} ، ثم تحقق أن: $0,36 < \alpha < 0,37$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) . $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$: الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = e^{2x+2} g(-x)$.

ب) استنتج أن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty; -\alpha[$ و متزايدة تماما على $]-\alpha; +\infty[$.

(2) احسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

(4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$.

(5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}]$ ، نأخذ $f(-\alpha) \approx 0,1$.

(6) أ) تحقق أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$.

ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$ ، $]-\infty; 0[$ من المجال x من حقيقي ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$ ، $f(0) = 0$ والدالة المعرفة بـ: f المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار.

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

(3) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(4) أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$.

ب) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ ، يُطلب تعيين معادلة له.

(5) $g(x) = \frac{f(x)}{x}$: الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ:

أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

f هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = (x-1)e^x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) عيّن نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على \mathbb{R} ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ) بيّن أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α على \mathbb{R} ، ثم تحقق أن $1,27 < \alpha < 1,28$

ب) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 وحدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

ج) أرسم (T) و (C_f)

(4) عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1$ حلا واحدا في \mathbb{R}

(5) h هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $h(x) = (|x|+1)e^{-|x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني

أ) بيّن أن الدالة h زوجية.

ب) أرسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f)

(6) دالة معرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = (ax+b)e^x$ حيث: a, b عدنان حقيقيان

عيّن a, b حتى يكون: من أجل كل x من \mathbb{R} ؛ $g'(x) = f(x)$

(6) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$ ، $f(x) > x$.

ب) استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ج) أنشئ المنحنى (C_f) .

(7) (u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = -3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 0$.

ب) حدّد اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج) بيّن أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم عيّن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(8) m عدد حقيقي. h_m الدالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ :

$$h_m(x) = x e^{\frac{1}{x}} - mx$$

أ) احسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m .

ب) باستعمال المنحنى (C_f) ، ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة

$$h'_m(x) = 0$$

x	f(x)
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

التمرين الرابع: (06.5 نقاط)

I الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بي: $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C) .

(2) احسب $f'(x)$. بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرًا للعدد α .

(4) ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C) ، ثم ارسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

(5) عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بي: $g(x) = f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

(1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-\infty; 1[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) أ) تحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثم بين أن: $2f\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = (2-x)e^x - 1$

(1) ادرس تغيرات الدالة g

(2) بين أن للمعادلة: $g(x) = 0$ في \mathbb{R} حلان α و β حيث $-1,2 < \alpha < -1,9$ و $1,8 < \beta < 1,9$

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R}

II الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ وفسّر النتيجة هندسيا.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ واستنتج حصرًا للعدد $f(\beta)$ و $f(\alpha)$

(4) احسب $f(1)$ ثم ارسم المنحنى (C_f)

(5) λ عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1

أ) احسب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث: $a(\lambda) = \int_1^\lambda [f(x) - 1] dx$

ب) احسب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I - الدالة g معرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$.

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

ب - ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها. (نأخذ: $g(1 + \sqrt{2}) \approx 1,43$ و $g(1 - \sqrt{2}) \approx -0,25$)

2. أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في \mathbb{R} ، ثمّ تحقق أنّ أحدهما معدوم والآخر α ، حيث:

$$-0,8 < \alpha < -0,7$$

ب - استنتج إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II - الدالة f معرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$

(C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2 cm)

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب - بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ ، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

2. أ- بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$. (يرمز f' إلى الدالة المشتقة للدالة f)

ب - شكّل جدول تغيرات الدالة f على \mathbb{R} . (نأخذ: $f(\alpha) \approx -0,9$)

3. أ- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

ب - مثل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f) .

ج - ناقش بيانها، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2 + me^x = 0$.

4. الدالة H معرفة على \mathbb{R} بـ: $H(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}$.

أ- بيّن أنّ H دالة أصلية للدالة: $x \mapsto (x+1)^2 e^{-x}$ على \mathbb{R} .

ب - احسب بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين

معادلتهما $x = 0$ و $x = -1$.

III - (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(تذكّر أنّ العدد α يحقق $g(\alpha) = 0$)

1. برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1 \leq u_n \leq \alpha$.

2. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

3. استنتج أنّ (u_n) متقاربة، ثمّ احسب نهايتها.

التمرين الثالث: (07 نقاط)

I - الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$.

1 - ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

2 - بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1,59 < \alpha < 1,60$.

3 - استنتج إشارة $g(x)$.

II - f هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2 cm)

1 - بيّن أنّ (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتهما على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$.

2 - أ) برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

ج) احسب $f(1)$ ، ثم استنتج، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$.

3 - أ) بيّن أنّ: $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha - 1}$ ، حيث α هو العدد المعرف في السؤال 2 من الجزء 1.

ب) استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

ج) ارسم (C_f) .

4 - ناقش بيانها، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة: $2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 1)$.

5 - h هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = [f(x)]^2$.

أ) احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة h .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) لتكن g الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 1 - xe^x$.

1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيير الدالة g ، ثم شكل جدول تغييراتها.

3) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $[-1; +\infty[$.

ب- تحقق أن $0,5 < \alpha < 0,6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي: $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) لتكن f' مشتقة الدالة f . بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن: $f'(x) = -g(x)$.

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$ ، ثم شكل جدول تغييرات الدالة f .

3) بين أن $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصر العدد $f(\alpha)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

4) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

5) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1,6 < x_1 < -1,5$ و $1,5 < x_2 < 1,6$.

ب- أنشئ (Δ) و (C_f) .

6) لتكن h الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = (ax + b)e^x$.

أ- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على \mathbb{R} .

ب- استنتج دالة أصلية للدالة g على \mathbb{R} .

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) g هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 2 - xe^x$.

1) ادرس تغييرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغييراتها.

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على \mathbb{R} ، ثم تحقق أن: $0,8 < \alpha < 0,9$.

3) عين، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

II) f هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (وحدة الطول $2cm$).

1) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

2) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- بين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

3) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') ، حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

4) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغيير الدالة f .

ب- بين أن: $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغييرات الدالة f .

5- ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

6- ناقش، بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$.

III) (U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $U_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq U_n < \alpha$.

2) باستعمال (Δ) و (C_f) مثل على محور الفواصل الحدود: U_0 ، U_1 و U_2 ، ثم خمن اتجاه تغيير (U_n) .

3) برهن أن المتتالية (U_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

التمرين الثالث: (07.5 نقطة)

أ) الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} كما يلي:

$$f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$$

• (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

3- بيّن أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف w يطلب تعيينها ثم اكتب معادلة لمماس (C_f) عندها.

4- لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = f(x) - x$.

أ- ادرس تغيرات الدالة g .

ب- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2,7 < \alpha < 2,8$.

5- أ- حل في \mathbb{R} المعادلة: $f(x) = 0$.

ب- ارسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = x$ والمنحنى (C_f) .

ب) (U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$

1- باستخدام (C_f) والمستقيم (Δ) مثل U_0 و U_1 و U_2 على حامل محور القواسم.

2- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1 \leq U_n < \alpha$.

3- بيّن أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

4- استنتج أن (U_n) متقاربة و بيّن أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

تعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = e^x - ex - 1$.

(\mathcal{C}_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- احسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها.

ج- شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2. أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $-ex - 1 = y$ مقارب مائل للمنحنى (\mathcal{C}_f) بجوار $(-\infty)$.

ب- اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحنى (\mathcal{C}_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

ج- بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1,75; 1,76[$ حلا وحيدا α .

د- ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم الملحنى (\mathcal{C}_f) على المجال $] -\infty; 2[$.

3. أ- احسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (\mathcal{C}_f) و حامل محور القواسم والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 0$ و $x = \alpha$.

ب- أثبت أن: $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2} e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) u\alpha$ (حيث $u\alpha$ هي وحدة المساحات).

التمرين الثالث: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^* بالعلاقة: $f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)}$

ليكن (C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث: $f(x) = ax + \frac{b}{3(e^x - 1)}$ من أجل كل x من \mathbb{R}^*

2. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات تعريفها.

3. بين أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

4. أ - (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب: $y = x$ و $y = x + \frac{4}{3}$.

بين أن (D) و (D') مقاربان للمنحنى (C_f) ، ثم حدد وضعيته بالنسبة لكل منهما.

ب - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث $0,9 < x_0 < 0,91$

و $-1,66 < x_1 < -1,65$

ج - احسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(x) + f(-x)$.

فسر النتيجة هندسيا.

د - ارسم (D) و (D') و (C_f) .

هـ - m عدد حقيقي، (D_m) المستقيم المعرف بالمعادلة $y = x + m$.

ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$

5. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يأتي: $g(x) = [f(x)]^2$

ادرس تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = (3x + 4)e^x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1/ ا) احسب f' ، f'' ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن:

حيث: $f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^x$ ، $f^{(n+1)}$ المشتقات المتتالية للدالة f

ب) استنتج حل المعادلة التفاضلية: $y'' = (3x + 16)e^x$

2/ ا) بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ وفسر النتيجة هندسيا

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ ا) اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ω التي فاصلتها $-\frac{10}{3}$.

ب) بين أن ω هي نقطة انعطاف المنحنى (C_f)

ج) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; 0]$.

4/ ا) x عدد حقيقي من المجال $]-\infty; 0]$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_{-1}^x te^t dt$ ثم استنتج دالة أصلية

للدالة f على المجال $]-\infty; 0]$.

ب) λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$

احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمتين التي

معادلتاهما: $y = 0$ ، $x = -\frac{4}{3}$ و $x = \lambda$ ، ثم جد $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = (3-x)e^x - 3$

- (1) ادرس تغيرات الدالة g .
- (2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في \mathbb{R} حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $2,82 < \alpha < 2,83$.
- (3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II- الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$; $x \neq 0$
 $f(0) = 0$

(C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ ، اكتب معادلة (T) مماس (C_f) عند المبدأ O .

(2) أ) بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) بيّن أنه من أجل $x \neq 0$ فإن: $f'(x) = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x)$

ج) تحقق أن $f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha)$ ثم عين حصره.

د) أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

(3) احسب $f(x) + x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $x \mapsto -x^3$

بيّن أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^3] = 0$ وفسر النتيجة هندسياً.

(4) أنشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين (C) و (C_f) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^* كما يلي: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ وفسر هندسياً النتيجة.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) أ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب:

$$y = x + 1 \text{ و } y = x$$

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

(4) أثبت أن النقطة $\omega(0; \frac{1}{2})$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

(5) أ) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1,4 < \beta < -1,3$

ب) هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

ج) ارسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f) .

د) ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-1)e^{-x} = m$.

التمرين الثالث: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. احسب $f(x) + f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ثم استنتج أن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

2. ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ ثم استنتج جدول تغيراتها على \mathbb{R} .

3. بيّن أن المستقيم ذي المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)]$ ، استنتج المستقيم المقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

4. بيّن أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا α بحيث $-1,7 < \alpha < -1,6$

5. ارسم (C_f) من أجل $x \in \mathbb{R}$

6. بيّن أنه من أجل كل x من \mathbb{R} ، $f(x) = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1}$

7. احسب $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات:

$$y = x + 2 \text{ و } x = 0 \text{ و } x = \alpha$$

بيّن أن $\mathcal{A}(\alpha) = 2 \ln(-\alpha)$ ثم استنتج حصر العدد $\mathcal{A}(\alpha)$

التمرين الرابع (07,5 نقط)

I - نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2, +\infty[$ كما يأتي:

$$f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$$

حيث a و b عدنان حقيقيان.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول $1cm$.

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس

عند A يساوي $(-e)$.

II - نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2, +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$$

و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

(أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ و فسر هذه النتيجة بيانيا. (نذكر أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = 0$)

(ب) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

(ج) بيّن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثياتها.

(د) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

(هـ) ارسم (C_g) .

و) H الدالة العددية المعرفة على $[-2, +\infty[$ كما يأتي: $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ حيث α و β عدنان حقيقيان.

عين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة: $x \mapsto g(x) - 1$

استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0 .

III (لكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2, +\infty[$ كما يأتي:

$$k(x) = g(x^2)$$

باستعمال مشتقة دالة مركبة، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

تمرين 4: (7 نقاط)

I) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$ و C_f تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 - ادرس تغيرات الدالة f .

2 - بين أن C_f يقبل نقطة انعطاف ω و اكتب معادلة مماس C_f عند النقطة ω .

- اثبت أن ω مركز تناظر للمنحنى C_f .

3- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+3)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$.

- استنتج أن C_f يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.

4- بين أن C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2,77; -2,76[$.

- احسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ارسم C_f ومستقيمه المقاربين.

II) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$. C_g منحنى الدالة g .

1- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g(x) = f(-x)$.

- استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول C_f إلى C_g .

2- أنشئ في نفس المعلم السابق C_g (دون دراسة الدالة g).

الوحدة: الدوال اللوغاريتمية

عادل نعيجي

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$ ثم فتر النتجتين بيانيا.

2) أ) بين أن: من أجل كل x من $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ ، $f'(x) = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) حل في المجال $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثيها، ثم انشئ (C_g) .

II) لتكن الدالة g المعرفة على $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ كما يلي: $g(x) = 2[-x + \ln(2x+1)]$

1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

أ) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1,2 < \alpha < 1,3$

ب) استنتج إشارة $g(x)$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1: $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$

- أثبت أن: من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$ ، $0 < f(x) < \frac{1}{2x+1}$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x + 2 - \ln x$.

ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$.

(II) لنكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2} \left(-x + e - \frac{\ln(x^2)}{x} \right)$.

(C_r) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$.

(1) بين أن: من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f'(x) = \frac{-g(x^2)}{2x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

(2) أ) احسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x) + f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ج) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{2}$ مقارب لـ (C_r) ثم ادرس وضعية (C_r) بالنسبة إلى (Δ).

(4) أ) أثبت أنه يوجد مماسان للمنحنى (C_r) معامل توجيه كل منهما يساوي $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ثم جد معادلة لكلٍ منهما.

ب) بين أن المنحنى (C_r) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاها α و β

حيث $2 < \alpha < 2,1$ و $-0,5 < \beta < -0,4$.

(5) ارسم المماسين والمستقيم (Δ) ثم المنحنى (C_r).

(6) باستعمال المنحنى (C_r)، عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $x(e - 2m) = \ln(x^2)$ حلاً وحيداً.

(7) نرسم $A(\alpha)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_r) والمستقيمتين التي معادلاتها

$x = \alpha$ ، $x = 1$ و $x + 2y = e$.

تحقق أن: $A(\alpha) = \frac{1}{2} (\ln \alpha)^2 \text{ cm}^2$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $D_f =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$ حيث $D_f =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = -2x + 3 + 2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانياً.
ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) بيّن أنه من أجل كل x من D_f ، $f'(x) = -2 - \frac{2}{(x-1)(x-2)}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ) تحقق أن: من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ، $D_f \in (3-x)$ و $f(3-x) + f(x) = 0$.
ب) استنتج أن (C_f) يقبل مركز تناظر يُطلب تعيين إحداثيه.

(4) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $]0,45; 0,46[$ ثم استنتج أنها تقبل حلاً آخر β يطلب تعيين حصر له.

(5) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -2x + 3$ مقارب مائل لـ (C_f) ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

(6) ارسم (Δ) و (C_f) .

(7) بيّن أن الدالة: $h: x \mapsto (x-1)\ln(x-1) - (x-2)\ln(x-2)$ أصلية للدالة $h: x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ على $]2; +\infty[$.
ثم احسب بدلالة β مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين التي معادلاتها:

$$y = -2x + 3 \text{ و } x = \beta \text{ ، } x = 3$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

تعتبر الدالة العددية f المعرفة على $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ حيث $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ،
 (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بيّن أن الدالة f فردية ثم فسّر ذلك بيانياً.

(2) احسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين موازيين لحامل محور الترتيب.

(3) أ) بيّن أنه من أجل كل x من D ، $f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(4) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1,8 < \alpha < 1,9$.

(5) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = \frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(6) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

(7) m وسيط حقيقي، ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$(2 - 3|m|)x + 3 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1,76; 1,77[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x - \ln x} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أثبت أن الدالة f مستمرة عند العدد 0 على اليمين،

ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة بيانيا.

(2) بين أن: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x - \ln x)^2}$ ،

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر ذلك بيانيا ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) لتكن الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = x - \ln x$

(أ) بين أن: من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، $h(x) > 0$ ،

واستنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1$.

(ب) ارسم (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) \approx 2,31$)

(5) لتكن الدالة F المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

- بين أن: من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq 1$ ، $\frac{1}{x} + 1 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ ،

- اعط تفسيرا هندسيا للعدد $F(e)$ ثم استنتج حصرا له.

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - x \ln x$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $3,5 < \alpha < 3,6$.

(3) استنتج إشارة العبارة $g(x) + 1$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 4cm$.

(1) بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقارنين معادلتيهما $x=0$ و $y=0$.

(2) أ- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$.

(ب) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; \alpha[$ و متناقصة تماما على $]\alpha; +\infty[$ ثم شكل جدول

تغيراتها.

(ج) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(د) احسب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ، فسر النتيجة هندسيا.

التصميم الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1)$.

1- أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

2- أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $0,4 < \alpha < 0,5$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

(II) الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + (x-1)\ln(x+1)$.

1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ و فسّر النتيجة هندسياً ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2- أ- ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب- بين أن: $f(\alpha) = -\alpha + 4 - \frac{4}{\alpha+1}$ تم أعط حصاراً لـ $f(\alpha)$. (تُدور النتائج إلى 10^{-2}).

3) ليكن a عدد حقيقي من المجال $]-1; +\infty[$ ، نسمي (T_a) مماس المنحنى (C) الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ عند النقطة ذات الفاصلة a .

نضع من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $h(x) = f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]$.

أ- تحقق أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $h'(x) = f'(x) - f'(a)$.

ب- باستعمال اتجاه تغير الدالة g ، عيّن إشارة $h'(x)$ حسب قيم x واستنتج اتجاه تغير h على $]-1; +\infty[$.

ج- حدّد الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (T_a) .

4- أ- بين أنه يوجد مماسان (T_a) يشملان النقطة $A(1;0)$ يطلب تعيين معادلتيهما.

ب- ارسم المماسين والمنحنى (C) .

5) نعتبر الدالة H المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $H(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3)\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$.

أ- بين أن الدالة H دالة أصلية للدالة $(x-1)\ln(x+1)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

ب- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمتين التي معادلاتها: $x=1, y=0$ و $x=2$.

3) أ- بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.

ب- استنتج حصاراً للعدد $f(\alpha)$ (تُدور النتائج إلى 10^{-2}).

ج- ارسم (C_f) .

4) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماماً x و m وسيط حقيقي:

$$x^2 + x - 2m(x+1) = \ln(x^2) \dots (E)$$

أ- تحقق أن المعادلة (E) يوؤل حلها إلى حل المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}x - m$.

ب- عيّن بيانياً قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين متميزين.

5) h هي الدالة المعرفة على \mathbb{R}^* كما يلي: $h(x) = \frac{\ln|x|}{-|x|-1}$ و (C_h) منحنىها البياني في المستوى.

أ- بين أن الدالة h زوجية.

ب- ارسم في نفس المعلم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_r) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$ (حيث العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

1- ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث: $-0,34 < \alpha < -0,33$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$.

II- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1- أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ واحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$ (f' هي مشتقة الدالة f).

ج- ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

د- ارسم المنحنى (C_f) . (نقبل أن: $f(\alpha) = 3.16$)

2- أ- بين أن الدالة: $]-1; +\infty[\rightarrow \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1; +\infty[$.

ب- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي: $x=0$ و $x=1$.

3- نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1; 1[$ بـ: $k(x) = f(-|x|)$ و (C_k) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
أ- بين أن الدالة k زوجية.

ب- بين كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم ارسمه (دون دراسة تغيرات الدالة k).

ج- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $k(x) = m$.

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)

I (I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.
1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2) احسب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

II (II) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1.

4) أ- بين أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث: $y = x - 1$ معادلة له.

ب- ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) .

5) ارسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحنى (C) .

6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث: $y = mx - m$ معادلة له.

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي m ، النقطة $A(1; 0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

ب- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx - m$.

7) أ- جد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب- احسب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) ، المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$x=1$ و $x=n$ حيث n عدد طبيعي ($n > 1$).

ج- عين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن: $I_n > 2$.

(4) نقبل أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما x_0 و x_1 حيث:

$$2,11 < x_1 < 2,13 \text{ و } 0,22 < x_0 < 0,23$$

أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) .

(5) m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا و حسب قيم m ، عدد حلول المعادلة: $3 + 2\ln x - mx = 0$.

(III) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} [f(x) + x] dx$

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

(2) أعط تفسيرا هندسيا للعدد u_0 .

(3) احسب u_n بدلالة n .

(4) نضع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. احسب S_n بدلالة n .

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 + x^2 + 2\ln x$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]0,52; 0,53[$ حلا وحيدا α .

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -x + \frac{3 + 2\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$.

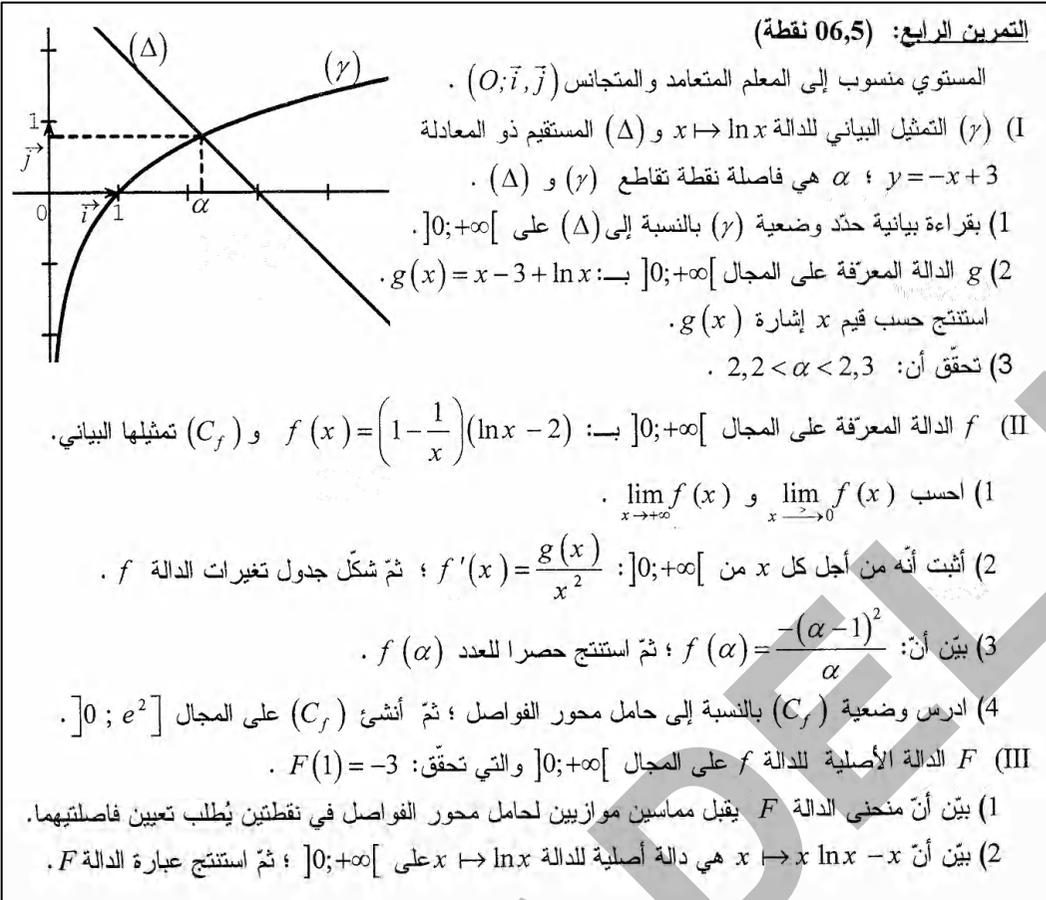
ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

ج) تحقق أن: $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)$ ثم عيّن حصرا له.

(3) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل (Δ) .

ج) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له.



التمرين الرابع: (07,5 نقطة)

(I) الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بما يلي : $h(x) = (x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2)$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -2^+} h(x)$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

(3) استنتج أنه من أجل كل x من $]-2; +\infty[$ ، $h(x) > 0$.

(II) الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x+2} \ln(x+2)$.

(C_f) المتحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 1cm).

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ وفسر النتيجة هندسياً ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أ) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-2; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+2)^2}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-2; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(4) أ) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثيها.

ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) .

ج) احسب بالمستقيم المربع ، مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين

التي معادلاتها: $y = 0$ ، $x = -1$ و $x = 1$.

(III) الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بـ: $g(x) = |x+1| + \frac{2}{x+2} |\ln(x+2)|$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1}$ و $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1}$ ؛ ماذا تستنتج بالنسبة إلى g ؟

(2) أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.

(3) انطلاقاً من المنحنى (C_f) ارسم المنحنى (C_g) الممثل للدالة g في نفس المعلم السابق.

(5) باستعمال الكاملة بالتجزئة ، عيّن الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto x^2 \ln x$ المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ، والتي تتعدم من أجل القيمة 1 .

(6) t عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0; \alpha]$. نضع $F(t) = \int_t^\alpha f(x) dx$.

(أ) اكتب العبارة $F(t)$ بدلالة t و α .

(ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $]0; \alpha]$ ، $F(t) = \frac{-3t f(t) - t^3 - 6t + \alpha^3 + 6\alpha}{9}$.

(ج) احسب $\lim_{t \rightarrow 0} F(t)$.

(7) عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0; \alpha]$.

$\mathcal{S}(m)$ مساحة الدائرة ذات المركز المبدأ O ونصف القطر m .

نفرض أنّ مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (\mathcal{C}_g) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتيهما على الترتيب: $x = -\alpha$ و $x = \alpha$ ، هي: \mathcal{A} حيث: $\mathcal{A} = \frac{2}{9}(\alpha^3 + 6\alpha) ua$

(وحدة المساحات).

(أ) عيّن القيمة المضبوطة للعدد m حتى يكون $\mathcal{S}(m) = 2\mathcal{A}$.

(ب) علماً أنّ $3,142 < \pi < 3,140$ أعط حصرًا للعدد m .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرفة بـ: $f(0) = 1$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f(x) = 1 - x^2 \ln x$.
(\mathcal{C}_f) منحنى الدالة f الممثل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين .

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً .

(2) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

(3) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0; +\infty[$.

(ب) تحقّق أنّ $1,531 < \alpha < 1,532$.

(4) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = f(|x|)$.

(\mathcal{C}_g) المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) ادرس شفعية الدالة g .

(ب) أنشئ المنحنى (\mathcal{C}_g) على المجال $[-2; 2]$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ؛ فسّر النتيجة هندسيا.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

(أ) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = 1$.

(ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

(ج) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; 1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$.

(3) أنشئ (C_f) و (T) .

(4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}$.

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

(أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x) - h(-x) = 0$. ماذا تستنتج؟

(ب) أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) .

(ج) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

g الدالة المعرفة على المجال $]0; 3]$ ب: $g(x) = x \ln x + x$

(1) أدرس تغيرات الدالة g

(2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α في $]0; 3]$

ثم تحقق أنّ $1,45 < \alpha < 1,46$

(ب) استنتج إشارة $g(x) - 2$

(II) التمثيل البياني المقابل (C_f) هو للدالة f المعرفة على

المجال $]0; 3]$ ب: $f(x) = |x - 2| \ln x$

(1) باستعمال (C_f) ضع تخمينا حول قابلية اشتقاق الدالة f عند 2

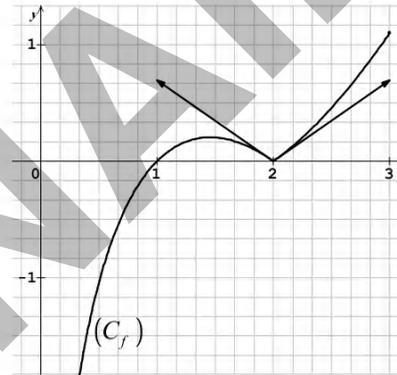
(2) أثبت صحة تخمينك.

(3) أدرس تغيرات الدالة f

(III) h الدالة المعرفة على $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ كما يلي: $h(x) = (2 - \cos x) \ln(\cos x)$

(1) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h) ؛ حيث (C_h) هو التمثيل البياني للدالة h

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكّل جدول تغيراتها وارسم (Δ) و (C_h)



التمرين الرابع: (07.5 نقطة)

I - الدالة g معرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = (x-1)e^x$.
 (1) ادرس تغيرات g .

(2) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $1+(x-1)e^x \geq 0$.

II - الدالة f معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(1 - أ) بين أن f مستمرة على $[0; +\infty[$.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2 - أ) تحقق أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1+(x-1)e^x}{x^2}$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

III - n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ؛ f_n الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$.

(1) (C_n) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f_n على $[0; +\infty[$.

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$.

(3) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

(4) بين أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها.

(5 - أ) بين أنه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]0, 3; 0, 4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$.

(ب) بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) < 0$ ، ثم برهن أنه يوجد عدد حقيقي

وحيد α_n من $]\alpha_1; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

(6 - أ) بالاعتماد على الجزء II؛ بين أنه، من أجل كل x من $]0; 1[$: $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.

(ب) استنتج أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$ ، ثم $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

(ج) جد نهاية المتتالية (α_n) .

التمرين الرابع: (05.5 نقاط)

(1) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = (1+2 \ln x)(-1+\ln x)$

(1) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(أ) ادرس تغيرات الدالة f

(ب) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e (حيث e أساس اللوغاريتم النيبيري).

(ج) عيّن فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم ارسم (C_f) على المجال $]0; e^2[$.

(2) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - \ln x$

(1) (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

(أ) ادرس تغيرات الدالة g

(ب) عيّن الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) ثم ارسم (C_g) على المجال $]0; e^2[$.

(3) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$

(أ) احسب $h'(x)$ واستنتج دالة أصلية للدالة: $x \mapsto (\ln x)^2$ على $]0; +\infty[$.

(ب) احسب العدد: $\int_{\frac{1}{e}}^e [f(x) - g(x)] dx$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - الدالة g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,31 < \alpha < 0,32$ وأن:

$$\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$$

(3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II - الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$.

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أثبت أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$.

(3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(4) بين أن: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2(1 + (\alpha+1)^2)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(5) مثل المنحنى (C_f) على المجال $]-1; 2]$.

III - (Γ) المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = \ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1; 2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

(1) أثبت أن المسافة AM تعطى بالعلاقة $AM = \sqrt{f(x)}$.

(2) الدالة k معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

(أ) بين أن للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1; +\infty[$.

(ب) عيّن إحداثيتي النقطة B من (Γ) ، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

(ج) بين أن: $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I (1) الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) استنتج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

II (1) الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2cm).

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) (أ) بين أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

(3) (أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة: $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

(أ) احسب x_0 .

(ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .

(ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متمايزين.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I - 1. الدالة u معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $u(x) = e^x - 3x + 4 - e$.

أ- ادرس اتجاه تغير الدالة u .

ب- بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $e^x - e > 3x - 4$.

2. الدالة v معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $v(x) = -3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x$.

أ- بين أن: $v'(1) = 0$. (يرمز v' إلى الدالة المشتقة للدالة v)

ب- أثبت أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $v(x) \leq 0$.

ج- استنتج، أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$.

3. أثبت أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$.

II - الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = e^x - ex + \frac{\ln x}{x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

2. بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3. احسب $f(1)$ ، ثم مثل المنحنى (C_f) على المجال $]0; \frac{5}{2}]$.

(نأخذ: $f(2) \approx 2,3$ ، $f(1,64) \approx 1$ ، و $f(\frac{5}{2}) \approx 5,75$)

4. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما

$x = \frac{1}{2}$ و $x = 2$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - g هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + a + b \ln(x)$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

1- عيّن a و b علما أن التمثيل البياني للدالة g يقبل في النقطة $A(1; -1)$ مماسا معامل توجيهه 4.

2- نضع $a = -2$ و $b = 2$.

أ) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0; +\infty[$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

II - f هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 2 - \frac{2 \ln(x)}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$).

1- أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

ب) احسب $f'(x)$ ، ثم تحقق أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ج) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2- أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x - 2$ مقارب لـ (C_f) ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

ب) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ، ثم جد معادلة له.

ج) نأخذ $\alpha = 1,25$. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث:

$0,6 < x_1 < 0,7$ و $2,7 < x_2 < 2,8$ ، ثم ارسم كلا من (Δ) ، (T) و (C_f) .

3- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $(m+2)x + 2 \ln(x) = 0$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

1. $g(x) = 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3]$ كما يلي :

- (1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
 - (2) بيّن أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق: $-0,8 < \alpha < -0,7$.
 - (3) عيّن، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.
 - (4) h هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3]$ بـ: $h(x) = [g(x)]^2$.
- أ- احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.
- ب- عيّن إشارة $h'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة h .

II) f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3]$ كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\ln(x+1)}; & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر، ثم اكتب معادلة (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.
- (2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $]-1; 0[\cup]0; 3]$ ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .
- ب- بيّن أن: $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$ ، ثم عيّن حصر f على $]-1; 3]$.
- ج- احسب $f(3)$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- (3) أ- بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-1; 3]$ فإن: $x - \ln(x+1) \geq 0$.
- ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) .
- (4) عيّن معادلة للمستقيم (T') الموازي للمماس (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3.
- (5) ارسم (T) ، (T') و (C_f) .
- (6) ناقش بيانها، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ كما يلي: $f(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[$ ، $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$.

استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y = x + 5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-3,4 < \alpha < -3,5$ و $-1,1 < \beta < -1$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

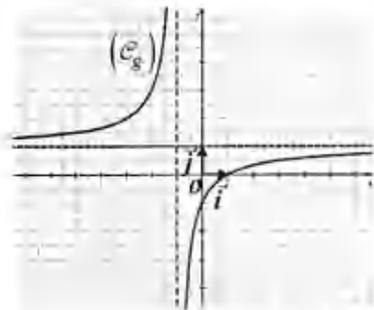
6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1; 3 + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2; \frac{5}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

ب- بيّن أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثياتها.

7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty; 0[$ كما يلي: $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6\ln(1-x)$.

بيّن أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0[$.



التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

و (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل المقابل) ، بقراءة بيانية:

أ - شكل جنول تغيرات الدالة g .

ب - حل بيانياً المتراجحة $g(x) > 0$.

ج - عيّن بيانياً قيم x التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسّر النتائج هندسياً.

2. ا - بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ، $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

ب - احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جنول تغيرات الدالة f .

3. ا - باستعمال الجزء I السؤال ج - ، عين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1; +\infty[$.

ب - α عدد حقيقي.

بيّن أن الدالة $x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha; +\infty[$.

ج - تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ، $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$. ثم عين دالة أصلية للدالة f على

المجال $]1; +\infty[$.

التمرين الثاني: (06 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{a+b \ln 2x}{4x^2}$ حيث a و b عدلان حقيقيان و (C_f)

المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ عين a و b بحيث يكون المماس في النقطة $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ ، للمنحنى (C_f) موازياً لحامل محور القواسم.

2/ g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \frac{1+2 \ln 2x}{4x^2}$ و (C_g) المنحنى الممثل لها في

المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، فسّر النتيجةين هندسياً.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جنول تغيراتها.

ج) حل في $]0; +\infty[$ المعادلة $g(x) = 0$.

د) أنسى (C_g) .

3/ أ) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = \frac{1 + \ln 2x}{2x}$ احسب $h'(x)$.

ب) تحقق أن : $g(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{\ln 2x}{2x^2}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1/ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + \ln x^2 - 1$

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0; +\infty[$

2/ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = (1 - \frac{1}{x^2}) \ln x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ/ بين أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ وأن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ (δ) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$

- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (δ) ثم جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \ln x$ ، ماذا تستنتج ؟

- ارسم (δ) و (C_f) .

3/ أ/ عدد حقيقي من المجال $]1; +\infty[$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_1^x \frac{1}{t^2} \ln t dt$

- تحقق أن: $x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]1; +\infty[$.

- استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$.

ب/ α عند حقيقي أكبر تماما من 1.

احسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (δ) والمستقيمين

الذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = \alpha$ ، ثم احسب $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

دالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x - 1 - 2 \ln x$ و (C_g) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول هي $4cm$.

1- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2- أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

ب- ادرس تغيرات الدالة g .

ج- احسب $g(1)$.

د- برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما α حيث: $3,5 < \alpha < 3,6$

هـ- استنتج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g(\frac{1}{x})$.

3) الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = -x^2 + x + x^2 \ln x$; $x > 0$
 $f(0) = 0$

أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ج- بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن: $f'(x) = xg(\frac{1}{x})$ ، واستنتج اتجاه تغير الدالة f .

د- شكل جدول تغيرات الدالة f ، بين أن: $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2}$ و استنتج حصرا للعدد $f(\frac{1}{\alpha})$.

4- ارسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f على المجال $]0; 3[$.

التمرين الثالث: (10 نقاط)

(I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ بـ: $f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) عين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

(4) أ) أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = \ln(x+a) + b \quad \text{حيث: } a, b \text{ عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما.}$$

ب) استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية \ln

ثم ارسم (C) و (C_f) .

(II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ: $g(x) = f(x) - x$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ) احسب $g(1)$ ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$ حلا وحيدا α .

تحقق أن $2 < \alpha < 3$.

ب) ارسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left] \frac{1}{2}; 5 \right]$ في المعلم السابق.

(4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) .

(5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[\alpha; +\infty[$ فإن: $f(x)$ ينتمي إلى المجال $[\alpha; +\infty[$.

(III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N}^* كما يأتي: $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$

(1) عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$

(2) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

التمرين الثالث: (07 نقاط)

1. ا دالة معرفة على $[1; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 2x + \ln x$

أ) احسب نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

ج) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$ فإن $g(x) \neq 0$.

2. لتكن f دالة معرفة على $[1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{6 \ln x}{2x + \ln x}$

$$\frac{\ln x}{6 - \ln x}$$

أ) بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = \frac{x}{2 + \ln x}$ من أجل $x \in [1; +\infty[$.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f

د) شكل جدول تغيرات f ، ما هي قيم العدد الحقيقي k بحيث تقبل المعادلة $f(x) = k$ حلين متمايزين؟

هـ) جد معادلة للمماس (Δ_1) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها A حيث (C_f) يرمز إلى التمثيل البياني

للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3. نعتبر الدالة h المعرفة على $[1; +\infty[$ بالعبارة: $h(x) = f(e^x)$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) شكل جدول تغيرات الدالة h .

ب) جد معادلة للمماس (Δ_2) للمنحنى (C_h) عند النقطة التي فاصلتها A .

ج) ارسم كلا من (Δ_1) ، (Δ_2) ، (C_f) و (C_h) في نفس المعلم السابق.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول:

h دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم أنجز جدول تغيراتها.

3. أحسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x.

الجزء الثاني: لتكن f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$

1. أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة بيانياً .

ب) باستخدام النتيجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$

ج) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

د) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2. بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3. بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4 .

4. أرسم (C_f) .

5. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمت التي معادلاتها :

$$y = x - 1 \text{ ؛ } x = 0 \text{ و } x = 1 .$$

تم بحمد الله...

نجاحكم هدفنا