الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة لوغارتمية

$\ln x$

7

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 27

التمريـــــن

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}[f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$.

2) أ/ بين أن لكل x من المجال $]0;1]$: $(x-1)+\ln x\leq0$ وأن لكل x من المجال $[1;+\infty[$:

$(x-1)+\ln x\geq0$.

ب/ بين أنه من أجل كل من المجال $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$$

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+\frac{1}{2}$ والمنحني (C_f) .

4) عين احداثيي النقطة ω من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازيا للمستقيم (D) ، ثم اكتب معادلة المستقيم (T) .

أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$$

ب/ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها.

5) مثل بيانيا كلا من (D) ، (T) و (C_f) .

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$f(x)=x-2m$$

◀ حل التمريـــن

1) أ/ حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}[f(x)]$:

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}[f(x)] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}\left[x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}\left[x + \frac{1}{2} + \underbrace{\ln x}_{-\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)}_{-\infty}\right]$$
$$= +\infty$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$.

ب/ حساب $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \to +\infty}[f(x)] = \lim_{x \to +\infty}\left[x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty}\left[\underbrace{x}_{+\infty} + \frac{1}{2} + \underbrace{\ln x}_{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)}_{+\infty}\right]$$
$$= +\infty$$

2) أ/ تبيين أن لكل x من المجال $]0; 1]$: $(x-1) + \ln x \leq 0$ وأنّ لكل x من $[1; +\infty[$: $(x-1) + \ln x \geq 0$:

نضع: الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$h(x) = x - 1 + \ln x$$

لدينا:

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

لدينا: $h'(x) > 0$ ولدينا: $h(1) = 0$ ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة h نجد أن: لكل x من المجال $]0; 1]$: $(x-1) + \ln x \leq 0$

وأنّ لكل x من المجال $[1; +\infty[$: $(x-1) + \ln x \geq 0$

الخليل للرياضيات

ب/ تبيين أنّه من أجل كل من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$:

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{2}{x}\ln x$$
$$=\frac{x-1+\ln x}{x}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط أي من إشارة $h(x)$ و $x>0$

ج/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) دراسة الوضع النسبي بين المستقيم (D) والمنحني (C_f) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

$$f(x)-y=0\Rightarrow \ln x\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\ln x=0\\ \frac{1}{2}\ln x-1=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ \ln x=2\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ x=e^2\end{cases}$$

ومنه:

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1}{2}\ln x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- الوضعية:

- (C_f) فوق (D) لما: $]0;1[\cup]e^2;+\infty[$
- (C_f) يقطع (D) في النقطتين: $A\left(1;\frac{3}{2}\right)$ وَ $B\left(e^2;e^2+\frac{1}{2}\right)$
- (C_f) تحت (D) لما: $]1;e^2[$.

4) تعيين احداثيي النقطة ω من (C_f) التي يكون فيه المماس (T) موازيا للمستقيم (D):

المماس (T) يوازي المستقيم (D) معناه:

$$f'(a)=1\Rightarrow\frac{a-1+\ln a}{a}=1$$

$$\Rightarrow a - 1 + \ln a = a$$
$$\Rightarrow \ln a = 1$$
$$\Rightarrow a = e$$

ومنه:

$$(T): y = f'(e)(x-e) + f(e)$$
$$= x - e + e + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}$$
$$= x$$

اذن المستقيم (T) مماس لـ (C_f) في النقطة $\omega(e; e)$

5) أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$:

$$f''(x) = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x - (x - 1 + \ln x)}{x^2}$$
$$= \frac{x + 1 - x + 1 - \ln x}{x^2}$$
$$= \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

ب/ استنتاج أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها:

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $(2 - \ln x)$

$$2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2$$
$$\Rightarrow x = e^2$$

ومنه:

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

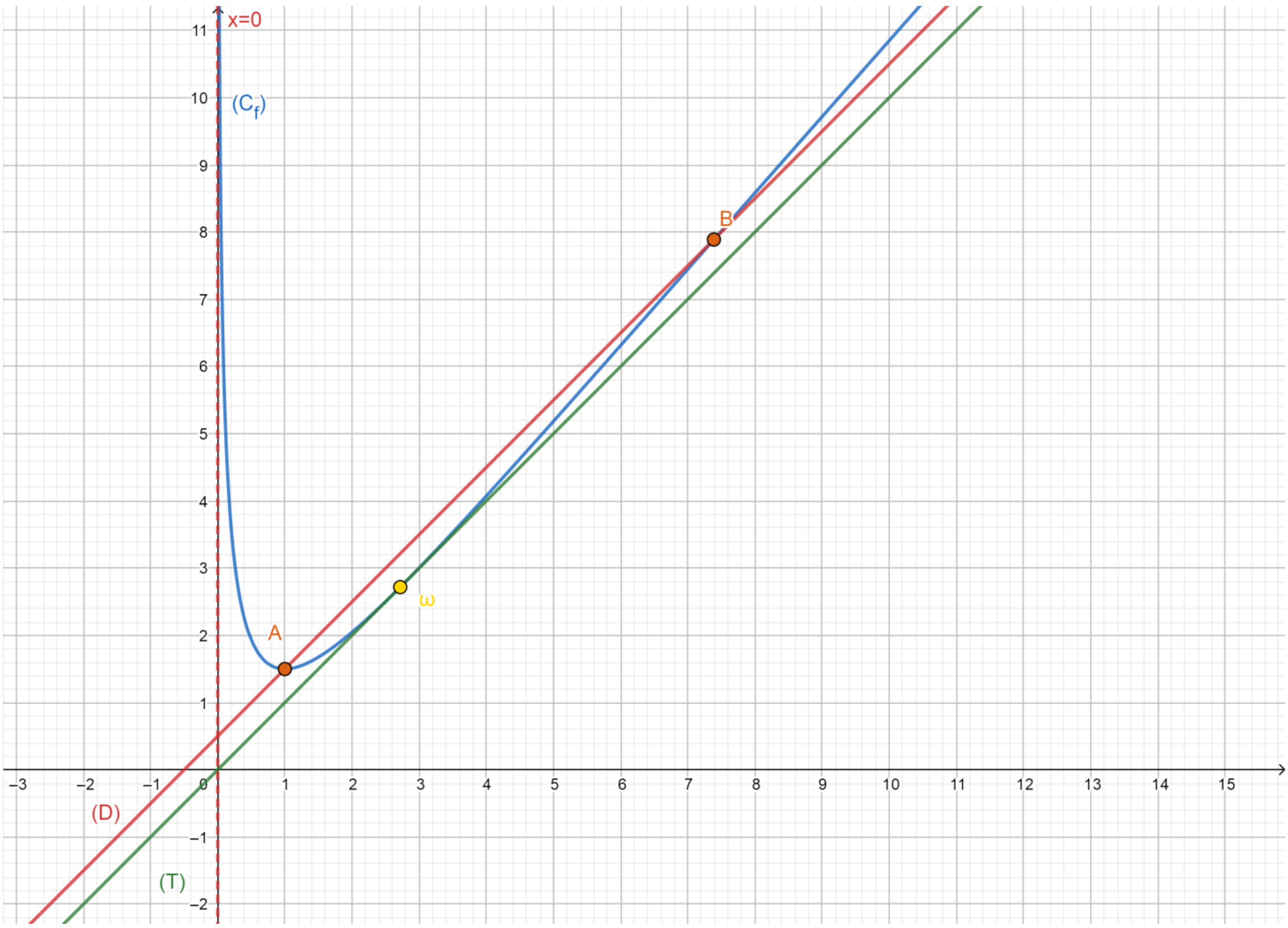
لدينا $f''(x)$ تنعدم وتغير اشارتها

ومنه المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $B\left(e^2; e^2 + \frac{1}{2}\right)$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب: $x = 0$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (D)
- نعين A و B نقط تقاطع (D) مع (C_f)
- نرسم المماس: (T)
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



7) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y_m = x - 2m$:

ومنه:

لما	$-2m < 0$	أي	$m > 0$	المعادلة لا تقبل حلول
لما	$-2m = 0$	أي	$m = 0$	المعادلة تقبل حل مضاعف
لما	$0 < -2m < \frac{1}{2}$	أي	$-\frac{1}{4} < m < 0$	المعادلة تقبل حلان
لما	$-2m = \frac{1}{2}$	أي	$m = -\frac{1}{4}$	المعادلة تقبل حلان أحدهما مضاعف
لما	$-2m > \frac{1}{2}$	أي	$m < -\frac{1}{4}$	المعادلة تقبل حلان

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►