#اصدار_جديد

مجلة

BAC 2022

5min" Maths

الدوال العددية

From A to Z

موجهة للشعب:

- علوم تجريبية
- تقني رياضي
- رياضيات

الأستاذ شعبان أسامة

...

عقبة بن نافع · S'abonner

شعار العمل لجموع التلاميذ الشرفاء ؛؛
،، تعب المراجعة أفضل من ألم السقوط ،،

10 h J'aime Répondre 116

حساباتي عبر منصلت التواصل الاجتماعي:

5min maths

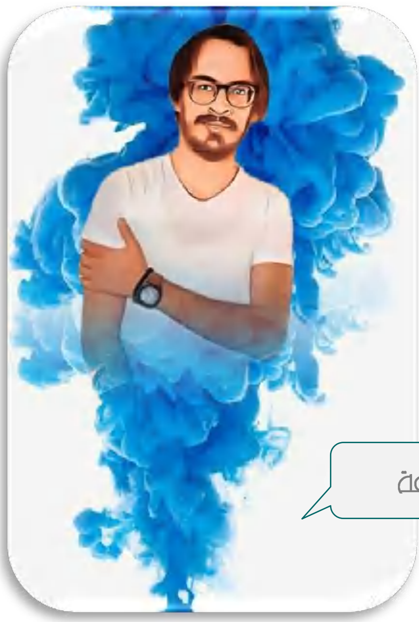
بسم الله الرحمن الرحيم

اليك أيها الطالب " مجلة 5min Maths" **للدوال العددية / شعب علمية / بكالوريا 2022**

وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل قصد مساعدتك على التحضير الجيد للموسم الدراسي الحالي، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد و ربما يكون حلك أحسن و أقصر لكن النتائج و الأهداف واحدة ,

في الأخير نرجوا من الله القدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك و يهديك الى سبيل الخير



أهدي هذا العمل المتواضع لعائلتي الكريمة أولا

و ثانيا لجميع محبي المادة

الأستاذ شعبان أسامة

ثمن هذه المجلة: دعوة خالصة من القلب

......

مجلة الرياضيات الالكترونية للطور الثانوي بمختلف مستوياته الثلاثة، تم اصدار أول نسخة بتاريخ: 2019/09/13

5 min Maths

CHABANE Oussama

تجدون في هذا العمل

الاستعداد للبكالوريا

1. ملخص الدرس+ تطبيقات
2. الاستمرارية و النهايات
3. اختبر معلوماتك
4. حلول تمارين من الكتاب المدرسي.
5. تمارين محلولة
6. تمارين البكالوريا 2008-2021 محلولة

تقويم المحور

كيفية الاستعداد للبكالوريا......؟

ما يجب فعله في الفصل الأول:

–يجب الانطلاق في الجد والعمل منذ اليوم الأول من الدراسة ,

–لا يجب اهمال مادة عن أخرى حتى ولو كان معاملها صغير ,

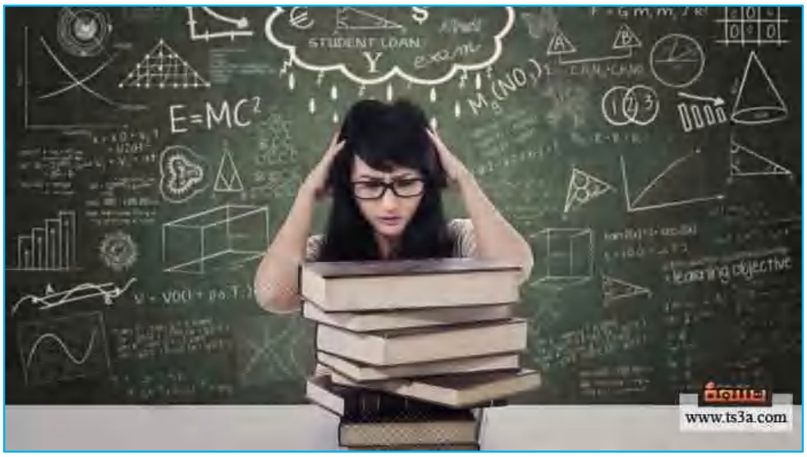
–فيما يخص مواد الحفض(تاريخ،جغرافيا وشريعة اسلامية) بمجرد القيام بدرس في الثانوية يجب أن يحفظ قبل أن يأتي درس اخر (لا يجب أن تراكم الدروس).

–مراجعة الدروس (رياضيات، فزياء والعلوم أو التكنلوجيا بنسبة للتقني رياضي) عشية القيام به والاكتفاء بحل تمارين الكتب المدرسية وسلاسل تمارين خارجية,

–الفلسفة والتي تعتبر النقطة السوداء لتلاميذ والحل الوحيد هو قراءة الدرس جيدا و حفظ الأقوال الفلسفية فقط ثم كتابة مقالات فلسفية متعلقة بالموضوع وبأسلوبك الخاص (احتفظ بمقالاتك للمراجعة النهائية) ويمكن الاعتماد على مقلات نموذجية وأنصح بتقديم المسودة الى أستاذك لتصحيحها.

امتحان الفصل الأول:

حضر له كأنه بكالوريا لاتستهزئ به أكيد انه لن يحتسب ولكنه مقياس لمدى استوعابك دروس الفصل الأول كما أن نتيجته لا تعني مستواك الحقيقي,



–خصص يوم واحد للراحة التامة دون دراسة

ما يجب فعله في عطلة الشتاء:

–مواد الحفظ راجعها جيداً وابدأ بحفظ الشخصيات والمصطلحات التاريخية,

–العلوم او التكنلوجيا بنسبة للتقني رياضي، الفزياء والرياضيات قم بكتابة ملخصات منظمة فيها كل اساسيات والقوانين,

–أحضر مواضيع الثانويات المجاورة أو الأعوام الماضية (فصل 1) وقم بحلها بتفصيل ولا تتجاهل الأسئلة البسيطة.

–الفلسفة راجع الدرس ومقالاتك الخاصة,

–خصص 3 أو 4 أيام للراحة دون أن تلمس ولا كراس ولا كتاب,

ما يجب فعله في عطلة االربيع:

نفس الشيئ بنسبة للفصل الأول وعطلة الربيع دون أن تنسى قراءة ملخصاتك للفصل الأول وحل مواضيع تشمل الفصلين(80 بالمئة من مواضيع البكالوريا تشمل الفصلين الأول والثاني). وقبل الامتحان التجريبي عليك بالتحضير له فهو بحد ذاته تحضيرا للبكالوريا ويجب أن تجتازه بكل جدية(ويبقي مجرد امتحان تحضيري للبكالوريا في الأخير لكن له دور مهم في نفسية المترشح).

المراجعة الشاملة والنهائية للبكالوريا:

–مواد الحفظ (تاريخ وجغرافيا وشريعة) :مراجعة كاملة لدروس السنة مع اكمال ماتبقى من الشخصيات والمصطلحات.

–الفلسفة: مراجعة المقلات التي كتبتها بأسلوبك الخاص (الفلسفة ليست مادة حفظ) ومراجعة الدروس,

–المواد العلمية: مراجعة القوانين والأساسيات التي تجدها في الملخصات التي أنجزتها خلال السنة الدراسية.

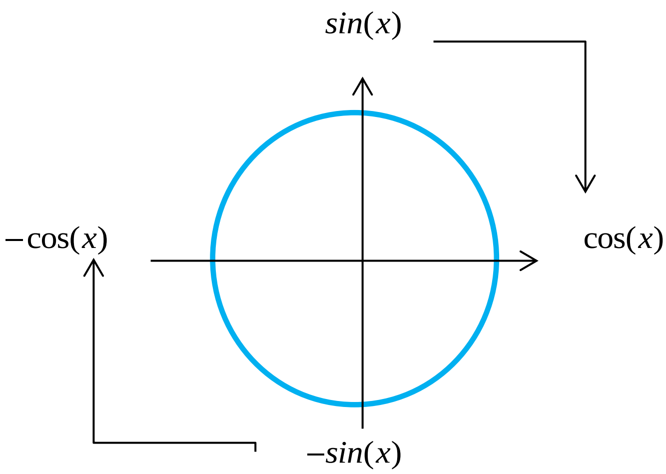
–قم بجمع البكالوريات التجريبية للثانويات الأخرى والبكالوريات الرسمية السابقة وقم بحلها ثم قارن جوابك بالأجوبة النموذجية وفي هذه المرحلة (مرحلة حل المواضيع) أنصح بالدراسة في مجموعة لاتتجاوز 4 أفراد (العمل الجماعي ن أحببت ذلك).

–توقف عن الدراسة لمدة 3 أيام قبل البكالوريا وذلك لاكتساب طاقة تخصصها في أسبوع الأمتحان الرسمي.

1. ملخص الدرس

0 . الجدول التالي يلخص الدوال المشتقة للدوال المألوفة :

الدالة f حيث	معرفة على	قابلة للاشتقاق على	ودالتها المشتقة f' معرفة كمايلي:
$f(x)=k$ حيث: $k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=1$
$f(x)=ax+b$ حيث: a,b عددان حقيقيان	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$
$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=3x^2$
$f(x)=x^n$ حيث: $n\in\mathbb{N}$ و $n>1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$ حيث: $n\in\mathbb{N}^*$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$f'(x)=-\frac{2}{x^3}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=\ln(x)$	$]0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,(k\in\mathbb{Z})\right\}$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,(k\in\mathbb{Z})\right\}$	$f'(x)=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$



➢ تحرك حسب السهم (مع عقارب الساعة) يعني:

$(\sin(x))'=\cos(x)$

$(-\cos(x))'=\sin(x)$

الجدول التالي يلخص العمليات على الدوال المشتقة : g, f دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ ، k عدد حقيقي .

الدالة	قابلة للاشتقاق على	ودالتها المشتقة هي	مثال تطبيقي
$f+g$	I	$f'+g'$	ليكن $f(x)=x^2$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ $f'(x)+g'(x)=2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$-f$	I	$-f'$	ليكن $f(x)=3x^4$ ، $f'(x)=12x^3$
$f-g$	I	$f'-g'$	ليكن $f(x)=3x^2$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ $f'(x)-g'(x)=6x-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=6x+\frac{1}{x^2}$
kf	I	kf'	ليكن $f(x)=3(2x^2+1)$ ، $f'(x)=3(4x)=12x$
f^2	I	$2f\times f'$	ليكن $f(x)=(2x^2+5)^2$ $f'(x)=2(2x^2+5)(4x)$
$\frac{1}{f}$	I باستثناء قيم x حيث : $f(x)=0$	$\frac{-f'}{f^2}$	$f(x)=\frac{1}{x+2}$ $f'(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}$
$\frac{f}{g}$	I باستثناء قيم x حيث : $g(x)=0$	$\frac{f'g-g'f}{g^2}$	ليكن $f(x)=x^2$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{(2x)(\sqrt{x})-(x^2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$ $=\frac{3x}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=na_nx^{n-1}+\ldots+a_1$	ليكن $f(x)=2x^3-x^2-5x+1$ ، $f'(x)=6x^2-2x-5$
$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث: $c\neq 0$	$\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[\cup\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$	$f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$f(x)=\frac{3x+2}{2x-1}$ $f'(x)=\frac{3(-1)-(2)(2)}{(2x-1)^2}=\frac{-7}{(2x-1)^2}$
$\sqrt{f}$	$f(x)\succ 0$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$f(x)=\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}$ $f'(x)=\frac{2(2x)}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$
f^n $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$	I	$n.f'.f^{n-1}$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$	$f(x)=(-3x+1)^5$ $f'(x)=5(-3)(-3x+1)^4=-15(-3x+1)^4$
e^f	I	$f'.e^f$	$f(x)=3e^{\frac{1}{x}}$........$f'(x)=\frac{-3}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$
$\ln\left[u(x)\right]$	$u(x)\succ 0$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$ $:u(x)\succ 0$	$f(x)=\ln(2x^2-1)$ و منه $f'(x)=\frac{4x}{2x^2-1}$

$(f\circ g)(x)=f\left[g(x)\right]$	I	$g'(x)\times f'\left[g(x)\right]$	$h(x)=-2\cos\left(\sqrt{x}\right)$ $h'(x)=\dfrac{-2}{2\sqrt{x}}\left[-\sin\left(\sqrt{x}\right)\right]=\dfrac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$

1 تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$. نقول عن f أنها مستمرة على I إذا استطعنا رسم منحنيها (C) بدون رفع القلم وفق خط مستمر.

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

2 مبرهنة القيم المتوسطة

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$. من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.

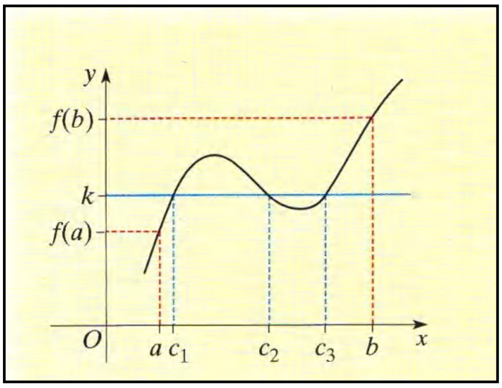
بصيغة أخرى: إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b.

ملاحظة: مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.

التفسير البياني

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحنى (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b. (بالنسبة للشكل المقابل (Δ) يقطع (C) في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب c_1، c_2 و c_3).



3 نهايات الدوال المرجعية

$$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty \quad * \qquad \lim_{x\to-\infty} x=-\infty \quad * \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty \quad *$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty \quad * \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty \quad * \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty \quad * \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty \quad *$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad * \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \quad * \qquad \lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x}=+\infty \quad * \qquad \lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{x}=-\infty \quad *$$

4 العمليات على النهايات

f و g دالتان. a يمثل عددا حقيقيا أو $+\infty$ أو $-\infty$.

- نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

- **نهاية جداء دالتين:ير**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

- **نهاية حاصل قسمة دالتين:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

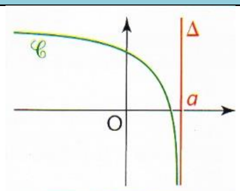
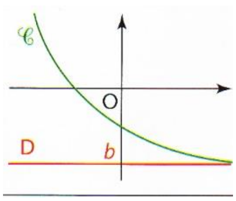
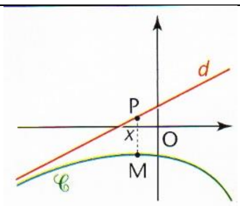
ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات **"عدم التعيين"** (ح ع ت)

يوجد أربع حالات عدم التعين : $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ، $0\times(\pm\infty)$ و $\pm\infty\mp\infty$

قاعدة
- النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة.
- النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة.

5 المستقيمات المقاربة

a و b عددان حقيقيان. f دالة معرفة على مجال I و (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

النهاية	المستقيم المقارب	التمثيل البياني
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$	المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=a$ و الموازي لمحور التراتيب مستقيم مقارب للمنحنى (C)	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$	المستقيم (D) ذو المعادلة $y=b$ و الموازي لمحور الفواصل مستقيم مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$	المستقيم (d) ذو المعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	

ملاحظة إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ مع $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ أو $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$
فمن الواضح أن المستقيم ذو المعادلة: $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f.

6 الوضع النسبي لمنحن والمستقيم المقارب

لدراسة وضعية المنحني (C) الممثل لدالة f بالنسبة إلى مستقيم مقارب له معادلته $y=ax+b$ نقوم بدراسة إشارة الفرق $[f(x)-(ax+b)]$.

إذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ تكون وضعية (C) تحت المستقيم المقارب المائل.

إذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ تكون وضعية (C) فوق المستقيم المقارب المائل.

7 الدالة مركب

الدالة مركب دالتين

تعريف: v دالة معرفة على مجال J و u دالة معرفة على مجال I بحيث من أجل كل x من I، $u(x)\in J$.
الدالة المركبة من الدالتين u و v بهذا الترتيب هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $v\circ u$ و المعرفة على I بـ: $(v\circ u)(x)=v[u(x)]$. و نقرأ v دائرة u لـِ x.

مثال: نعتبر الدالتين u و v المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي: $u(x)=2x^2-3$ و $v(x)=-3x+1$
* الدالة $v\circ u$ معرفة على $\mathbb{R}$ و لدينا: $v\circ u(x)=v[u(x)]=v(2x^2-3)=-6x^2+10$
* الدالة $u\circ v$ معرفة على $\mathbb{R}$ و لدينا: $u\circ v(x)=u[v(x)]=u(-3x+1)=18x^2-12x-1$

نهاية دالة مركب دالتين

a، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u ، v و f دوال حيث $f=v\circ u$.

إذا كانت $\lim_{x\to a}u(x)=b$ و إذا كانت $\lim_{x\to b}v(x)=c$ فإن $\lim_{x\to a}f(x)=c$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـِ $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}}$ و نريد حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ و $v(x)=\sqrt{x}$. $(f=v\circ u)$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}u(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ و $\lim_{x\to 2}v(x)=\sqrt{2}$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sqrt{2}$

8 النهايات بالمقارنة

f، g و h دوال و l عدد حقيقي.

* إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}g(x)=l$ و $\lim_{x\to+\infty}h(x)=l$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $g(x)\le f(x)\le h(x)$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$.
* إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\ge g(x)$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
* إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\le g(x)$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

ملاحظة نمدد هذه الخواص إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ و عند عدد حقيقي.

9 العدد المشتق

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h \neq 0$.

القول أن f تقبل الاشتقاق عند a يعني أنه لما يؤول h إلى 0 النسبة $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تؤول إلى عدد حقيقي نرمزله بالرمز $f'(a)$ و يسمى العدد المشتق للدالة f عند a .

ملاحظة: إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I و نسمى الدالة $f':x \mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f.

التفسير البياني

إذا قبلت f الاشتقاق عند a فإن تمثيلها البياني (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا معامل توجيهه $f'(a)$ و معادلته: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة a هي: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

التفسير الاقتصادي

الكلفة الهامشية للإنتاج هي تزايد الكلفة الناتج عن صنع وحدة إضافية. تعطى الكلفة الهامشية بالعلاقة:
$C_m(q)=C(q+1)-C(q)$ حيث C هي الدالة " الكلفة الإجمالية " نلاحظ أن $C'(q)$ هو تقريب جيد لِ $C_m(q)$. في الاقتصاد نضع $C_m(q)=C'(q)$ حيث C' هي الدالة المشتقة للدالة الكلفة الإجمالية C.

10 مشتقة الدالة مركب

إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و قبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v \circ u$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $(v \circ u)'(x)=v'[u(x)]\times u'(x)$

11 المشتقة و اتجاه التغيرات

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)>0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متزايدة تماما على I.
* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)<0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متناقصة تماما على I.
* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I.

12 القيم الحدية المحلية

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\leq f(x_0)$.
* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\geq f(x_0)$.
* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لِ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.

13 نقطة انعطاف

يمكن تعين نقطة الانعطاف من خلال احدى الطرق التالية:

1. المماس (T) يخرق المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة x_0. (بيانيا)
2. الدالة المشتقة f' تنعدم عند x_0 و لا تغير من اشارتها. (حسابيا)
3. المشتقة الثانية f'' تنعدم عند x_0 و تغير من اشارتها. (حسابيا)

14 مركز تناظر

لاثبات أن النقطة $\omega(a;b)$ مركز تناظر للمنحنى (C) في المعلم $(O;I,J)$.

المقاربة 1:

من أجل كل x و $a-x$ و $a+x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(a-x)+f(a+x)=2b$.

المقاربة 2 :

من أجل كل x و $2a-x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(2a-x)+f(x)=2b$.

المقاربة 3: تغير المعلم $\begin{cases} x=a+X \\ y=b+Y \end{cases}$ كتابة معادلة (C) في المعلم $\omega(\vec{i};\vec{j})$ و اثبات أن الدالة المحصل عليها دالة فردية

تطبيق بين أن النقطة $\Omega(2,3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ للدالة f المعرفة على $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$

حل: **من أجل كل x و $4-x$ من D_f نتحقق من صحة المساواة :** $f(4-x)+f(x)=6$

و عليه

$$\begin{aligned} f(4-x)+f(x) &= \frac{3(4-x)}{4-x-2}+\frac{3x}{x-2} \\ &= \frac{12-3x}{2-x}+\frac{3x}{x-2} \\ &= \frac{3x-12+3x}{x-2} \\ &= \frac{6x-12}{x-2} \\ &= 6\left(\frac{x-2}{x-2}\right)=6 \end{aligned}$$

اذن النقطة $\Omega(2,3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

15 محور تناظر

لاثبات أنالمستقيم $(\Delta):x=a$ محور تناظر للمنحنى (C) في المعلم $(O;I,J)$.

المقاربة 1:

من أجل كل x و $a-x$ و $a+x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(a-x)=f(a+x)$.

المقاربة 2 :

من أجل كل x و $2a-x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(2a-x)=f(x)$.

المقاربة 3:

تغير المعلم $\begin{cases} x=a+X \\ y=b+Y \end{cases}$ كتابة معادلة (C) في المعلم $\omega(\vec{i};\vec{j})$ و اثبات أن الدالة المحصل عليها دالة زوجية

تطبيق بين أن المستقيم ذا المعادلة $x=2$ محورتناظر للمنحنى (C_f) الممثل في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-2)^2+1$.

حل: **من أجل كل x و $4-x$ من D_f نتحقق من صحة المساواة :** $f(4-x)=f(x)$

لدينا

$$\begin{aligned} f(4-x) &= (4-x-2)^2+1 \\ &= (2-x)^2+1 \\ &= (x-2)^2+1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

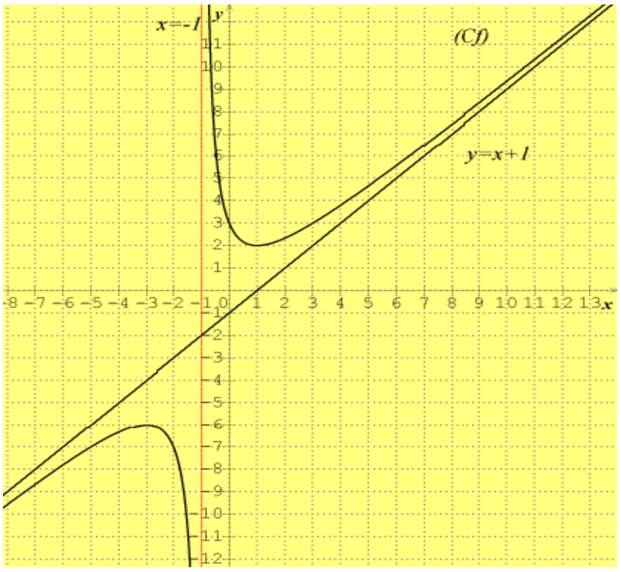
منه $f(4-x)=f(x)$ **اذن المستقيم ذا المعادلة $x=2$ محور تناظر للمنحنى (C_f).**

6 1 المناقشة البيانية

أنواع المناقشة البيانية : أفقية ، مائلة ودورانية .

ليكن m عدد حقيقي. f دالة معرفة على I و (C) تمثيلها البياني في معام متعامد و متجانس.

❶المناقشة البيانية الأفقية: لها أشكال مختلفة منها: $f(x)=m$ ، $f(x)=-m$ ، $f(x)=m+1$ ، $f(x)=m-1$ ، $f(x)=m^2$ ، $f(x)=|m|$ ، $f(x)=-|m|$ ، $f(x)=f(m)$.



مثال: لتكن الدالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ و (C_f) تمثيلها موضح في الشكل المقابل:

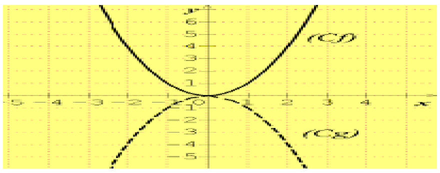
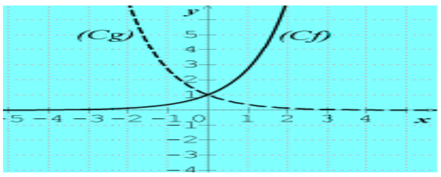
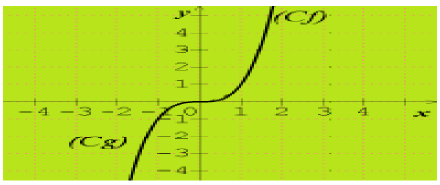
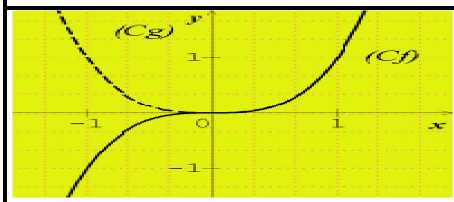
حلول المعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة: $y=m$ وعليه:

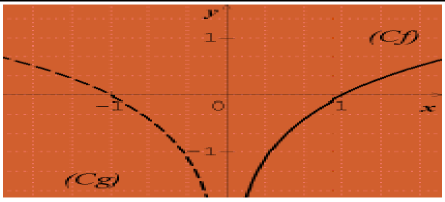
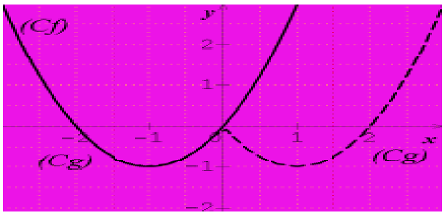
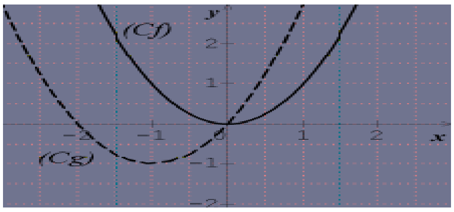
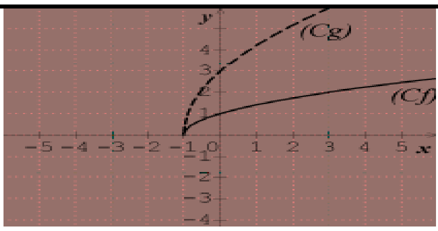
- للمعادلة حلين مختلفين من أجل : $m\in]-\infty;-6[\cup]2;+\infty[$.
- للمعادلة حل مضاعف من أجل: $m=-6$ أو $m=2$.
- ليس للمعادلة حلول من اجل: $m\in]-6;2[$.

6 1 استنتاج تمثيل بياني انطلاقا من تمثيل بياني آخر

f و g دالتان معرفتان على I و (C_f) و (C_g) تمثيلهما البياني على الترتيب في معلم متعامد ومتجانس $(O;I,J)$.

$a,b\in\mathbb{R}$ ، $k\in\mathbb{R}^*$

الحالات الممكنة	التفسير الهندسي	مثال تطبيقي	التمثيل البياني
$g(x)=-f(x)$	(C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل .	$f(x)=x^2$ $g(x)=-x^2$	
$g(x)=f(-x)$	(C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.	$f(x)=e^x$ $g(x)=e^{-x}$	
$g(x)=-f(-x)$	(C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة الى مبدأ المعلم O	$f(x)=x^3$ $g(x)=-(-x)^3$	
$g(x)=\|f(x)\|$	(C_g) ينطبق على لما يقع فوق محور الفواصل . (C_g) هو نظير بالنسبة لمحور الفواصل لما يقع تحت محور الفواصل.	$f(x)=x^3$ $g(x)=\|x^3\|$	

$g(x)=f(\lvert x\rvert)$	دالة زوجية و (C_g) ينطبق على (C_f) لما x موجب	$f(x)=\ln(x)$ $g(x)=\ln(\lvert x\rvert)$	
$g(x)=f(-\lvert x\rvert)$	دالة زوجية و (C_g) ينطبق على (C_f) لما سالب.	$f(x)=(x+1)^2-1$ $g(x)=(-\lvert x\rvert+1)^2-1$	
$g(x)=f(x+a)+b$	(C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}=-a\vec{i}+b\vec{j}$ ، أي: $\vec{u}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$	$f(x)=x^2$ $g(x)=(x+1)^2-1$ $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$	
$g(x)=k.f(x)$	لتكن $M(x,y)\in(C_f)$ تكافئ: $M'(kx,ky)\in(C_g)$	$f(x)=\sqrt{x+1}$ $g(x)=3\sqrt{x+1}$	

2.

النهايات

+

الاستمرارية و الاشتقاقية

❶ النهايات

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^2+2x+7$. ❷ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-5x^2+2x+7}{2x^3+x^2+x-1}$.

❸ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$. ❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

❺ $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{-x^3-x+2}{x^3-x^2+2x-2}$. ❻ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+2x+7}-3x$.

❼ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x-1}{x}$. ❽ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x}$.

❷ الاستمرارية و الاشتقاقية

❶

.1 f دالة للمتغير الحقيقي x معرفة ب: $x \neq 2$:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} \\ f(2)=m \end{cases}$$

عين قيمة m حتى تكون f مستمرة عند $x_0=2$.

.2 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ ب:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^2+b-a}{x} \\ f(x)=x^2+2x-a \end{cases}$$

حيث a و b عددان حقيقيان.

أوجد العلاقة بين a و b حتى تكون f مستمرة عند $x_0=2$.

❷

.1 f دالة عددية معرفة على $[-1;+\infty[$ ب:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}; x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

أدرس استمرارية الدالة f عند $x_0=2$.

.2 f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}; x\neq 0 \\ f(0)=\alpha \end{cases}$$

عين قيمة α حتى تكون f مستمرة عند $x_0=0$.

.3 m عدد حقيقي. f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$$\begin{cases} f(x)=-x; x<0 \\ f(x)=x^2; 0<x<1 \\ f(x)=mx-1; x>1 \end{cases}$$

أ- نضع: $m=1$.

أرسم (C_f)، هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

ب- عين قيمة m حتى تكون f مستمرة على $\mathbb{R}$.

.4 m عدد حقيقي. f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+mx; x<2 \\ f(x)=\sqrt{x-2}; x\geq 2 \end{cases}$$

أ- من أجل أي قيمة ل m تكون f مستمرة عند $x_0=2$.

ب- من أجل القيمة المحصلة ل، أرسم (C_f).

❸

.1 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $f(x)=x+\dfrac{\sin x}{x}$

أ- أثبت أنه من أجل كل $x>0$، $f(x)\geq x-\dfrac{1}{x}$ ثم استنتج نهاية f عند $+\infty$.

ب- أثبت أنه من أجل كل $x<0$ ، $f(x)\le x+\frac{1}{x}$ ثم استنتج نهاية f عند $-\infty$.

2. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\frac{3x^2-\cos x}{x^2+1}$

أ-أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $\frac{3x^2-1}{x^2+1}\le f(x)\le\frac{3x^2+1}{x^2+1}$

ب-استنتج نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

حلول مقترحة

❶ النهايات

❶

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -5x^2+2x+7=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -5x^2=-\infty$.

❷

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{-5x^2+2x+7}{2x^3+x^2+x-1}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{-5x^2}{2x^3}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{-5}{2x}=0$$

أي: $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\frac{-5x^2+2x+7}{2x^3+x^2+x-1}=0$.

❸ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\sqrt{x^2+1}=\sqrt{2}$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} x+1=0^+$.

و بالتالي: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=+\infty$.

❹ $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

لدينا: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x+1=+\infty$. تظهر لنا حالة عدم التعين من الشكل: $\frac{+\infty}{+\infty}$.

بما أن: $x\mapsto+\infty$ فان: $x>0$ و منه: $\sqrt{x^2}=|x|=x$.

و بالتالي: $\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

و منه: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$ و $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$.

اذن $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=1$.

❺ $\lim\limits_{x\mapsto1}\frac{-x^3-x+2}{x^3-x^2+2x-2}$.

لدينا: $\lim\limits_{x\mapsto1}\left(-x^3-x+2\right)=0$ و $\lim\limits_{x\mapsto1}\left(x^3-x^2+2x-2\right)=0$.

تظهر لنا حالة عدم التعين من الشكل: $\frac{0}{0}$.

1 هو حل لكثير الحدود كلا من البسط و المقام و بالتالي نقوم بتحليل البسط و المقام باخراج $(x-1)$ كعامل مشترك .

لدينا: $-x^3-x+2=(x-1)(ax^2+bx+c)$. باستعمال المطابقة

نجد: $\begin{cases}a=-1\\-a+b=0\\-b+c=-1\\-c=2\end{cases}$ و هذا يعني أن: $a=-1$ ، $b=-1$ و $c=-2$

اذن $-x^3-x+2=(x-1)(-x^2-x-2)$.

بنفس الطريقة نجد: $x^3-x^2+2x-2=(x-1)(x^2+1)$.

و بالتالي:
$$\lim_{x\mapsto1}\frac{-x^3-x+2}{x^3-x^2+2x-2}=\lim_{x\mapsto1}\frac{(x-1)(-x^2-x-2)}{(x-1)(x^2+1)}$$
$$=\lim_{x\mapsto1}\frac{-x^2-x2}{x^2+1}=\frac{-4}{3}$$

اذن $\lim\limits_{x\mapsto1}\frac{-x^3-x+2}{x^3-x^2+2x-2}=\frac{-4}{3}$.

❻ $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{4x^2+2x+7}-3x$.

لدينا: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}4x^2+2x+7=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}4x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

باستعمال نهاية تركيب دالة نجد: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{4x^2+2x+7}=+\infty$.

حيث $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -3x=-\infty$ و بالتالي تظهر لنا حالة عدم التعين من الشكل: $+\infty-\infty$.

باستعمال عبارة المرافق نجد أن:

$$\sqrt{4x^2+2x+7}-3x=\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x+7}-3x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x+7}+3x\right)}{\sqrt{4x^2+2x+7}+3x}$$

$$=\frac{-5x^2+2x+7}{\sqrt{4x^2+2x+7}+3x}$$

و منه: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}-5x^2+2x+7=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}-5x^2=-\infty$

و $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{4x^2+2x+7}=+\infty$.

تظهر لنا حالة عدم التعين من جديد و لكن من الشكل: $\frac{-\infty}{+\infty}$.

تذكير: $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x; x>0\\ -x; x<0\end{cases}$.

و بالتالي: بما أن: $x\mapsto+\infty$ فان: $x>0$ و منه: $\sqrt{x^2}=|x|=x$.

اذن $$\frac{-5x^2+2x+7}{\sqrt{4x^2+2x+7}+3x}=\frac{-5x^2\left(1-\frac{2}{5x}+\frac{7}{-5x^2}\right)}{2x\left(\sqrt{1+\frac{1}{2x}+\frac{7}{4x^2}}+\frac{3}{2}\right)}$$

و $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}-5x\left(1-\frac{2}{5x}+\frac{7}{-5x^2}\right)=-\infty$

$$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}2\left(\sqrt{1+\frac{1}{2x}+\frac{7}{4x^2}}+\frac{3}{2}\right)=5$$

و منه: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{-5x^2+2x+7}{\sqrt{4x^2+2x+7}+3x}=-\infty$

اذن $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{4x^2+2x+7}-3x=-\infty$.

❼ $\lim\limits_{x\mapsto0}\frac{\cos x-1}{x}$.

لدينا: $\lim\limits_{x\mapsto0}(\cos x-1)=0$ و $\lim\limits_{x\mapsto0}x=0$. حالة عدم التعين من الشكل $\frac{0}{0}$.

باستعمال العدد المشتق نقوم برفع "ح ع ت" نضع: $f(x)=\cos x$

بما أن $f(0)=0$

اذن $f'(0)=\lim\limits_{x\mapsto0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\mapsto0}\frac{\cos x-1}{x}$

حيث: $f'(0)=-\sin(0)=0$.

و بالتالي: $\lim\limits_{x\mapsto0}\frac{\cos x-1}{x}=0$.

❽ $\lim\limits_{x\mapsto0}\frac{\sin x}{x}$.

لدينا: $\lim\limits_{x\mapsto0}\sin x=0$ و $\lim\limits_{x\mapsto0}x=0$.حالة عدم التعين من الشكل $\frac{0}{0}$

باستعمال العدد المشتق نقوم برفع "ح ع ت" نضع: $f(x)=\sin x$

بما أن $f(0)=0$

و منه: $\lim\limits_{x\mapsto0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\mapsto0}\frac{\sin x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\mapsto0}\frac{\sin x}{x}$

و بالتالي: $f'(0)=\cos(0)=\lim\limits_{x\mapsto0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ ، $\cos(0)=1$

اذن $\lim\limits_{x\mapsto0}\frac{\sin x}{x}=1$.

❷ الاستمرارية و الاشتقاقية

❶

1. تعيين قيمة m:

لدينا: من أجل $x\neq2$ ، $\begin{cases}f(x)=\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}\\ f(2)=m\end{cases}$

f مستمرة عند $x_0=2$ يعني: $\lim\limits_{x\mapsto2}f(x)=f(2)$ و منه:

$m=\lim\limits_{x\mapsto2}f(x)$.

نحسب $\lim\limits_{x\mapsto2}f(x)$.

لدينا: $\lim\limits_{x\mapsto 2} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

بالتعويض المباشر نجد **"ح ع ت"** من الشكل $\dfrac{0}{0}$.

لرفع "**ح ع ت**" نقوم بضرب و قسمة في مرافق بسط و مقام عبارة $f(x)$.

تذكير: a و b عددان حقيقيان، مرافق العدد $a+b$ هو $a-b$

مثال: مرافق العدد $\sqrt{2}-1$ هو $\sqrt{2}+1$

أي:

$$\lim_{x\mapsto 2} f(x)=\lim_{x\mapsto 2}\frac{\left(x-\sqrt{x+2}\right)}{\left(\sqrt{4x+1}-3\right)}\times\frac{\left(x+\sqrt{x+2}\right)}{\left(x+\sqrt{x+2}\right)}\times\frac{\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\mapsto 2}\frac{(x-2)(x+1)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4(x-2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}$$

$$=\lim_{x\mapsto 2}\frac{(x+1)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=\frac{18}{16}$$

و بالتالي: $m=\dfrac{9}{8}$.

2. العلاقة بين a و b:

حتى تكون f مستمرة عند $x_0=2$ يجب أن نجد:

$\lim\limits_{x\mapsto 2} f(x)=f(2)$.

و بالتالي: $\lim\limits_{\substack{> \\ x\mapsto 2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{< \\ x\mapsto 2}} f(x)$.

أي: $\lim\limits_{\substack{> \\ x\mapsto 2}} x^2+2x-a=\lim\limits_{\substack{< \\ x\mapsto 2}}\dfrac{2x^2+b-a}{x}$

نجد: $\dfrac{8+b-a}{2}=4+4-a$.

و هذا يعني: $8+b-a=16-2a$ اذن: $a+b=8$.

❷

1. f معرفة على $]-1;+\infty[$ ب:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}\,; x\neq 2\\ f(2)=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$$

استمرارية الدالة f عند $x_0=2$ معناه: $\lim\limits_{x\mapsto 2} f(x)=f(2)$

f معرفة عند $x_0=2$

$$\lim_{x\mapsto 2} f(x)=\lim_{x\mapsto 2}\frac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}$$

بالتعويض المباشر نجد **"ح ع ت"** من الشكل $\dfrac{0}{0}$.

لرفع "**ح ع ت**" نقوم بضرب و قسمة في مرافق بسط عبارة $f(x)$.

أي:

$$\lim_{x\mapsto 2}\frac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}=\lim_{x\mapsto 2}\frac{\left(\sqrt{3x+3}-3\right)}{(2-x)}\times\frac{\left(\sqrt{3x+3}+3\right)}{\left(\sqrt{3x+3}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\mapsto 2}\frac{(3x-6)}{(-1)(x-2)\left(\sqrt{3x+3}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\mapsto 2}\frac{3(x-2)}{(-1)(x-2)\left(\sqrt{3x+3}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\mapsto 2}\frac{3}{\left(-\sqrt{3x+3}-3\right)}$$

و بالتالي: $\lim\limits_{x\mapsto 2} f(x)=-\dfrac{1}{2}$.

اذن الدالة f مستمرة عند $x_0=2$.

2. f معرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}\,; x\neq 0\\ f(0)=\alpha\end{cases}$$

تعين قيمة α:

لدينا: $\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x)=f(0)$

أي: $\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x)=\alpha$.

$$\alpha=\lim_{x\mapsto 0} f(x)=\lim_{x\mapsto 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\mapsto 0}\frac{\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\times\frac{\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\mapsto 0}\frac{1-\left(1+x^2\right)}{x\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{-x^2}{x\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\mapsto 0}\frac{-x}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

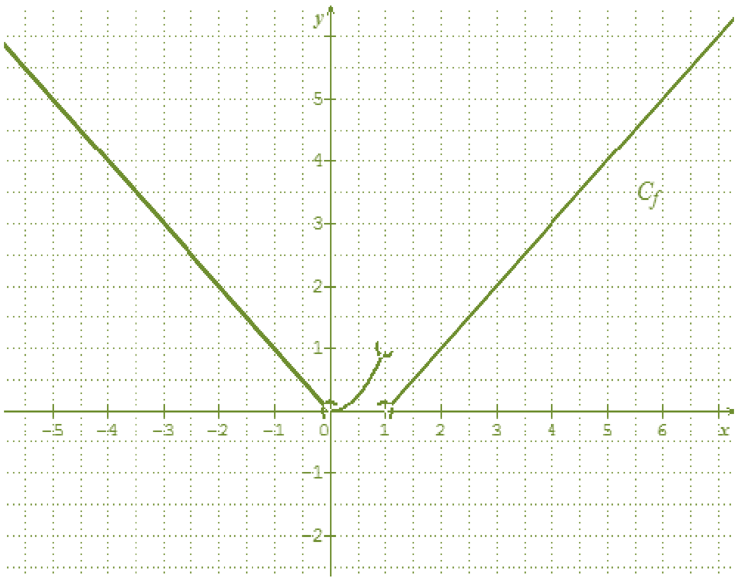
وبالتالي نجد: $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

اذن: $\alpha=0$.

3. أ-نضع: $m=1$.يعني:

$$\begin{cases} f(x)=-x; x<0 \\ f(x)=x^2; 0<x<1 \\ f(x)=x-1; x>1 \end{cases}$$

رسم (C_f): بأخد قيم مساعدة في مجال تعريف الدالة.



f ليست مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها ليست مستمرة عند $x_0=1$.

ب- تعين قيمة m:

تكون f مستمرة على $\mathbb{R}$ اذا كانت مستمرة عند $x_0=1$

أي: $\lim_{\substack{> \\ x\mapsto 1}} f(x)=\lim_{\substack{< \\ x\mapsto 1}} f(x)$.

و بالتالي: $\lim_{\substack{> \\ x\mapsto 1}} mx-1=\lim_{\substack{< \\ x\mapsto 1}} x^2$

نجد: $m-1=1$ و منه: $m=2$.

اذن من أجل x من $[1;+\infty[$ لدينا: $f(x)=2x-1$.

4. f معرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+mx; x<2 \\ f(x)=\sqrt{x-2}; x\geq 2 \end{cases}$$

أ- تعين قيمة m:

f مستمرة عند $x_0=2$ يعني $\lim_{\substack{> \\ x\mapsto 2}} f(x)=\lim_{\substack{< \\ x\mapsto 2}} f(x)$

$$\lim_{\substack{> \\ x\mapsto 2}}\sqrt{x-2}=\lim_{\substack{< \\ x\mapsto 2}} x^2+mx$$

اذن $0=4+2m$ و منه: $m=-2$.

من أجل x من $[2;+\infty[$ لدينا: $f(x)=x^2-2x$.

$f(x)=x^2-2x$ *

f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;2[$ حيث: $f'(x)=2x-2$.

x	$-\infty$	1	2
$f'(x)$	--	0	+

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty} x^2-2x=\lim_{x\mapsto-\infty} x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\mapsto 2} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty} x^2-2x=0$$

$f(x)=\sqrt{x-2}; x\geq 2$ *

f قابلة للاشتقاق حيث: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}>0$

f غيرقابلة للاشتقاق عند 2.

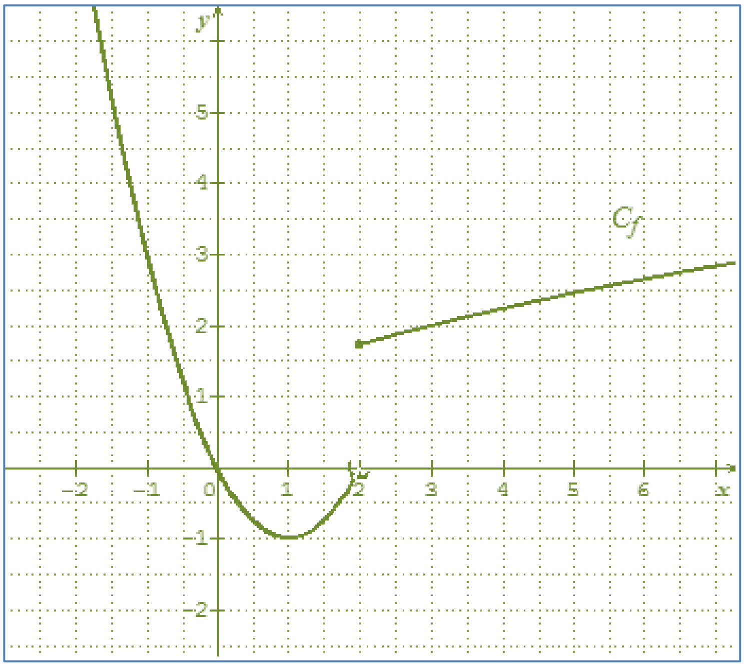
$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=+\infty$ ، $f(2)=0$.

و منه جدول التغيرات الدالة f هو كالآتي:

x	$+\infty$	2	1	$-\infty$
$f'(x)$	-- 0 +	+		
$f(x)$	$+\infty$ ↘ -1	↗ 0	↗	$+\infty$

ب-من أجل: $m=-2$.

رسم (C_f)



❸

.1 f معرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $f(x)=x+\dfrac{\sin x}{x}$.

من أجل كل $x>0$ ، $f(x)\ge x-\dfrac{1}{x}$.

تذكير: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-1\le \sin x\le 1$.

لدينا: $-1\le \sin x\le 1$

و بالتالي من أجل كل $x>0$: $\dfrac{-1}{x}\le \dfrac{\sin x}{x}\le \dfrac{1}{x}$.

باضافة x لكل أطراف المتباينة نجد:

$$\frac{-1}{x}+x\le \frac{\sin x}{x}+x\le \frac{1}{x}+x$$

و منه: $x-\dfrac{1}{x}\le f(x)\le x+\dfrac{1}{x}$

اذن: $f(x)\ge x-\dfrac{1}{x}$.

نهاية f عند $+\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x-\dfrac{1}{x}=+\infty$ و بالتالي: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=+\infty$.

ب-بنفس الطريقة نجد من أجل كل $x<0$ ، $f(x)\le x+\dfrac{1}{x}$

نهاية f عند $-\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x+\dfrac{1}{x}=-\infty$ و بالتالي: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=-\infty$.

.2 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{3x^2-\cos x}{x^2+1}$

-أ

تذكير: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-1\le cos\,x\le 1$.

لدينا: $-1\le cos\,x\le 1$.

أي: $-1\le -cos\,x\le 1$

باضافة $3x^2$ لكل أطراف المتباينة نجد:

$3x^2-1\le 3x^2-cos\,x\le 3x^2+1$.

تذكير: a ، b عددان حقيقيان غير معدومين و من نفس الاشارة
لدينا : $a\le b$ يكافئ $\dfrac{1}{b}\le\dfrac{1}{a}$.

و منه: $\dfrac{3x^2-1}{x^2+1}\le\dfrac{3x^2-\cos x}{x^2+1}\le\dfrac{3x^2+1}{x^2+1}$.

أي: $\dfrac{3x^2-1}{x^2+1}\le f(x)\le\dfrac{3x^2+1}{x^2+1}$.

ب- نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{|x|\mapsto+\infty}\dfrac{3x^2-1}{x^2+1}=\lim\limits_{|x|\mapsto+\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$

و $\lim\limits_{|x|\mapsto+\infty}\dfrac{3x^2+1}{x^2+1}=\lim\limits_{|x|\mapsto+\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$

و بالتالي: $\lim\limits_{|x|\mapsto+\infty} f(x)=3$.

3. اختبر معلوماتك !!

❶	kدالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=\|x\|+\dfrac{4}{x+1}$ 1.أ- احسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\<}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ و $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\>}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$. ماذا تستنتج؟. ب- أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.
❷	. g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=\|x\|\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ أ-أثبت أن الدالة g زوجية.
❸	f دالة معرفة على : $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=\|f(x)\|$. بين كيف يمكن انشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) . ثم أرسمه في نفس المعلم السابق. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة: $g(x)=m^2$.
❹	. f دالة للمتغير الحقيقي x معرفة ب: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} : x\neq 2 \\ f(2)=m \end{cases}$ عين قيمة m حتى تكون f مستمرة عند $x_0=2$.
❺	f الدالة المعرفة كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x} : x\in]-\pi,0[\cup]0,\pi[\\ f(0)=0 \end{cases}$ 1.بين أن f مستمرة عند القيمة 0 . 2.بين أن f تقبل الاشتقاق عند القيمة 0 .
❻	احسب النهاية التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

❶. k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$

1. أ- حساب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\dfrac{-h+\dfrac{4}{h+1}-4}{h}$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{-h^2-5h}{h(h+1)}==\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{-h-5}{h+1}=-5$$

و منه: $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}=-5$

ولدينا: $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{h+\dfrac{4}{h+1}-4}{h}$.

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{h^2-3h}{h(h+1)}=\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{h-3}{h+1}=-3$$

و منه: $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}=-3$

نستنتج أن: الدالة k الدالة غير قابلة للاشتقاق عند 0 لأن العدد المشتق من اليمين (-3) لا يساوي العدد المشتق من اليسار (-5).

ب- التفسير الهندسي:

بما أن البدالة k قابلة للاشتقاق من اليمين و قابلة للاشتقاق من اليسار فان منحنى الدالة k يقبل نصفي مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ملاحظة: يمكن القول أن النقطة $(0;4)$ هي نقطة زاوية لمنحنى الدالة k.

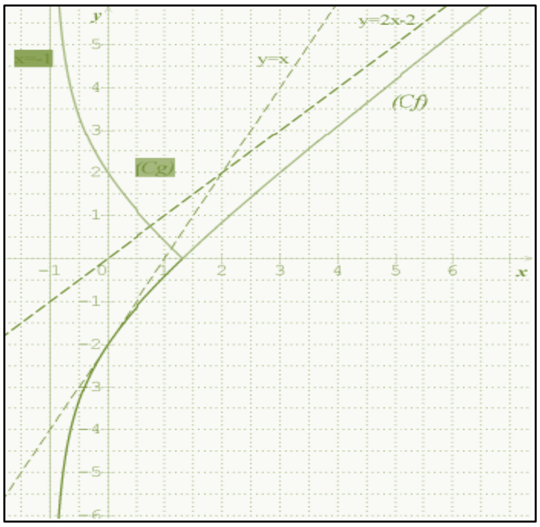
❷. g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=|x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

أ- اثبات أن الدالة g زوجية:

تذكير: f دالة معناه: من أجل كل x من D_f و $-x$

من D_f لدينا: $f(-x)=f(x)$.



$$g(-x)=|-x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}}\right)=|x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=g(x)$$

و منه: الدالة g زوجية.

شرح طريقة الرسم:

لدينا: $g(x)=|f(x)|=\begin{cases} f(x), x>0 \\ -f(x), x<0 \end{cases}$

أي: اذا كان $x>0$ فان (C_g) منطبق على (C_f) .

اذا كان فان (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

3. g دالة g معرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=|f(x)|$.

كيفية انشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) :

$$g(x)=|f(x)|=\begin{cases} g(x)=f(x), x>x_0 \\ g(x)=-f(x), x<x_0 \end{cases}$$

وبالتالي:

من أجل $x>x_0$ (C_g) منطبق على (C_f).

من أجل $x<x_0$ (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

ناقش بيانيا، عدد واشارة حلول المعادلة: $g(x)=m^2$.

لدينا من أجل :

$m=0$ للمعادلة حل وحيد موجب. $(x=x_0)$.

$0<|m|<\sqrt{2}$ للمعادلة حلين موجبين.

$|m|=\sqrt{2}$ للمعادلة حلان أحدهما موجب و الآخر معدوم.

$|m|>\sqrt{2}$ للمعادلة حلان مختلفان في الاشارة.

4. تعيين قيمة m:

لدينا: من أجل $x \neq 2$ ، $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} \\ f(2) = m \end{cases}$

f مستمرة عند $x_0 = 2$ يعني: $\lim\limits_{x \mapsto 2} f(x) = f(2)$ و منه: $m = \lim\limits_{x \mapsto 2} f(x)$.

نحسب $\lim\limits_{x \mapsto 2} f(x)$.

لدينا: $\lim\limits_{x \mapsto 2} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 2} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

بالتعويض المباشر نجد "ح ع ت" من الشكل $\dfrac{0}{0}$.

لرفع "ح ع ت" نقوم بضرب و قسمة في مرافق بسط و مقام عبارة $f(x)$.

تذكير: a و b عددان حقيقيان، مرافق العدد $\sqrt{a}+b$ هو $\sqrt{a}-b$ <u>**مثال:**</u> مرافق العدد $\sqrt{2}-1$ هو $\sqrt{2}+1$

أي:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \mapsto 2} f(x) &= \lim_{x \mapsto 2} \frac{\left(x-\sqrt{x+2}\right)}{\left(\sqrt{4x+1}-3\right)} \times \frac{\left(x+\sqrt{x+2}\right)}{\left(x+\sqrt{x+2}\right)} \times \frac{\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{4x+1}+3\right)} \\
&= \lim_{x \mapsto 2} \frac{(x-2)(x+1)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4(x-2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)} \\
&= \lim_{x \mapsto 2} \frac{(x+1)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4\left(x+\sqrt{x+2}\right)} = \frac{18}{16}
\end{aligned}$$

و بالتالي: $m = \dfrac{9}{8}$.

5. 1. الدالة f مستمرة عند القيمة 0 لأن: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)\sin x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right) = 0$ و $f(0) = 0$.

2. الدالة f تقبل الاشتقاق عند القيمة 0 لأن:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x \sin x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x(1+\cos x)}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{1+\cos x}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f'(0).$$

6. لدينا: $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x+1 = +\infty$. تظهر لنا حالة عدم التعين من الشكل: $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

بما أن: $x \mapsto +\infty$ فان: $x > 0$ و منه: $\sqrt{x^2} = |x| = x$.

و بالتالي: $\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

و منه: $\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$ و $\lim_{x\mapsto+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$.

اذن $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=1$.

4.

حلول بعض تمارين الكتاب المدرسي

تمرين 80 صفحة 59:

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$

كما يلي: $$f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$$

C_f المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

ب) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول التغيرات.

2) أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$:

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x-1)^2}$$

ب) استنتج أن C_f يقبل المستقيم D الذي معادلته $y=x-2$ كمستقيم مقارب.

ج) حدد وضعية C_f بالنسبة إلى D .

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α في المجال $]-\infty;1[$

استنتج حصرا لـ α بتقريب 10^{-2} .

4) أنشئ D و C_f في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.(الوحدة $2cm$ على محور الفواصل و $1cm$ على محور التراتيب)

5) استنتج بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

حل مقترح

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$$

1. أ-حساب نهايات الدالة f :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\mapsto+\infty} x=+\infty$$

و بالتالي: $\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty} x=-\infty$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1}\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}=+\infty$$

ب − ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول التغيرات.

الدالة f قابلة للاشتقاق على حيث:

$$f'(x)=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)^2-(x^3-4x^2+8x-4)(2x-2)}{(x-1)^4}$$
$$=\frac{x^4-4x^3+3x^2}{(x-1)^4}$$

و منه: $$f'(x)=\frac{x^2(x^2-4x+3)}{(x-1)^4}$$

اشارة $f'(x)$ من اشارة: x^2-4x+3 أي:

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	-	0	+

و منه جدول تغيرات الدالة كالتالي:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

حيث: $f(3)=\frac{11}{4}$.

2.أ–تعين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d

من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا:

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x-1)^2}$$

$$f(x)=\frac{(ax+b)(x-1)^2+cx+d}{(x-1)^2}$$

أي:

$$=\frac{ax^3+x^2(-2a+b)+x(a-2b+c)+b+d}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}a=1\\-2a+b=-4\\a-2b+c=8\\b+d=-4\end{cases}\quad \text{و منه:}\quad \begin{cases}a=1\\b=-2\\c=3\\d=-2\end{cases}$$

و بالتالي: $f(x)=x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$.

ب –المستقيم المقارب D :

لدينا:

$$\lim_{x\mapsto\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\mapsto\infty}\left[x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}-(x-2)\right]$$

$$\lim_{x\mapsto\infty}\left[\frac{3x-2}{(x-1)^2}\right]=\lim_{x\mapsto\infty}\frac{3}{x}=0$$

و منه نستنتج أن المنحنى C_f يقبل المستقيم D الذي معادلته:

$y=x-2$ كمستقيم مقارب.

ج– وضعية C_f بالنسبة إلى D :

لدينا: $f(x)-y=\left[\frac{3x-2}{(x-1)^2}\right]$

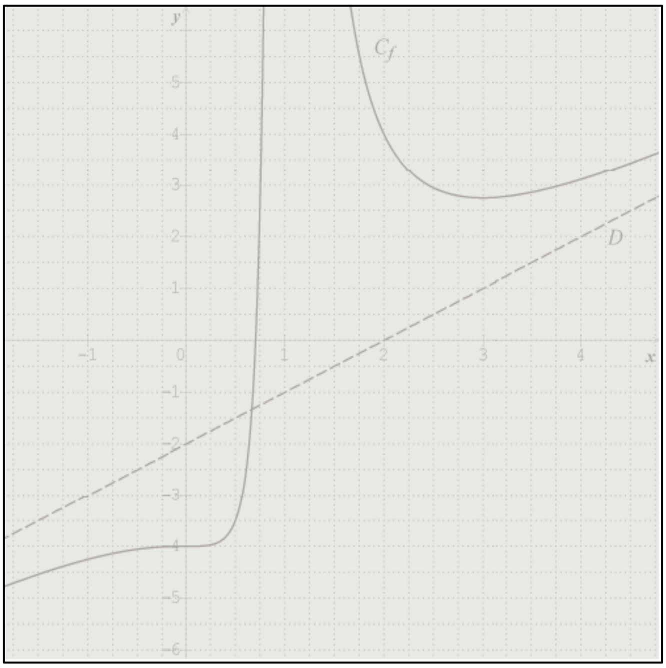
و منه اشارة الفرق من اشارة: $3x-2$ أي:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	||	$+$	
الوضعية		C_f تحت D	↓			C_f فوق D	
			C_f يقطع D في $A(\frac{2}{3};f(\frac{2}{3}))$				

3.الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و منه: أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α في المجال $]-\infty;1[$.

حصر α

4.أنشئ D و C_f في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.(الوحدة $2cm$ على محور الفواصل و $1cm$ على محور التراتيب)



5. استنتج بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$. هي نقط تقاطع المنحنى C_f مع المستقيم ذو المعادلة: $y=m$

من أجل $m\in\left]-\infty;\frac{11}{4}\right[$ يوجد حل واحد.

من أجل $m=\frac{11}{4}$ يوجد حلان.

من أجل $m\in\left]\frac{11}{4};+\infty\right[$ يوجد ثلاث حلول.

📖 تمرين 62 صفحة 80:

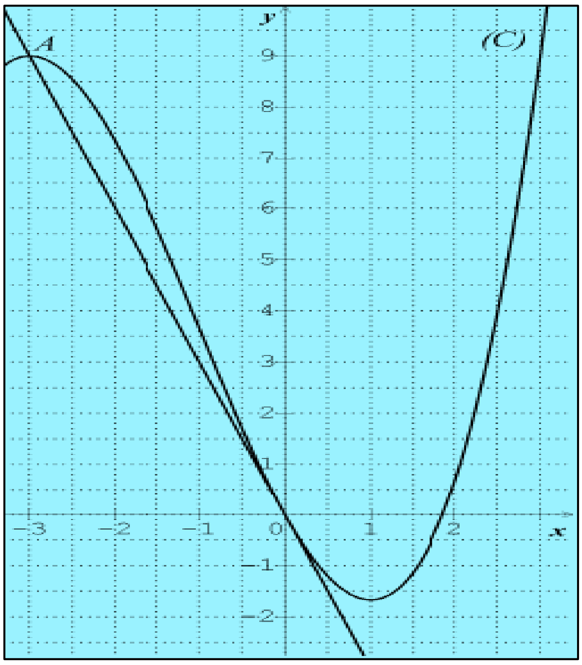
الشكل الموالي هو التمثيل البياني (C) لدالة f معرفة و قابلة

للاشتقاق على المجال $[-3;3]$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث:

*يمر (C) بمبدأ المعلم O و يشمل النقطة $A(-3;9)$.

*يمر (C) في النقطة B التي فاصلتها 1 مماسا أفقيا. و يقبل المستقيم (OA)

كمماس عند النقطة O .



1.ماهو معامل توجيه المستقيم (OA).

2.عين اتجاه تغير الدالة f .

3.حل بيانيا في المجال $[-3;3]$ المتراجحة: $f(x)\geq -2$.

4.نفرض أن : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ حيث : a ، b ، c و d أعداد حقيقية.

بين أن: $a=\frac{1}{3}$ ، $b=1$ ، $c=-3$ و $d=0$.

حل مقترح

1. معامل توجيه المستقيم (OA) :

$$\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{9-0}{-3-0}=\frac{9}{-3}=-3 \ .$$

2. الجدول الموالي يبين اتجاه تغير الدالة f :

x	3	1	-3
$f(x)$	↘	$f(1)$	↙

3. نلاحظ من التمثيل البياني للدالة أنه من أجل كل x من $[-3;3]$،

$f(x)\geq -2$.

ومنه مجموعة حلول المتراجحة: $f(x)\geq -2$ هي المجال $[-3;3]$.

4. لدينا من المعطيات:

$$\begin{cases} f(-3)=9 \\ f'(1)=0 \\ f'(0)=-3 \\ f(0)=0 \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} -27a+9b-3c+d=9 \\ 3a+2b+c=0 \\ c=-3 \\ d=0 \end{cases}$$

و هذا يعني: $$\begin{cases} -3a+b=0 \\ 3a+2b-3=0 \\ c=-3 \\ d=0 \end{cases}$$

و عليه نحصل على: $a=\frac{1}{3}$، $b=1$، $c=-3$ و $d=0$.

و منه : $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x$

📖 تمرين 64 صفحة 81

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{6}{x}-\frac{9}{2x^2}+\frac{1}{x^3}$$

C هو التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ الوحدة $3cm$.

1.درس تغيرات f ، شكل جدول التغيرات .

2. أ- حل المعادلة $f(x)=0$ ، استنتج أن للمنحني C لا يقطع محور الفواصل.

ب- حسب جدول التغيرات ناقش حسب قيم اعدد الحقيقي

m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

ج- عين معادلة لكل من المماسين T_1 و T_2 للمنحني C عند النقطتين اللتين فاصلتاهما $\frac{1}{2}$ و 1.

3. أنشئ المماسين T_1 ، T_2 و المنحني C.

حل مقترح

الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{6}{x}-\frac{9}{2x^2}+\frac{1}{x^3}$

1. درس تغيرات f ، شكل جدول التغيرات .

النهايات:

تذكير: $\lim\limits_{|x|\mapsto+\infty}\frac{a}{x^n}=0$ حيث n عدد طبيعي غيرمعدوم و a عدد حقيقي.

و منه: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{6}{x}-\frac{9}{2x^2}+\frac{1}{x^3}=0$.

$$\lim_{x\mapsto 0} f(x)=\lim_{x\mapsto 0}\frac{6}{x}-\frac{9}{2x^2}+\frac{1}{x^3}$$

تظهر لنا حالة عدم التعين من الشكل: $+\infty-\infty$.

لدينا: $\frac{6}{x}-\frac{9}{2x^2}+\frac{1}{x^3}=\frac{6x^2-\frac{9}{2}x^2+1}{x^3}$

و بالتالي: $\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{6x^2-\frac{9}{2}x^2+1}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{6x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{6}{x}=+\infty$

المشتقة :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث:

$$f'(x)=\frac{-6}{x^2}-\frac{9}{2}\left(\frac{-2}{x^3}\right)-\frac{3}{x^4}=\frac{-6}{x^2}+\frac{9}{x^3}-\frac{3}{x^4}$$

أي: $f'(x)=\frac{-6x^2+9x-3}{x^4}$

اشارة $f'(x)$ من اشارة البسط أي: $-6x^2+9x-3$.

لدينا: $\Delta=9$ (المميز) و منه $x=1$ أو $x=\frac{1}{2}$.

x	$+\infty$		1		$\frac{1}{2}$		0
$f'(x)$		-	0	+	0	--	

و جدول تغيراتها هو كتالي:

x	0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		--	0	+	0	--	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	0

حيث: $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ و $f(1)=\frac{5}{2}$

2. أ- حل المعادلة $f(x)=0$

لدينا: $f(x)=\frac{6}{x}-\frac{9}{2x^2}+\frac{1}{x^3}=\frac{6x^2-\left(\frac{9}{2}\right)x+1}{x^3}$

$f(x)=0$ معناه: $\frac{6x^2-\left(\frac{9}{2}\right)x+1}{x^3}=0$ أي: $6x^2-\left(\frac{9}{2}\right)x+1=0$.

نلاحظ أن : $\Delta=\frac{-15}{4}$ و بالتالي: $6x^2-\left(\frac{9}{2}\right)x+1>0$

اذن المنحني C لا يقطع محور الفواصل.

ب- حسب جدول التغيرات ناقش حسب قيم اعدد الحقيقي.

حلول المعادلة $f(x)=m$ هي:

من أجل $m\leq 0$ لا يوجد حلول.

من أجل $0<m<2$ يوجد حل وحيد.

من أجل $m=2$ أو $m=\frac{2}{5}$ يوجد حلان.

من أجل $2<m<\frac{2}{5}$ يوجد ثلاث حلول.

من أجل $m>\frac{2}{5}$ يوجد حل وحيد.

ج-معادلة المماسات:

تعين معادلة المماس T_1:

لدينا: $T_1: y=f'(1)(x-1)+f(1)$ حيث: $f'(1)=0$ و $f(1)=\frac{5}{2}$

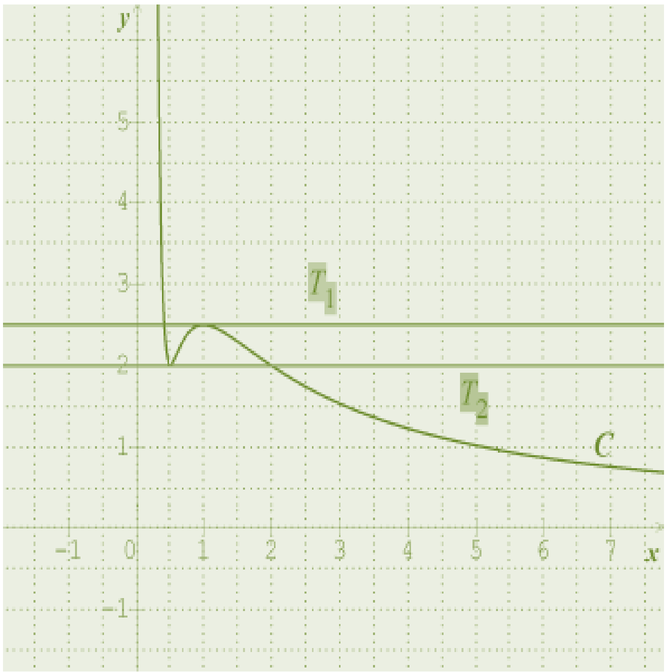
اذن: $y=\frac{5}{2}$ معادلة المماس T_1 عند النقطة التي فاصلتها 1.

تعين معادلة المماس T_2:

لدينا: $T_2 : y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)$ حيث: $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ و
$f\left(\frac{1}{2}\right)=2$

اذن: $y=2$ معادلة المماس T_2 عند النقطة التي فاصلتها $\frac{1}{2}$.

3. أنشاء المماسين T_1، T_2 و المنحنى C.



📖 تمرين 75 صفحة 85

I. ليكن P كثير حدود للمتغير الحقيقي x حيث:

$$P(x)=2x^3-3x^2-1$$

1. أدرس تغيرات الدالة P ثم شكل جدول تغيراتها .

2.بين ان المعادلة $P(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]1;+\infty[$. عين حصرا ل α سعته 10^{-1} .

3.استنتج حسب قيم اشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ ب: $f(x)=\frac{1-x}{x^3+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1.عين النهايات للدالة f .ماذا تستنتج بيانيا؟

2.بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f'(x)=\frac{P(x)}{(x^3+1)^2}$

3.استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4.بين أن: $f(\alpha)=\frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}$ ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5. عين معادلة (T) المماس ل (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

6.تحقق انه من أجل كل x من $]-1;1[$:

$$f(x)-(-x+1)=\frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$$

7.أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T).

8.أرسم (T) و (C_f).

حل مقترح

I). P كثير حدود للمتغير الحقيقي x حيث:

$$P(x)=2x^3-3x^2-1$$

1. دراسة تغيرات P :

النهايات:

$$\lim_{x\mapsto+\infty}P(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}2x^3-3x^2-1=\lim_{x\mapsto+\infty}2x^3=+\infty$$

و منه: $\lim_{x\mapsto-\infty}P(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}2x^3=-\infty$

المشتقة

P دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$P'(x)=6x^2-6x$$

$P'(x)=0$ يعني $6x^2-6x$ أي: $x=1$ أو $x=0$

اذن اشارة $P'(x)$ كالتالي:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$P'(x)$		+	0	--	0	+	

جدول تغيرات P

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$--$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2. المعادلة $P(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[1;+\infty[$

لأن: الدالة P مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[1;+\infty[$

و $P(1)<0<\lim\limits_{x\mapsto+\infty}P(x)$ اذن يوجد عنصر وحيد α على المجال $[1;+\infty[$

حصر α سعته 10^{-1}

لدينا: $P(1,5)=-1$ ، $P(1,6)=-0,49$ و $P(1,7)=0,21$.

اذن $\alpha\in]1,6;1,7[$.

3. استنتاج اشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		$--$	0	$+$	

II). f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ ب: $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$

1. تعين نهايات الدالة f :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{1-x}{x^3+1}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{-x}{x^3}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{-1}{x^2}=0$$

و منه:

x	$+\infty$		α		-1			$-\infty$
$f'(x)$		$--$		$\vert\vert$	$--$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\vert\vert$	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	$\nearrow$	0

$$\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{-1}{x^2}=0$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$--$	0	$+$	

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\frac{1-x}{x^3+1}$$

ندرس اشارة x^3+1

نلاحظ أن: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ اشارة: $x+1$ لأن :

x^2-x+1 مميزه $\Delta=-36<0$.

و بالتالي: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\dfrac{1-x\mapsto2}{x^3+1\mapsto0^-}=-\infty$

و منه: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\dfrac{1-x\mapsto2}{x^3+1\mapsto0+}=+\infty$.

نستنتج بيانيا أن :

بما أن: $\lim\limits_{|x|\mapsto+\infty}f(x)=0$ فان: $y=0$ معادلة مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

بما أن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{><}-1}f(x)=\pm\infty$ فان: $x=-1$ معادلة مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

2. بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f'(x)=\dfrac{P(x)}{(x^3+1)^2}$

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ حيث:

$$f'(x)=\frac{-(x^3+1)-(1-x)(3x^2)}{(x^3+1)}$$
$$=\frac{-x^3-1-3x^2+3x^3}{(x^3+1)}=\frac{2x^3-3x^2-1}{(x^3+1)}$$

و بالتالي: $f'(x)=\dfrac{P(x)}{(x^3+1)^2}$ وهو المطلوب.

3. استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

بما أن $f'(x)=\dfrac{P(x)}{(x^3+1)^2}$ فان اشارة $f'(x)$ من اشارة $P(x)$

ومنه جدول تغيرات f هو كالآتي:

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$--$	$\vert\vert$	$--$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$ $-\infty$	$\vert\vert$	$+\infty$ $\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

4. بين أن: $f(\alpha)=\frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}$

لدينا: $f(\alpha)=\frac{1-\alpha}{\alpha^3+1}$.

نعلم أن : $P(\alpha)=0$ أي: $2\alpha^3-3\alpha^2-1=0$ و بالتالي:

$\alpha^3=\frac{3\alpha^2+1}{2}$ بالتعويض نجد: $f(\alpha)=\frac{1-\alpha}{\frac{3\alpha^2+1}{2}+1}$

أي: $f(\alpha)=\frac{1-\alpha}{\frac{3\alpha^2+3}{2}}$ و بالتالي: $f(\alpha)=\frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^3+1)}$.

تعين حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا: $1,6<\alpha<1,7$

$-1,4<2(1-\alpha)<-1,2$.

و منه: $(1)...1,2<-2(1-\alpha)<1,4$

$(2)...10,68<3(\alpha^3+1)<11,67$

من (1) و (2) نستنتج أن $\frac{-1,4}{11,67}<\frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^3+1)}<\frac{-1,2}{10,68}$.

و منه: $\frac{1,2}{11,67}<\frac{-2(1-\alpha)}{3(\alpha^3+1)}<\frac{1,4}{10,68}$

أي: $0,1<-f(\alpha)<0,13$ و بالتالي:

$-0,13<-f(\alpha)<-0,1$.

5. معادلة المماس (T):

لدينا: $(T): y=f'(0)(x-x)+f(0)$ حيث: $f'(0)=-1$ و $f(0)=1$

و منه $y=-x+1$. معادلة (T) المماس ل (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

6. تحقق انه من أجل كل x من $]-1;1[$:

$$f(x)-(-x+1)=\frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$$

لدينا: $f(x))-(-x+1)=\frac{1-x}{x^3+1}+x-1=\frac{(1-x)+(x-1)(x^3+1)}{x^3+1}$

$=\frac{1-x+x^4+x-x^3-1}{x^3+1}=\frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$

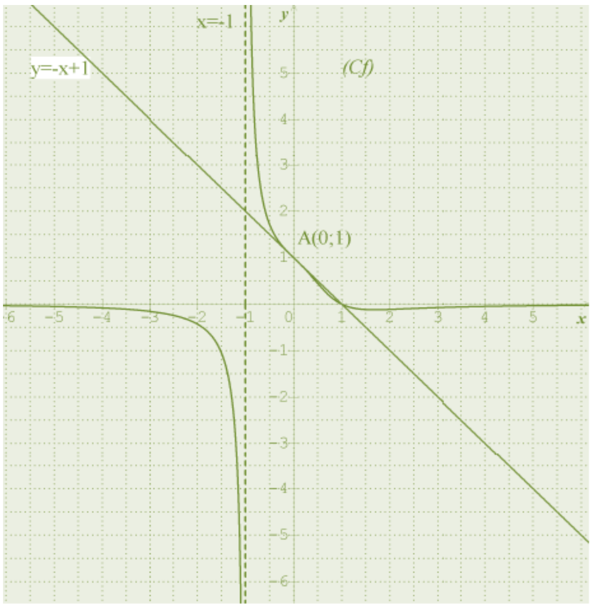
و هو المطلوب.

7. دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T).

$f(x)-(-x+1)=\frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$ و منه:

x	-1		0		1
$x+1$			--		
x^3		--	0	+	
x^3+1			+		
$\frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$		+	0	--	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	$(C_f)\cap(\Delta)=\{A(0;1)\}$	(C_f) تحت (Δ)	

8. رسم (T) و (C_f).



تمرين 48 صفحة 123

f و g دالتان معرفتان على $[1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=x-\frac{2x-1}{x^4} \quad \text{و} \quad f(x)=x+\frac{x+1}{x^3}$$

(C_f) و (C_g) هما التمثيلان البيانيان للدالتين f و g في معلم متعامد و متجانس الوحدة على المحورين $1cm$

1.أ- تحقق من أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب لـ (C_f) و (C_g) عند $+\infty$.

ب- عين وضعية (C_f) بالنسبة إلى Δ ثم وضعية (C_g) بالنسبة إلى Δ.

ج-ادرس تغيرات كل من f و g على $[1;+\infty[$.

د- شكل جدولي تغيرات كل من f و g .

هـ - أنشئ Δ ، (C_f) و (C_g).

2. أ-عين دالة أصلية للدالة $H:x\mapsto\frac{x+1}{x^3}$ على $[1;+\infty[$

ثم دالة أصلية للدالة $K:x\mapsto\frac{2x-1}{x^4}$ على $[1;+\infty[$

ب- احسب $\int_3^4\frac{x+1}{x^3}dx$ و $\int_3^4\frac{2x-1}{x^4}dx$.

ج- قارن بين مساحتي الحيزين المحددين بـ (C_f) و Δ من جهة و المنحني (C_g) و Δ من جهة أخرى على المجال $[3;4]$.

حل مقترح

f و g دالتان معرفتان على $[1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=x-\frac{2x-1}{x^4} \quad \text{و} \quad f(x)=x+\frac{x+1}{x^3}$$

1. أ – المستقيم المقارب:

لدينا:

$$\lim_{x\mapsto+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\mapsto+\infty}\left[x+\frac{x+1}{x^3}-x\right]$$

$$=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x+1}{x^3}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

و منه: المستقيم Δ الذي معادلته: $y=x$ مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

لدينا:

$$\lim_{x\mapsto+\infty}[g(x)-y]=\lim_{x\mapsto+\infty}\left[x-\frac{2x-1}{x^4}-x\right]$$

$$=\lim_{x\mapsto+\infty}\left[-\frac{2x-1}{x^4}\right]=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{-2x}{x^4}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{-2}{x^3}=0$$

و منه: المستقيم Δ الذي معادلته: $y=x$ مستقيم مقارب لـ (C_g) عند $+\infty$.

ب – الوضع النسبي:

* وضعية (C_f) بالنسبة إلى Δ:

لدينا: $f(x)-y=\frac{x+1}{x^3}$

من أجل كل x من $[1;+\infty[$ لدينا: $\frac{x+1}{x^3}>0$ وبالتالي: (C_f) فوق Δ.

* وضعية (C_g) بالنسبة إلى Δ:

لدينا: $g(x)-y=\left[-\frac{2x-1}{x^4}\right]$ و منه اشارة الفرق من اشارة البسط أي: $-2x+1$ اذن:

x	$1 \qquad\qquad +\infty$
$-2x+1$	$-$
الوضعية	(C_g) تحت Δ

ج–

* تغيرات الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[1;+\infty[$ حيث:

$$f(x)=x+\frac{x+1}{x^3}$$

$$f'(x)=1+\frac{x^3-(3x^2)(x+1)}{(x^3)^2}=1+\frac{x^3-3x^3-3x^2}{x^6}$$

$$=1+\frac{-2x^3-3x^2}{x^6}=1+\frac{-x^2(2x-3)}{x^6}$$

أي: $f'(x)=1+\frac{-2x+3}{x^4}=\frac{x^4-2x+3}{x^4}$.

و منه: $f'(x)=\frac{(x+1)(x^3-x^2+x-3)}{x^4}$.

اشارة $f'(x)$ من اشارة: x^3-x^2+x-3 .

* تغيرات الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $[1;+\infty[$ حيث:

$$g'(x)=1-\frac{2x^4-(4x^3)(2x-1)}{\left(x^4\right)^2}=1-\frac{2x^4-8x^4+4x^3}{\left(x^4\right)^2}$$

$$=1-\frac{-6x^4+4x^3}{x^8}=1-\frac{-6x+4}{x^5}$$

و بالتالي: . $g'(x)=\dfrac{x^5+6x-4}{x^5}$

لدينامن أجل كل x من $[1;+\infty[$: $g'(x)>0$ ومنه الدالة متزايدة تماماعلى $[1;+\infty[$.

د-

*جدول تغيرات g .

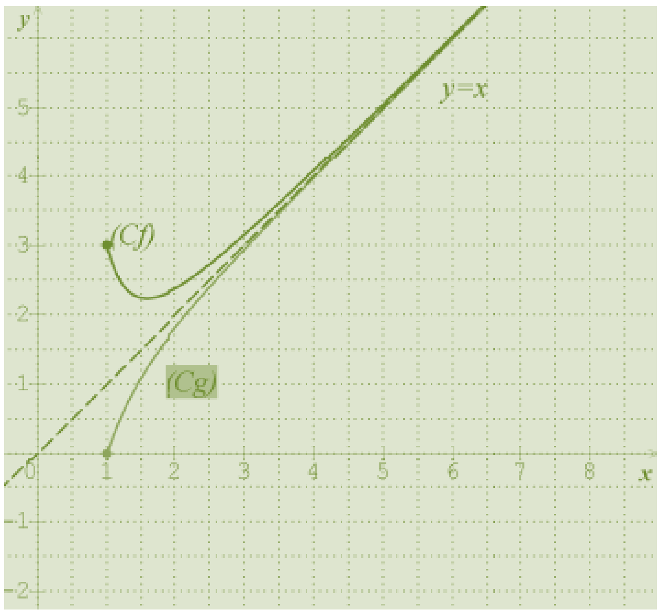
نحسب النهايات:

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x-\dfrac{2x-1}{x^4}=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{2x-1}{x^4}=0$

و $\lim\limits_{x\mapsto 1} g(x)=g(1)=0$.

x	1 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	0 ↗ $+\infty$

هـ - أنشئ Δ ، (C_f) و (C_g).



2. أ- الدوال الأصلية:

-تعين دالة أصلية للدالة $H:x\mapsto\dfrac{x+1}{x^3}$ على $[1;+\infty[$:

$$\int H(x)dx=\int\frac{x+1}{x^3}dx=\int\frac{x}{x^3}dx+\int\frac{1}{x^3}dx$$

$\int\dfrac{1}{x^2}dx+\int\dfrac{1}{x^3}dx=\dfrac{-1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+c_1$. حيث c_1 عدد حقيقي

تذكير:

$\int\dfrac{1}{x^n}dx=\dfrac{-1}{(n-1)(x^{n-1})}+c$، حيث n عدد طبيعي $n\geq 2$.

-تعين دالة أصلية للدالة $K:x\mapsto\dfrac{2x-1}{x^4}$ على $[1;+\infty[$:

$$\int k(x)dx=\int\frac{2x-1}{x^4}dx=\int\frac{2x}{x^4}dx-\int\frac{1}{x^4}dx$$

$$\int\frac{2}{x^3}dx-\int\frac{1}{x^4}dx=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^3}+c_2$$

حيث c_2 عدد حقيقي.

ب- حساب $\displaystyle\int_3^4\frac{x+1}{x^3}dx$

$$\int_3^4\frac{x+1}{x^3}=\left[\frac{-1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right]_3^4$$
$$=\left(\frac{-1}{4}-\frac{1}{32}\right)-\left(\frac{-1}{3}-\frac{1}{18}\right)=\frac{31}{288}ua$$

-حساب $\displaystyle\int_3^4\frac{2x-1}{x^4}dx$

$$\int_3^4\frac{2x-1}{x^4}=\left[-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^3}\right]_3^4$$
$$=\left(\frac{-1}{16}+\frac{1}{192}\right)-\left(\frac{-1}{9}+\frac{1}{81}\right)=\frac{645}{15552}ua$$

ج-المقارنة:

لتكن S_f مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و Δ على المجال $[3;4]$.

بما أن (C_f) يقع فوق Δ فان S_f تكتب من الشكل:

$$S_f=\int_3^4 f(x)-y dx=\int_3^4 \frac{x+1}{x^3}dx$$

من السؤال (ب) نجد أن: $S_f=\frac{31}{288}ua$.

لتكن S_g مساحة الحيز المحدد بـ $\left(C_g\right)$ و Δ على المجال $[3;4]$.

بما أن $\left(C_g\right)$ يقع تحت Δ فان S_g تكتب من الشكل:

$$S_g=\int_3^4 y-g(x)dx=\int_3^4 \frac{2x-1}{x^4}dx$$

من السؤال (ب) نجد أن: $S_g=\frac{645}{15552}ua$.

و منه: $S_f>S_g$.

د. تمارين محلولة

التمرين ❶

f الدالة المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}-\{3\}$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x^2-3x+2; x\in\left]-\infty;1\right] \\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-3}; x\in\left]1;3\right[\cup\left]3;+\infty\right[\end{cases}$$

(C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. ادرس نهاية الدالة f عند كل حد من حدود مجالات مجموعة تعريفها.

2. أ- ادرس استمرارية الدالة f عند العدد 1 .

ب- ادرس استمرارية الدالة f على المجال $\left]-\infty;3\right[$.

3. احسب كلا من $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\dfrac{f(x)}{x-1}$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\dfrac{f(x)}{x-1}$. ماذا تستنتج ؟

فسر النتيجة بيانيا .

4. اكتبْ معادلة للمستقيم (Δ) المماس للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

التمرين ❷

I نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$.

1. اتجاه تغير الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه، استنتج اشارة g .

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x)=2\sqrt{x^2+1}-x$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب نهاتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ،

2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

استنتج جدول تغيرات الدالة f .

3.احسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+3x]$ ثم فسر بيانيا هذه النتيجة.

4.بين أن المستقيم $(\Delta'):y=x$ مستقيما مقربا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

5.أدرس وضعية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=-3x$ و المستقيم (Δ').

6.أرسم (C_f) ، (Δ) و (Δ').

التمرين 3

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;2\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني

في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها ثم فسر النتائج هندسيتا.

2.بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;2\}$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{-2x(x+4)}{(x^2-x-2)^2}$

ب-استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3.أ-أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) المقارب الأفقي له.

ب-عين نقاط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات.

ج-أرسم المستقيمات المقاربة و المنحنى (C_f) .

د-ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة: $(3-m)x^2+(m-1)x+2(m-1)=0$.

4.أ-عين الأعداد الحقيقية c,b,a بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 و 2 لدينا: $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-2}$

ب-استنتج دالة أصلية للدالة على المجال $]2;+\infty[$.

5.لتكن $S(\lambda)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $y=3$ و $x=\lambda, x=3$ حيث λ عدد حقيقي ينتمى للمجال $]2;3[$.

أ-احسب المساحة $S(\lambda)$ بدلالة λ.

ب-احسب $\lim\limits_{\substack{\lambda\to2\\>}} S(\lambda)$.

6.لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{3x^2-|x|-2}{x^2-|x|-2}$

أ-بين أن الدالة دالة g زوجية.

ب-أدرس قابية الاشتقاق للدالة g عند $x_0=0$ و فسر النتيجة هندسيا.

7.أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة و باستعمال المنحنى (C_f) أنشئ المنحنى (C_g) الممثل للدالة g في نفس المعلم

التمرين 4

I.نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;\pi]$ كما يلي: $g(x)=x\cos x-\sin x$.

1.-أدرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها.

2.استنتج حسب قيم x اشارة $g(x)$ على المجال $[0;\pi]$.

II.لتكن الدالة f العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $[-\pi;\pi]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\dfrac{\sin x}{x};x\in[-\pi;0[\cup]0;\pi] \end{cases}$$

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1.أدرس شفعية الدالة f على $[-\pi;\pi]$.

2.أدرس تغيرات الدالة f على $[-\pi;\pi]$.

3.بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$ ، $0\le x-\sin x\le\dfrac{x^3}{6}$

ارشاد: يمكنك استعمال الدالة h المعرفة على بالعبارة: $h(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$ ، أحسب h',h'' و h''' (المشتقة الثالثة)

ثم استنتج اشارة $h(x)$.

4.بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 ثم احسب $f'(0)$.

5.أوجد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

6.أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المماس (T).

7.أرسم (C) و (T).

التمرين 5

لتكن f دالة معرفة كما يلي: $f_m(x)=\frac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}$ ، حيث m وسيط حقيقي غير معدوم.

1.عين مجموعة تعريف الدالة f .

2.أ-احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

ب- فسر النتائج هندسيا.

3.أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

4.بين أنه توجد نقطة و حيدة تنتمي الى كل المنحنيات (C_m).

5.عين المنحنى (C_m) الذي يشمل النقطة ذات الاحداثيات $(4;1)$.

التمرين 6

I. الدالة f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة ب: $f(x)=\frac{-x^2}{x+1}$ على المجال $]-\infty;-1[$.

1.أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty;-1[$.

2.عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل

كل x من D_f: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$

3.استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D_1) و (D_2) يطلب تعيينهما.

4.أثبت أن المعدلة $f(x)=5$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-4;-3]$،ماذا تستنتج بيانيا؟.

5.أنشئ (D_1) ، (D_2) و (C_f).

II.في معلم آخر متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

لتكن النقط $A(-1;2)$ ، $M(x;0)$ مع $x<-1$ و N نقطة تقاطع (AM) و (yy').

1.أوجد احداثيات N بدلالة x .

2.احسب مساحة المثلث OMN بدلالة x.

3.استنتج قيمة للعدد x حتى تكون مساحة OMN أصغر ما يمكن 4.احسب عندئذ هذه المساحة.

التمرين 7

f دالة عددية معرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

1.أدرس اتجاه تغير الدالة f .

2.احسب النهايات f .

3.ضع جدول التغيرات للدالة f .

4.أ-أثبت أن (C) منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل (d) معادلته: $y=x+\frac{1}{2}$ بجوار $+\infty$.

ب-أدرس وضعية (C) بالنسبة ل (d) .

5.أرسم (d) و (C).

التمرين 8

لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ:

$$f(x)=|x-2|+\frac{1}{x-1}$$

(c_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$..

1. أكتب عبارة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

2. أدرس استمرارية الدالة f عند القيمة $x_0=2$

3. أ- احسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ و $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ ماذا تستنتج؟ فسر النتيجة بيانيا.

ب) اكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و(Δ_2) لـ (c_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2

4. أدرس تغيرات الدالة f

5. أثبت أن المنحنى (c_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $\alpha\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$

6. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]$ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+(x-2)]$ ماذا تستنتج؟

7. أنشئ (Δ_1) و(Δ_2) والمستقيمات المقاربة والمنحنى (c_f)

8. أ- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $|x-2|+\frac{1-m(x-1)}{(x-1)}=0$

ب- استنتج مما سبق عدد حلول المعادلة ذات المجهول θ:

$|\cos\theta-2|+\frac{1-m(\cos\theta-1)}{(\cos\theta-1)}=0$، حيث $\theta\in]0,2\pi[$

التمرين 9

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$.

1. اتجاه تغير الدالة g.

2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه، استنتج اشارة g.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x)=2\sqrt{x^2+1}-x$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$..

1. احسب نهاتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$،

2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

استنتج جدول تغيرات الدالة f.

3. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+3x]$ ثم فسر بيانيا هذه النتيجة.

4. بين أن المستقيم $(\Delta'):y=x$ مستقيما مقربا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

5. أدرس وضعية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=-3x$ و المستقيم (Δ').

6. أرسم (C_f)، (Δ) و (Δ').

التمرين 10

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=1-(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$

1. ادرس نهايات الدالة g.

2. ادرس اتجاه تغير الدالة g، شكل جدول التغيرات.

3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $g(x)=0$.

4. استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $1-(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\leq 0$

II. لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-x+1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و (C) تمثيلها البياني.

1. اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

2. احسب النهايات ،ادرس اتجاه التغير و شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)+f(-x)=2$ ماذا تستنتج ؟

4. اكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5. بين أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $1<\beta<2$.

6. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x-2]$ ماذا تستنتج ؟

احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]$ ماذا تستنتج ؟

7. انشئ (C).

8. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x: $(-x+1)\sqrt{x^2+1}=m\sqrt{x^2+1}-x$

حلول مقترحة

حل التمرين 1:

1. النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2 - 3x + 2)$$

أي: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2)$

أي: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

* $\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\<}} (x^2 - 3x + 2)$. أي: $\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = 0$.

* $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\>}} (\frac{x^2-1}{x-3})$ أي: $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = 0$.

* $\lim_{\substack{x\to3\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to3\\<}} (\frac{x^2-1}{x-3})$

- لما $x \overset{<}{\to} 3$ فإن: $\begin{cases} (x^2-1) \to 8 \\ (x-3) \to 0^- \end{cases}$ إذن: $\lim_{\substack{x\to3\\<}} f(x) = -\infty$.

* $\lim_{\substack{x\to3\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to3\\>}} (\frac{x^2-1}{x-3})$

- لما $x \overset{>}{\to} 3$ فإن: $\begin{cases} (x^2-1) \to 8 \\ (x-3) \to 0^+ \end{cases}$ إذن: $\lim_{\substack{x\to3\\>}} f(x) = +\infty$.

* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\frac{x^2-1}{x-3})$ أي: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\frac{x^2}{x})$ أي: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x)$

و منه: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. أ- دراسة استمرارية الدالة f عند العدد 1.

العدد 1غيرمعزول من D_f يعني: $1 \in D_f$.

- لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=0$

إذن: $\lim\limits_{x\to1} f(x)=0$ أي: $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$ ومنه الدالة f مستمرة عند 1.

ب- دراسة استمرارية الدالة f على المجال $]-\infty;3[$.

الدالة f مستمرة على المجال $]-\infty;1[$ لأنها كذلك على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير الحدود..(1)

- الدالة f مستمرة على المجال $]1;3[$ لأنه مجال من مجموعة تعريفها وهي دالة ناطقة ...(2)

- الدالة f مستمرة عند 1 ...(3) من (1) ، (2) و (3) نستنتج أن الدالة f مستمرة على المجال $]-\infty;3[$.

3. إذا كان $x\in]-\infty;1[$ فإن $\dfrac{f(x)}{x-1}=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

لما $x\overset{<}{\to}1$ فإن: $\begin{cases}(x^2-3x+2)\to0\\(x-1)\to0\end{cases}$ إذن: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\dfrac{f(x)}{x-1}$ حالة عدم التعيين .

نقوم بإزالة حالة عدم التعيين:

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$ أي: $$\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\<}}(x-2)$$

أي: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\dfrac{f(x)}{x-1}=-1$.

- إذا كان $x\in]1;3[\cup]3;+\infty[$ فإن $\dfrac{f(x)}{x-1}=\dfrac{x^2-1}{(x-3)(x-1)}$

لما $x\overset{>}{\to}1$ فإن: $\begin{cases}(x^2-1)\to0\\(x-3)(x-1)\to0\end{cases}$

إذن: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\dfrac{f(x)}{x-1}$ حالة عدم التعيين

<u>إزالة حالة عدم التعيين:</u>

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x-1)}$$

أي: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x+1}{x-3}$ أي: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)}{x-1} = -1$.

* مما سبق نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 1 من اليمين ومن اليسار و عددها المشتق عند 1 من اليمين و من اليسار هو (-1) .

إذن: الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1) = -1$.

* المنحنى (C) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا معامل توجيهه (-1) .

4. المماس (Δ) معرف بالمعادلة: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

أي: $y = -x+1$.

حل التمرين 2:

I). الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = 2x - \sqrt{x^2+1}$.

1. اتجاه تغير الدالة g .

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$g'(x) = 2 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و منه: $g'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}}$.

و بالتالي: اشارة $g'(x)$ من اشارة: $2\sqrt{x^2+1} - x$.لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) > 0$. و بالتالي: g دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2. بين أن المعدلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه، استنتج اشارة g .

$g(x) = 0$ يعني: $2x - \sqrt{x^2+1} = 0$ أي: $2x = \sqrt{x^2+1} \ldots(1)$.

من أجل: $x < 0$ المعادلة (1) مستحيلة.

من أجل: $x > 0$ $4x^2 = x^2+1$ أي: $4x^2 - x^2 - 1 = 0$ و منه : $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ أو $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (حل مرفوض).

لدينا g مستمرة و رتيبة على $\mathbb{R}$ و بالتالي: المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

اشارة g:

x	$-\infty$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

II). نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = 2\sqrt{x^2+1} - x$.

1. حساب نهاتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty} 2\sqrt{x^2+1}-x=+\infty$$.

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty} 2\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\mapsto+\infty} |x|\left(2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)$$
$$=\lim_{x\mapsto+\infty} x=+\infty$$

2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f(x)=2\sqrt{x^2+1}-x$$
$$f'(x)=\frac{2(2x)}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-1$$
$$=\frac{2x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

و بالتالي: $f'(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

هذا يعني أن اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ لأن $\sqrt{x^2+1}>0$ أي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

حيث: $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}$

3. حساب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+3x\right]$:

لدينا:

$$\lim_{x\mapsto-\infty}[f(x)+3x]=\lim_{x\mapsto-\infty}\left[2\sqrt{x^2+1}-x+3x\right]$$

$$=\lim_{x\mapsto-\infty}\left[2\sqrt{x^2+1}+2x\right]=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{\left[2\sqrt{x^2+1}+2x\right]\times\left[2\sqrt{x^2+1}-2x\right]}{\left[2\sqrt{x^2+1}-2x\right]}$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{\left[4(x^2+1)-4x^2\right]}{\left[2\sqrt{x^2+1}-2x\right]}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{4}{\left[2\sqrt{x^2+1}-2x\right]}$$

$$=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2}{\left[\sqrt{x^2+1}-2x\right]}=0$$

لدينا: $\lim_{x\mapsto-\infty}[f(x)+3x]=0$

التفسير البياني:

المستقيم ذو المعادلة: $y=-3x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$.

4. بين أن المستقيم $(\Delta'):y=x$ مستقيما مقربا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$\lim_{x\mapsto+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\mapsto+\infty}\left[2\sqrt{x^2+1}-x-x\right]$$

$$=\lim_{x\mapsto+\infty}\left[2\sqrt{x^2+1}-2x\right]=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\left[2\sqrt{x^2+1}-2x\right]\times\left[2\sqrt{x^2+1}+2x\right]}{\left[2\sqrt{x^2+1}+2x\right]}$$

$$=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\left[4(x^2+1)-4x^2\right]}{\left[2\sqrt{x^2+1}+2x\right]}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{4}{\left[2\sqrt{x^2+1}+2x\right]}$$

$$=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2}{\left[\sqrt{x^2+1}+2x\right]}=0$$

لدينا: $\lim_{x\mapsto-\infty}[f(x)-x]=0$

و بالتالي: المستقيم $(\Delta'):y=x$ مستقيم مقرب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

x	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

.

5. الوضع النسبي:

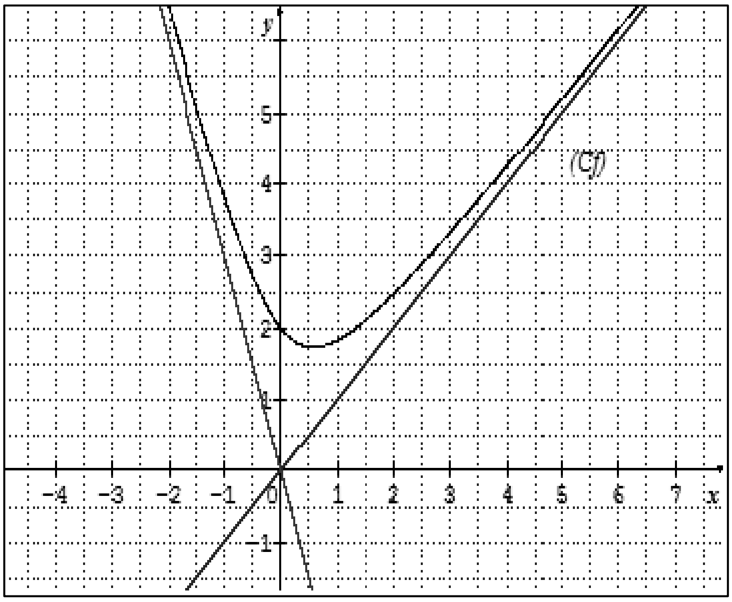
دراسة وضعية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=-3x$:

لدينا: $f(x)+3x=2\sqrt{x^2+1}+2x>0$ و بالتالي: (C_f) فوق (Δ).

دراسة وضعية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ') ذو المعادلة: $(\Delta'):y=x$:

$f(x)-x=2\sqrt{x^2+1}-2x>0$ و بالتالي: (C_f) فوق (Δ') .

6. رسم (C_f) ، (Δ) و (Δ').



حل التمرين 3:

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;2\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}$

1.حساب نهايات الدالة f :

لحساب النهاية عند -1 و 2 ندرس اشارة المقام أي: x^2-x-2

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 2 $\quad$ $+\infty$
x^2-x-2	+ 0 - 0 +

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\frac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}2}\frac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}2}\frac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لمحور التراتيب معادلتيهما $x=-1$ و $x=2$ و يقبل كذلك مستقيم (Δ) مقارب موازي لمحور الفواصل معادلته $y=3$.

2.بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;2\}$ الدالة قابلة للاشتقاق لدينا:

$$f'(x)=\frac{(6x-1)(x^2-x-2)-(2x-1)(3x^2-x-2)}{(x-x-2)^2}$$

و منه:

$$=\frac{-2x^2-8x}{(x^2-x-2)^2}=\frac{-2x(x+4)}{(x^2-x-2)^2}$$

ب-اتجاه تغير الدالة f : اشارة $f'(x)$ تتعلق باشارة $-2x(x+4)$:

و بالتالي: $-2x(x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases}$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$-2x(x+4)$		-	0	+	0	-	

جدول تغيراتها.

x	$-\infty$		-4		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	||	+	0	-	||	-	
$f(x)$	3	↘	$\frac{25}{9}$	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	1	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	3

3.أ-دارسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ):

ندرس اشارة الفرق: $f(x)-y$ أي:

$f(x)-y=\dfrac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}-3=\dfrac{2x+4}{x^2-x-2}$ و بالتالي اشارة الفرق نلخصها في الجدول :

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$x+4$		-	0	+	||	+	||	+	
x^2-x-2		+		+	||	-	||	+	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	||	(C_f) تحت (Δ)	||	(C_f) فوق (Δ)	

(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-2;3)$.

ب- نقاط تقاطع $\left(C_f\right)$ مع محوري الاحداثيات:

مع محور الفواصل: نقوم بحل المعادلة $f(x)=0$:

أي: $$\frac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-x-2=0 \\ x^2-x-2\neq 0 \end{cases}$$

$$3x^2-x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\dfrac{-2}{3} \end{cases}$$

$$\left(C_f\right)\cap\left(x'x\right)=\left\{\left(\frac{-2}{3};0\right),(1;0)\right\}$$

مع محور التراتيب: لدينا: $f(0)=1$ و منه: $\left(C_f\right)\cap\left(y'y\right)=\{(0;1)\}$

ج-رسم المستقيمات المقاربة و المنحنى $\left(C_f\right)$.

د-المناقشة:

لدينا: $$\begin{aligned}&(3-m)x^2+(m-1)x+2(m-1)=0\\&\Rightarrow f(x)=m\end{aligned}$$.

حلول هذه المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $\left(C_f\right)$ مع المستقيم ذا المعادلة $y=m$

اذا كان $m<-1$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة .

اذا كان $m=1$ و $m=\dfrac{25}{9}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

اذا كان $1<m<\dfrac{25}{9}$ المعادلة لا تقبل حلول.

اذا كان $3<m<\frac{25}{9}$ المعادلة تقبل حلين سالبين.

اذا كان $m=3$ المعادلة تقبل حلا وحيدا.

اذا كان $m>3$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة .

4.أ-تعين الأعداد الحقيقية c,b,a:

لدينا:

$$f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}=\frac{a(x+1)(x-2)+b(x-2)+c(x+1)}{x^2-x-2}$$

و بالمطابقة نجد:
$$=\frac{ax+(b-a+c)x-2a-2b+c}{x^2-x-2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b-a+c=-1\\ -2a-2b+c=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=\frac{2}{3}\\ c=\frac{4}{3}\end{cases}$$

اذن: $f(x)=3+\frac{2}{3(x+1)}+\frac{4}{3(x-2)}$

ب-استنتاج دالة أصلية للدالة على المجال $]2;+\infty[$.

F دالة أصلية للدالة حيث: $F(x)=3x+\frac{2}{3}\ln(x+1)+\frac{4}{3}\ln(x-2)+c;c\in\mathbb{R}$

5.أ-حساب المساحة $S(\lambda)$ بدلالة λ:

لدينا من أجل كل x من $]2;+\infty[$ (C_f) فوق (Δ) و بالتالي:

$$S(\lambda)=\int_\lambda^3 f(x)-3dx=\left[3x+\frac{2}{3}\ln(x+1)+\frac{4}{3}\ln(x-2)-3x\right]_\lambda^3$$
$$==\left[\frac{2}{3}\ln(x+1)+\frac{4}{3}\ln(x-2)\right]_\lambda^3=\frac{\ln 144}{3}-\frac{\ln\left[(\lambda+1)\ln(\lambda-2)^2\right]^2}{3}$$

ب-احسب $\lim\limits_{\lambda\xrightarrow{>}2}S(\lambda)$.

$$\lim_{\lambda\xrightarrow{>}2}S(\lambda)=\lim_{\lambda\xrightarrow{>}2}\frac{\ln 144}{3}-\frac{\ln\left[(\lambda+1)\ln(\lambda-2)^2\right]^2}{3}=+\infty$$

6.لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ كما يلي: $g(x)=\frac{3x^2-|x|-2}{x^2-|x|-2}$

أ-اثبات أن الدالة دالة g زوجية.

لدينا من اجل كل: $x \in D_g$ و $-x \in D_g$ فان:

$$g(-x)=\frac{3(-x)^2-|-x|-2}{(-x)^2-|-x|-2}=\frac{3x^2-|x|-2}{x^2-|x|-2}$$
$$=g(x)$$

و منه g دالة زوجية.

ب-دراسة قابية الاشتقاق للدالة g عند $x_0=0$:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}-1}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{2x^2}{x\left(x^2-x-2\right)}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{2x}{\left(x^2-x-2\right)}=0$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\frac{3x^2+x-2}{x^2+x-2}-1}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{2x^2}{x\left(x^2+x-2\right)}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{2x}{\left(x^2+x-2\right)}=0$$

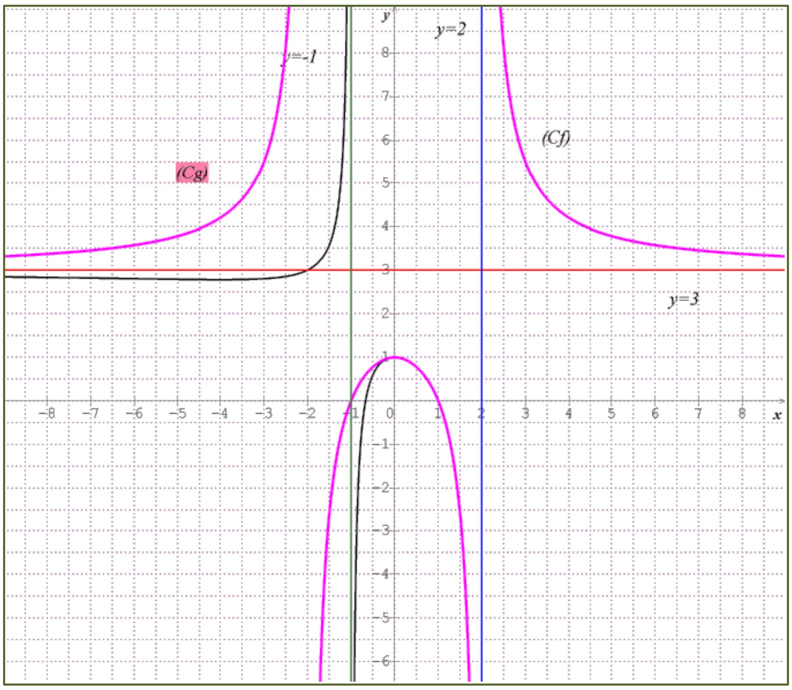
و منه لدينا: $\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$ اذن الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0.

التفسير: المنحنى يقبل مماس عند النقطة $\omega(0;1)$ موازي لمحور الفواصل.

7.كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$g(x)=\frac{3x^2-|x|-2}{x^2-|x|-2}=\begin{cases}\frac{3x^2-x-2}{x^2-x-2};x\in]0;2[\cup]2;+\infty[\\ \frac{3x^2+x-2}{x^2+x-2};x\in]-\infty;-2[\cup]-2;0[\end{cases}$$

و باستعمال المنحنى $\left(C_f\right)$ أنشئ المنحنى $\left(C_g\right)$ الممثل للدالة g في نفس المعلم السابق.



حل التمرين 4:

I. الدالة g المعرفة على $[0;\pi]$ كما يلي: $g(x)=x\cos x-\sin x$.

1.-أدرس اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $[0;\pi]$ ،

$$g'(x)=(x\cos x-\sin x)'$$
$$=\cos x-x\sin x-\cos x$$
$$g'(x)=-x\sin x$$

من أجل $x\in[0;\pi]$ لدينا: $\sin x>0$ و بالتالي: $g'(x)<0$ و $g(\pi)=-\pi$ ، $g(0)=0$

و عليه الدالة g متناقصة تماما على $[0;\pi]$

جدول التغيرات:

x	0	π
$g'(x)$	-	
$g(x)$	0 ↘	$-\pi$

2اشارة $g(x)$ على المجال $[0;\pi]$:

لدينا الدالة g متناقصة تماما على $[0;\pi]$ $g(0)=0, g(\pi)=-\pi$

و من جدول التغيرات $g(x)<g(0)$ أي $g(x)<0$ من أجل كل $x\in[0;\pi]$.

II. الدالة f معرفة على $[-\pi;\pi]$ كما يلي: $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\dfrac{\sin x}{x} ; x\in[-\pi;0[\cup]0;\pi] \end{cases}$

1. شفعية الدالة f على $[-\pi;\pi]$.

من أجل كل x ، $-x$ من $[-\pi;\pi]$ لدينا:

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{(-x)}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}$$
$$=f(x)$$

2.دراسة تغيرات الدالة f على $[-\pi;\pi]$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[-\pi;\pi]$

$$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'$$
$$=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$
$$=\frac{g(x)}{x^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من $[-\pi;\pi]$ $x^2>0$ و بالتالي: اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$.

أي: $f'(x)<0$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;\pi]$.

3.بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$ ، $0\le x-\sin x\le\dfrac{x^3}{6}$

لذينا الدالة h قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ ، $h'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$.

لذينا الدالة h' قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ ، $h''(x)=-\sin x+x$

لذينا الدالة h'' قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ ، $h'''(x)=-\cos x+1$.

من اجل $x\neq 2k\pi,(k\in\mathbb{Z})$ ، لدينا $\cos x<1$ و بالتالي: $-\cos x+1>0$ يعني: $h'''(x)>0$

فبالتالي: h'' دالة متزايدة على المجال $[0;+\infty[$

بما أن $h''(0)=0$ فان من أجل كل x من $[0;+\infty[$ $h''(x)\ge 0$ فبالتالي: h' دالة متزايدة على $[0;+\infty[$.

و لدينا من جهة أخرى: $h'(0)=0$ و من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $h'(x)\geq 0$ فبالتالي: h دالة متزايدة على $[0;+\infty[$.

اذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $h(x)\geq 0$ أي: $\sin x - x + \frac{x^3}{6}\geq 0$ و عليه: $x-\sin x\leq \frac{x^3}{6}$ ....(1)

و نعلم أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ $h''(x)\geq 0$ أي $0\leq x-\sin x$ .....(2).

من (1) و (2) نجد: $0\leq x-\sin x\leq \frac{x^3}{6}$.

4.اثبات أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0:

علينا حساب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ و لكن

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\frac{\sin x - x}{x^2}$$

و من السؤال السابق لدينا: $0\leq x-\sin x\leq \frac{x^3}{6}$ أي: $-\frac{x^3}{6}\leq \sin x - x\leq 0$.

بالقسمة على $\left(x^2\right)$ نتحصل على

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{6}\right)\leq \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x^2}\right)\leq 0$$
$$0\leq \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)\leq 0$$
.

بما أن $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{x}{6}\right)=0$ و بتطبيق خاصية "حصر النهايات" نجد: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

و بالتالي: الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0: و منه $f'(0)=0$.

5. معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$(T): y=1$$

6.دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) و المماس (T).

ندرس اشارة الفرق: $f(x)-y$ نجد:

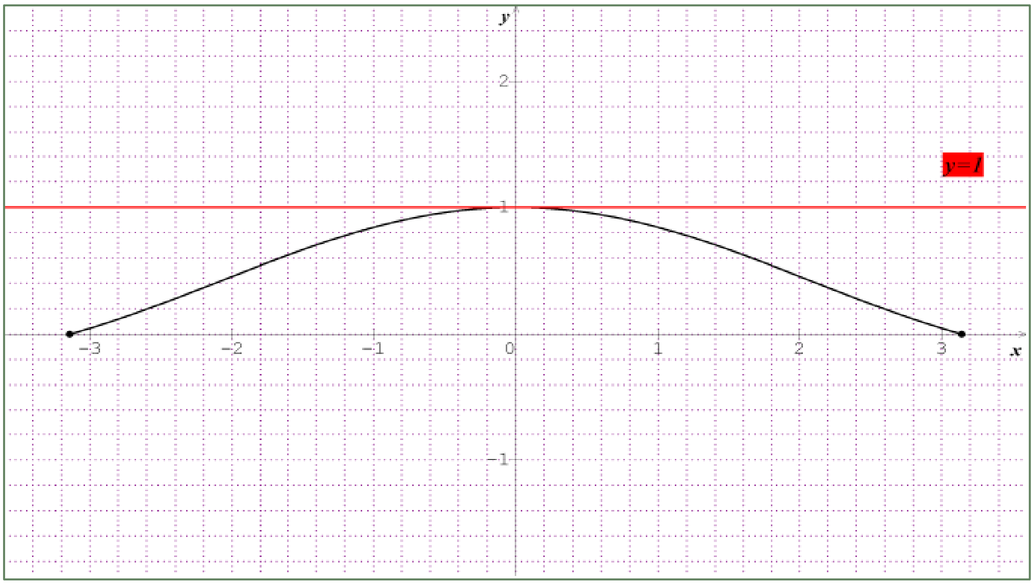
$$f(x)-y=\frac{\sin x}{x}-1$$
$$=\frac{\sin x - x}{x}$$

لدينا: $h''(x)=x-\sin x$ و نعلم أن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ $h''(x)>0$.

و منه $-h''(x)=\sin x - x<0$ أي: $f(x)-y<0$ و عليه المنحنى (C) يقع تحت المماس (T).

و بما أن الدالة f دالة زوجية فان منحناها البياني متناظر مع محور التراتيب فبالتالي المنحنى (C) يقع تحت المماس (T).من اجل $x<0$

7.رسم (C) و (T):



حل التمرين 5:

f دالة معرفة كما يلي: $f_m(x)=\dfrac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}$

1.تعين مجموعة f :

الدالة f معرفة من أجل: $x^2-mx-3\neq 0$ لدينا:

$$\Delta=m^2+12>0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{m-\sqrt{m^2+12}}{2}\\ x_2=\dfrac{m+\sqrt{m^2+12}}{2}\end{cases}$$

و عليه: $x_1-x_2=-\sqrt{m^2+12}<0\Rightarrow x_1<x_2$

و بالتالي: $D_f=]-\infty;x_1[\cup]x_1;x_2[\cup]x_2+\infty[$ حيث: $\begin{cases}x_1=\dfrac{m-\sqrt{m^2+12}}{2}\\ x_2=\dfrac{m+\sqrt{m^2+12}}{2}\end{cases}$

2.أ-حساب نهايات الدالة f :

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{\substack{x\to x_1\\<}} f_m(x)=\lim_{\substack{x\to x_1\\<}}\frac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}=-\infty$$

نقوم بدراسة اشارة المقام أي: x^2-mx-3

$$\lim_{\substack{x\to x_1\\>}} f_m(x)=\lim_{\substack{x\to x_1\\>}}\frac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to x_2\\<}} f_m(x)=\lim_{\substack{x\to x_2\\<}}\frac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to x_2\\>}} f_m(x)=\lim_{\substack{x\to x_2\\>}}\frac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_m(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
x^2-mx-3		+	**0**	-	**0**	+	

ب-التفسير:

المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{m-\sqrt{m^2+12}}{2}$ مقارب للمنحنى (C_m)

المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{m+\sqrt{m^2+12}}{2}$ مقارب للمنحنى (C_m).

المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب للمنحنى (C_m) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

3.دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f حيث:

$$f'_m(x)=\frac{(2x-m)\left(x^2-mx-3\right)-(2x-m)\left(x^2-mx-15\right)}{\left(x^2-mx-3\right)^2}$$
$$=\frac{(2x-m)\left[x^2-mx-3-x^2+mx+15\right]}{\left(x^2-mx-3\right)^2}$$
$$=\frac{12(2x-m)}{\left(x^2-mx-3\right)^2}$$

اذن اشارة $f'_m(x)$ من اشارة $2x-m$:

x	$-\infty$	x_1	$\frac{m}{2}$	x_2	$+\infty$
$2x-m$	-		**0**	+	

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		x_1		$\frac{m}{2}$		x_2		$+\infty$
$f'_m(x)$		-	‖	-	**0**	+	‖	+	
$f_m(x)$	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$f_m\left(\frac{m}{2}\right)$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

4.تعين نقطة التي تنتمي الى كل المنحنيات (C_m)

$A(a;b)\in(C_m)$ معناه تحقق : $\frac{a^2-ma-15}{a^2-ma-3}=b$ من أجل كل عدد حقيقي m.

و بالتالي: من أجل كل عدد حقيقي m.

$$a^2-ma-15=b\left(a^2-ma-3\right)$$
$$\Leftrightarrow a^2-ba^2-15+3b+m\left(ab-a\right)=0\Rightarrow\begin{cases}a^2-ba^2-15+3b=0.....(1)\\ \left(ab-a\right)=0...................(2)\end{cases}$$

المعادلة (2) تكافئ: $a(b-1)=0\Rightarrow(a=0;b=1)$

من أجل $a=0$ المعادلة (1) تكافئ $-15+3b=0$ أي $b=5$

من أجل $b=1$ المعادلة (1) تكافئ $-15+3=0$ (مستحيل)

اذن من أجل كل عدد حقيقي m، النقطة $A(0;5)$ تنتمي الى كل المنحنيات (C_m).

❑**طريقة أخرى**: لدينا : $\begin{cases}A(a;b)\in(C_m)\\ A(a;b)\in(C_{m-1})\end{cases}$ معناه نقوم بحل المعادلة :

$$f_m(x)=f_{m-1}(x)$$
$$\Rightarrow\frac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}=\frac{x^2-(m-1)x-15}{x^2-(m-1)x-3}$$

5.تعين المنحنى الذي يشمل النقطة ذات الاحداثيات $(4;1)$.

$(4;1)\in(C_m)$ معناه:

$$f_m(4)=1\Rightarrow\frac{16-4m-15}{16-4m-3}=1$$
$$16-4m-15=16-4m-3 \quad \text{(مستحيل)}$$
$$-15=-3$$

و منه النقطة ذات الاحداثيات $(4;1)$ لا تنتمي الى أي من المنحنيات (C_m).

حل التمرين 6:

I). الدالة f معرفة ب: $f(x)=\frac{-x^2}{x+1}$ على المجال $]-\infty;-1[$.

1. دراسة تغيرات الدالة f

*النهايات:

$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{-x^2}{x+1}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\mapsto-\infty}-x=+\infty$.

$\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\frac{-x^2}{x+1\mapsto 0^-}=+\infty$.

*المشتقة: f دالة قابلة للاشتقاق على $]-\infty;-1[$ لدينا:

$f'(x)=\frac{(-2x)(x+1)+x^2}{(x+1)^2}=\frac{-x^2-2x}{(x+1)^2}$. اشارة $f'(x)$ من اشارة $-x^2-2x$ و بالتالي:

$-x^2-2x=0$ يعني: $x=-2$ أو ($x=0$ حل مرفوض).

x	$-\infty$		-2		-1
$f'(x)$		--	0	+	||

*جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-2		-1
$f'(x)$		--	0	+	||
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$ ||

2. تعين الأعداد الحقيقية a، b وc:

طريقة1: توحيد المقامات:من أجل كل x من D_f: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$

أي:
$$f(x)=\frac{ax(x+1)+(x+1)+c}{x+1}$$
$$=\frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a=-1 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases}$ و منه: $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=-1 \end{cases}$.

و بالتالي:

$\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=-1 \end{cases}$ اذن $f(x)=-x+1-\dfrac{1}{x+1}$.

3. المستقيمات المقاربة:

بما أن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} \dfrac{-x^2}{x+1}=+\infty$ فان : (D_1) مستقيم مقارب بجوار $-\infty$ معادلته: $x=-1$.

لدينا: $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[f(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{-1}{x+1}=0$.

اذن (D_2) مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته: $y=-x+1$.

4. أثبت أن المعادلة $f(x)=5$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-4;-3]$.

f مستمرة و رتيبة تماما على $[-4;-3]$.

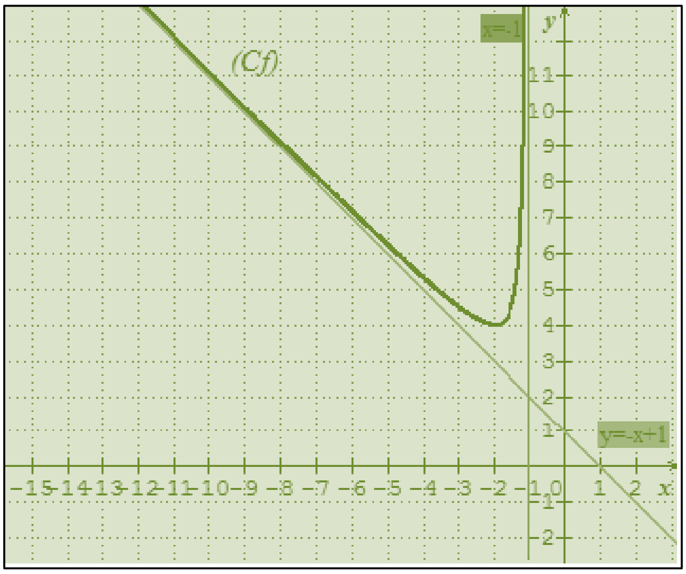
لدينا: $f(-4)=5,33$ و $f(-3)=4,5$ $f(-3)<5<f(-4)$.

اذن يوجد عنصر α على المجال $[-4;-3]$ حيث $f(\alpha)=5$.

نستنتج أن يقطع المستقيم الذي معادلته: $y=5$ في النقطة ذات الفاصلة : $x=\alpha$.

أي: $(C_f)\cap(\Delta)=\begin{cases} C(\alpha;5) \\ (\Delta): y=5 \end{cases}$.

5. انشاء (D_1) ، (D_2) و (C_f)



.(II

لدينا النقط $A(-1;2)$ ، $M(x;0)$ مع $x<-1$ و N نقطة تقاطع (AM) و (yy').

1. ايجاد احداثيات النقطة N بدلالة x :

$N\in(yy')$ اذن $N(0;y_N)$.

النقط M ، A و N على استقامة واحدة اذن $\overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AN}$.

تذكير: ليكن $\vec{v},\vec{u}$ شعاعان من المستوي حيث:

$\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. $\vec{u}//\vec{v}$ تكافئ $\vec{u}=k\vec{v}$ حيث k عدد حقيقي.أي: $\begin{cases}x'=kx\\y'=ky\end{cases}$ معناه: $\begin{cases}\dfrac{x'}{x}=k\\\dfrac{y'}{y}=k\end{cases}$.و بالتالي: $\dfrac{x'}{x}=\dfrac{y'}{y}$

معناه $x'y-xy'=0$

لدينا: $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\-2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}1\\y_N-2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AN}$ تكافئ $y_N-2=\dfrac{-2}{x+1}$ و منه: $y_N=\dfrac{-2}{x+1}+2$ اذن $y_N=\dfrac{2x}{x+1}$ و بالتالي: $N\left(0;\dfrac{2x}{x+1}\right)$.

2. حساب مساحة المثلث OMN بدلالة x.

$S_{OMN}=\dfrac{OM\times ON}{2}$ حيث $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix}0\\\dfrac{2x}{x+1}\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$

نحسب الأطوال OM,ON بدلالة x .

و هذا يعني: $ON=\sqrt{0^2+\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^2}=\left|\dfrac{2x}{x+1}\right|$

بما أن $x<-1$ فان: $2x<0$ و $x+1<0$ اذن $\dfrac{2x}{x+1}>0$

و منه: $ON=\dfrac{2x}{x+1}$.

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ و بالتالي: $OM=\sqrt{x^2+0^2}=\sqrt{x^2}=|x|$

بما أن $x<-1$ فان: $OM=-x$

و منه: $\frac{-x^2}{x+1} = \frac{-x\left(\frac{2x}{x+1}\right)}{2} = \frac{OM \times ON}{2} = S_{OMN}$.

3. استنتاج قيمة x حتى تكون مساحة OMN أصغر ما يمكن .

نلاحظ أن تكون مساحة OMN هي الدالة f و بالتالي قيمة x حتى تكون مساحة OMN أصغر ما يمكن هي القيمة الحدية الصغرى للدالة f و تساوي 4 من أجل $x=-2$ (حسب جدول تغيرات الدالة f).

4. حساب المساحة S_{OMN}

من أجل $x=-2$ نجد : $S_{OMN}=4$

حل التمرين 7:

f معرفة على $]1;+\infty[$ ب: $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

1. دراسة اتجاه تغير الدالة f : f دالة قابلة للاشتقاق على المجال حيث:

$$f'(x)=\frac{\frac{3x^2(x-1)-(x^3)}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}=\frac{3x^3-3x^2-x^3}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}$$

$$=\frac{2x^3-3x^2}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}=\frac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}$$

و بالتالي اشارة $f'(x)$ من اشارة: $2x-3$ أي:

x	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	--	0	+	

الدالة f متناقصة تماما على $\left]1;\frac{3}{2}\right]$. و متزايدة تماما على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

2. النهايات :

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ اذن : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}=+\infty$.

$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} 1}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}=+\infty$.

3. جدول التغيرات:

x	1 $\qquad \frac{3}{2}$ $\qquad +\infty$
$f'(x)$	-- $\quad 0 \quad$ +
$f(x)$	$+\infty \searrow f\left(\frac{3}{2}\right) \nearrow +\infty$

4. أ- المستقيم المقارب المائل:

لدينا: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$

تظهر حالة عدم التعين من الشكل: $+\infty-\infty$ و بالتالي:

$$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{\left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\times\left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]}{\left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]}$$

$$=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{\frac{x^3}{x-1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]}$$

و منه: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{\frac{\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}}{x-1}}{\left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]}$

لدينا: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}}{x-1}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}$.

و $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=+\infty$.

و منه: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=0$

هذا يعني أن (C) منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل (d) معادلته: $y=x+\frac{1}{2}$ بجوار $+\infty$.

ب-دراسة وضعية (C) بالنسبة ل (d):

لدينا: $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\dfrac{\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}}{x-1}}{\left[\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right]}$

من أجل كل x من $]1;+\infty[$ لدينا: $\dfrac{\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}}{x-1}>0$ و $\left[\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right]>0$ و بالتالي: $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$

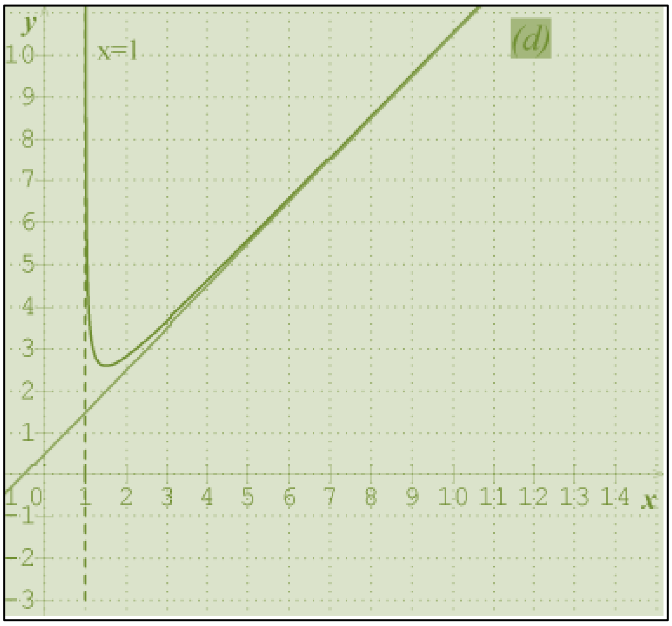
هذا يعني أن المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (d).

5. رسم (d) و (C).

بما أن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=+\infty$ فان: $x=1$ هي معادلة مستقيم مقارب بجوار $+\infty$.(غير مطلوب)

لرسم المستقيم (d) علينا أخد قيم مساعدة :

x	1	2
y	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$



حل التمرين 8:

لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=|x-2|+\dfrac{1}{x-1}$

1. كتابة عبارة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$f(x)=\begin{cases} x-2+\dfrac{1}{x-1} & ;x\in[2;+\infty[\\ -x+2+\dfrac{1}{x-1} & ;x\in]-\infty;1[\cup]1;2] \end{cases}$$

2. دراسة استمرارية الدالة f عند القيمة $x_0=2$: لدينا $f(2)=1$ ، $\lim_{x \succ 2} f(x)=\lim_{x \succ 2}\left(x-2+\frac{1}{x-1}\right)=1$

$\lim_{x \succ 2} f(x)=\lim_{x \succ 2}\left(-x+2+\frac{1}{x-1}\right)=1$ بما ان: $\lim_{x \succ 2} f(x)=\lim_{x \prec 2} f(x)=f(2)=1$

فإن الدالة f مستمرة عند القيمة $x_0=2$.

3. أ- حساب $\lim_{h \to 0^<}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ و $\lim_{h \to 0^>}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$$\lim_{h \to 0^<}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h \to 0^<}\frac{-h+\frac{1}{h+1}-1}{h}=\lim_{h \to 0^<}\frac{-h(h+2)}{h(h+1)}=-2$$

$$\lim_{h \succ 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h \succ 0}\frac{h+\frac{1}{h+1}-1}{h}=\lim_{h \succ 0}\frac{h^2}{h(h+1)}=0$$

بما أن: $\lim_{h \to 0^>}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\neq\lim_{h \to 0^<}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ فإن الدالة f غير قابلة للإشتقاق في 2.

التفسير البياني:

المنحنى (c_f) يقبل نصف مماس في 2 على اليمين معامل توجيهه معدوم ، ويقبل نصف مماس في 2 على اليسار معامل توجيهه 2 .

ومنه $A(2;1)$ نقطة زاوية .

ب- كتابة معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) للمنحنى (c_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2: ومنه: $(\Delta_1): y=1$

$x \le 2$ ، $(\Delta_2): y=f'(2)(x-2)+f(2)$ ومنه: $(\Delta_2): y=-2x+5$

4. دراسة تغيرات الدالة f : النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+2+\frac{1}{x-1}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-2+\frac{1}{x-1}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x \succ 1} f(x)=\lim_{x \succ 1}\left(|x-2|+\frac{1}{x-1}\nearrow^{+\infty}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x \prec 1} f(x)=\lim_{x \prec 1}\left(|x-2|+\frac{1}{x-1}\nearrow^{-\infty}\right)=-\infty$$

*اتجاه التغير:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $]2;+\infty[$ ، $]-\infty;1[\cup]1;2[$ دالتها المشتقة f':

$$f'(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2} & ;x\in]2;+\infty[\\ -1-\frac{1}{(x-1)^2}=-\left(1+\frac{1}{(x-1)^2}\right) & ;x\in]-\infty;1[\cup]1;2[\end{cases}$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	ǁ	-- -2 0	+

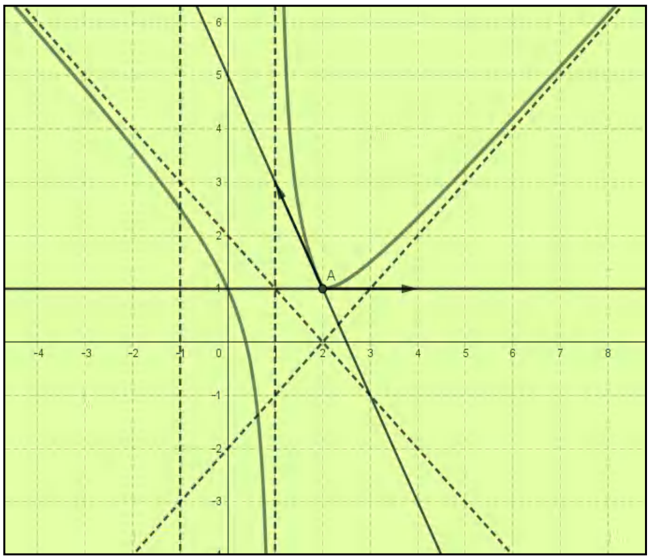
*جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	--	0	‖	-- -2 0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘		‖ $+\infty$ ↘	1 ↗	$+\infty$
		1	$-\infty$ ‖		

.5 إثبات أن المنحنى (c_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $\alpha \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$ $f(0)=1$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

لدينا الدالة f معرفة ومستمرة على المجال $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ (قابلة للاشتقاق على المجال $\left[0;\frac{1}{2}\right]$) ورتيبة تماما على المجال

$\left[0;\frac{1}{2}\right]$ (متناقصة تماما على المجال $\left[0;\frac{1}{2}\right]$) و



$f(0).f\left(\frac{1}{2}\right)\prec 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة

لدينا: $x\geq 2$, $(\Delta_1): y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث: $\alpha\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$

نستنتج أن: المنحنى (c_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة

وحيدة فاصلتها α حيث: $\alpha\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$

.6 حساب: $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+(x-2)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$

نستنتج أن: المنحنى (c_f) يقبل مستقيمين مقاربين $(D_1);(D_2)$ بجوار $-\infty;+\infty$ معادلتيهما على الترتيب: $y=x-2; y=-x+2$

.7 إنشاء (Δ_1) و (Δ_2) والمستقيمات المقاربة و (c_f):

.8 مناقشة بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $(E)...|x-2|+\frac{1-m(x-1)}{(x-1)}=0$

(E) تكافئ $|x-2|+\frac{1}{(x-1)}-m\frac{(x-1)}{(x-1)}=0$

(E) تكافئ $|x-2|+\frac{1}{(x-1)}-m=0$

$|x-2|+\frac{1}{(x-1)}=m$ تكافئ $f(x)=m$

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (c_f) مع المستقيمات التي معادلاتها : $y=m$ ، $m\in\mathbb{R}$

m	$-\infty$	1	$+\infty$
عدد و إشارة حلول المعادلة (E)	حل وحيد موجب	حل مضاعف موجب وحل معدوم	حلين موجبين وحل ثالث سالب

* استنتاج مما سبق عدد حلول المعادلة ذات المجهول θ:

$$(E')....\left|\cos\theta-2\right|+\frac{1-m\left(\cos\theta-1\right)}{\left(\cos\theta-1\right)}=0$$

(E') تكافئ $\left|\cos\theta-2\right|+\dfrac{1}{\left(\cos\theta-1\right)}=m$ و منه (E') تكافئ $f\left(\cos\theta\right)=m$

بوضع: $\cos\theta=x$ مع $-1\leq x\prec 1$، نأخذ $\theta\in\left]0;2\pi\right[$ لدينا: $f\left(-1\right)=\dfrac{5}{2}$

1) إذا كان $m\in\left]-\infty;\dfrac{5}{2}\right[$ فإن للمعادلة (E') حلين

2) إذا كان $m=\dfrac{5}{2}$ فإن المعادلة (E') تقبل حل مضاعف هو π ، $\cos\theta=-1$ يكافئ $x=\pi$

1) إذا كان $m\in\left]-\infty;\dfrac{5}{2}\right[$ فإن للمعادلة حلين

2) إذا كان $m\in\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$ فإن المعادلة (E') لا تقبل حلول

تذكير: نعلم ان الربع الاول و الرابع لهما نفس Cos و الربع الثاني و الثالث لهما نفس Cos

حل التمرين 9:

). الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$.

1. اتجاه تغير الدالة g.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $g'(x)=2-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=2-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

و منه: $g'(x)=\dfrac{2\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}$. و بالتالي: اشارة $g'(x)$ من اشارة: $2\sqrt{x^2+1}-x$.

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)>0$. و بالتالي: g دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه، استنتج اشارة g.

$g(x)=0$ يعني: $2x-\sqrt{x^2+1}=0$ أي: $(1)...2x=\sqrt{x^2+1}$. من أجل: $x<0$ المعادلة (1) مستحيلة.

من أجل: $x>0$ $4x^2=x^2+1$ أي: $4x^2-x^2-1=0$ و منه : $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ أو $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (حل مرفوض).

لدينا g مستمرة و رتيبة على $\mathbb{R}$ و بالتالي: المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

اشارة g:

x	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II). نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x)=2\sqrt{x^2+1}-x$.

1. حساب نهاتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty} 2\sqrt{x^2+1}-x=+\infty$$.

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty} 2\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\mapsto+\infty} |x|\left(2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)$$
$$=\lim_{x\mapsto+\infty} x=+\infty$$

2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f(x)=2\sqrt{x^2+1}-x$$
$$f'(x)=\frac{2(2x)}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-1$$
$$=\frac{2x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

و بالتالي: $f'(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

هذا يعني أن اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ لأن $\sqrt{x^2+1}>0$ أي:

x	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$

$f'(x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$
$f(x)$	$+\infty \searrow \sqrt{3} \nearrow +\infty$

حيث: $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}$

3. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+3x\right]$:

لدينا:

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\left[f(x)+3x\right]=\lim_{x\mapsto-\infty}\left[2\sqrt{x^2+1}-x+3x\right]$$

$$=\lim_{x\mapsto-\infty}\left[2\sqrt{x^2+1}+2x\right]=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{\left[2\sqrt{x^2+1}+2x\right]\times\left[2\sqrt{x^2+1}-2x\right]}{\left[2\sqrt{x^2+1}-2x\right]}$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{\left[4(x^2+1)-4x^2\right]}{\left[2\sqrt{x^2+1}-2x\right]}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{4}{\left[2\sqrt{x^2+1}-2x\right]}$$

$$=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2}{\left[\sqrt{x^2+1}-2x\right]}=0$$

لدينا: $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[f(x)+3x\right]=0$

التفسير البياني:

المستقيم ذو المعادلة: $y=-3x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$.

4. بين أن المستقيم $(\Delta'):y=x$ مستقيما مقربا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\mapsto+\infty}\left[2\sqrt{x^2+1}-x-x\right]$$

$$=\lim_{x\mapsto+\infty}\left[2\sqrt{x^2+1}-2x\right]=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\left[2\sqrt{x^2+1}-2x\right]\times\left[2\sqrt{x^2+1}+2x\right]}{\left[2\sqrt{x^2+1}+2x\right]}$$

$$=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\left[4(x^2+1)-4x^2\right]}{\left[2\sqrt{x^2+1}+2x\right]}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{4}{\left[2\sqrt{x^2+1}+2x\right]}$$

$$=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2}{\left[\sqrt{x^2+1}+2x\right]}=0$$

لدينا: $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[f(x)-x\right]=0$

و بالتالي: المستقيم $(\Delta'):y=x$ مستقيم مقرب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

5. الوضع النسبي:

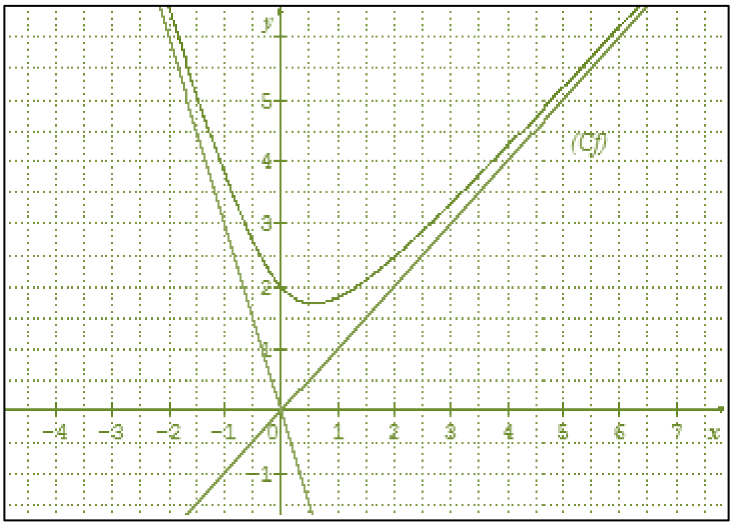
دراسة وضعية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=-3x$:

لدينا: $f(x)+3x=2\sqrt{x^2+1}+2x>0$ و بالتالي: (C_f) فوق (Δ).

دراسة وضعية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ') ذو المعادلة: $(\Delta'):y=x$:

$f(x)-x=2\sqrt{x^2+1}-2x>0$ و بالتالي: (C_f) فوق (Δ')

6. رسم (C_f) ، (Δ) و (Δ').



حل التمرين 10:

I).1. نهايات الدالة g:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty;\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$$

2. اتجاه تغير الدالة g:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $g'(x)=\dfrac{-3x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$

.الدالة g متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ و متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

*جدول التغيرات الدالة g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

3. المعادلة : $g(x)=0$ تكافئ $x=0$.

4. من جدول التغيرات نلاحظ أن: $g(x)\le 0$.

II). 1. الدالة المشتقة :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x)=-1+\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x\times\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$ ومنه: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

2. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty;\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ وبالتالي:الدالة f متناقصة على $\mathbb{R}$

* جدول التغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		--	0	--	
$f(x)$	∞		$\searrow$		$-\infty$

3. البرهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)+f(-x)=2$

$f(x)+f(-x)=-x+1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+x+1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و منه: $f(x)+f(-x)=2$ نستنتج أن $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C).

4. معادلة المماس (D) : $(D): y=1$ معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

5. حل المعادلة $f(x)=0$

المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا محصورا بين 1و2 لأن الدالة f مستمرة متناقصة تماما على المجال $[1;2]$

و $f(1)\times f(2) < 0$ حيث $f(1)\simeq 0.71$ و $f(2)\simeq -0.11$

6. *حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x-2\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+x-2\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)=0$$

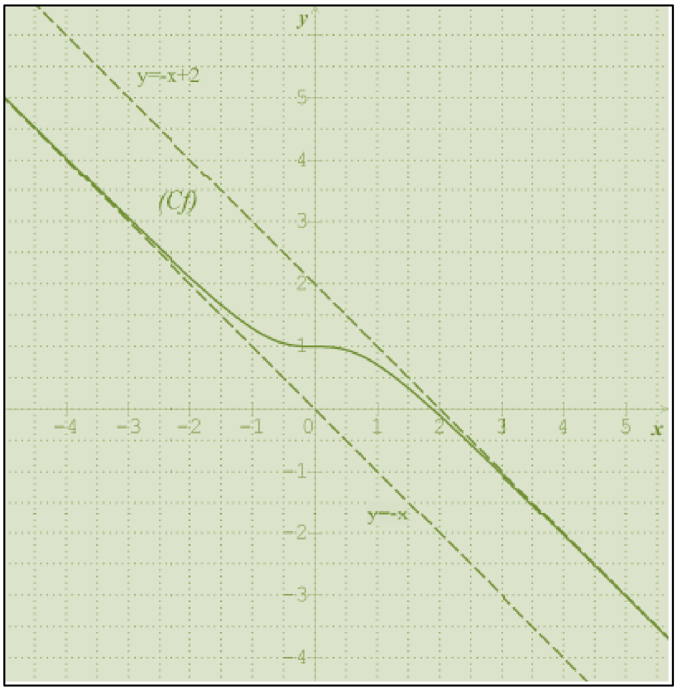
نستنتج أن: المستقيم ذو المعادلة $y=-x+2$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

*حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)=0$$

نستنتج أن: المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

7. إنشاء (C):

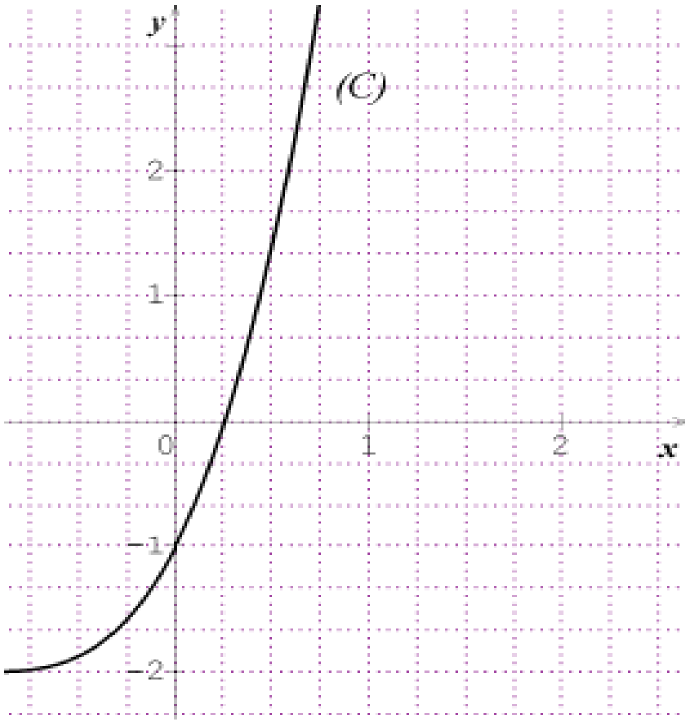


6. تمارين البكالوريا

2008-2020

- الشعب العلمية + تسيير و اقتصاد

بكالوريا جوان 2008/ شعبة علوم تجريبية / الموضوع الأول



المنحنى (C) المقابل هو التمثيل الباني للدالة العددية g المعرفة على المجال: $]-1;+\infty[$ كما يأتي:

$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$.

1. أ- بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g و حدد $g(0)$ و اشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب- علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha)=0$.

ج- استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2. f هي الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

ب- عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسر النتيجة بيانيا.

ج- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.

د- شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. نأخذ $\alpha\approx 0,26$.

أ- عين مدور $f(\alpha)$ الى 10^{-2}.

ب- أرسم المنحنى (Γ).

4. أ- أكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x+1)^2}$

حيث a و b عددان حقيقيان .

ب- عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=2$.

حل مقترح

الدالة العددية g المعرفة على المجال: $]-1;+\infty[$ كما يأتي:

$$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$$

1. أ- جدول تغيرات الدالة g.

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	-2 ↗	$+\infty$

بقراءة بيانية : $g(0)=-1$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)>0$.

ب-التعليل:

طريقة 1:

نلاحظ أن المنحنى (C) يقطع محور الفواصل مرة واحدة في $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ ، يوجد عدد حقيقي α، $\left(\alpha\in\left]0;\frac{1}{2}\right[\right)$ يحقق: $g(\alpha)=0$

طريقة 2:

حسب نظرية القيم المتوسطة: g مستمرة على $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ و $g(0)\times g\left(\frac{1}{2}\right)<0$ اذن يوجد على الأقل عدد حقيقي α حيث، بحيث: $\left(\alpha\in\left]0;\frac{1}{2}\right[\right)$ $g(\alpha)=0$ و بما أن متزايدة تماما على $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ فان α وحيد.

ج- اشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

x		-1		α		$+\infty$
$g(x)$			--	0	+	

2. التحقق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ و لدينا:

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2-2(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2-2(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3}$$

و منه: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$

ب-

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^2}=0$$

، لأن : $g(\alpha)=0$.

التفسير: المماس للمنحنى (Γ) في النقطة ذات الفاصلة α يوازي محور الفواصل.

ج- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(x+1)^2}=0$.

المستقيم الذي معادلته : $y=x+1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (Γ) في جوار $+\infty$

د- جدول التغيرات:

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	--	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{(\alpha+1)^2}$	↗	$+\infty$

3. أ-بأخذ $\alpha\approx 0,26$.

مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}: $f(\alpha)=\dfrac{3}{(1,26)^2}=1,89$

ب-رسم المنحنى (Γ). (أنظر أسفله)

4.أ- بتوحيد المقامات و المطابقة مع العبارة الأولى للدالة f

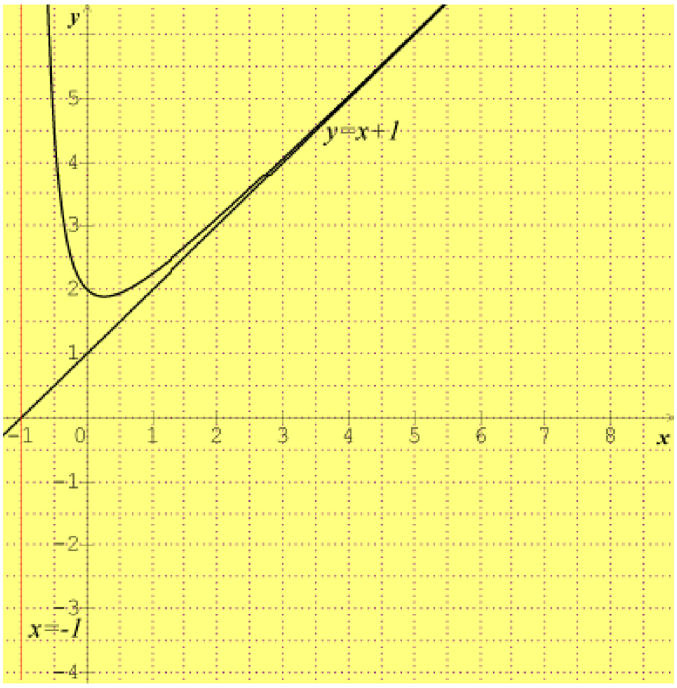
نجد: $a=b=1$ أي: $f(x)=x+1+\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

ب- تعين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$:

$F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{x+1}+c$ ، $c\in\mathbb{R}$.

لدينا F تحقق: $F(1)=2$.

اذن: $c=1$ و منه: $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{x+1}+1$ هي دالة الأصلية للدالة f .



بكالوريا جوان 2008/ شعبة تسيير و اقتصاد / الموضوع الأول

لتكن f هي الدالة العددية المعرفة على كل مجال من مجموعة تعريفها. لها جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	--	‖	--	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

تكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية.

1.احسب $f'(x)$.

2.اعتمادا على جدول التغيرات الدالة :

أ- عين الأعداد الحقيقية a ، b و c .

ب- عين $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} f(x)$ ثم فسرالنتيجة بيانيا.

ج- قارن بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بدلالة الدالة f معللا اجابتك.

3. نأخذ: $a=1$ ، $b=1$ ، $c=\frac{1}{4}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ- بين أنه عندما يؤول x الى $+\infty$ أو $-\infty$ فان المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته: $y=x+1$.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

ج- أثبت أن النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر المنحنى (C).

د- عين نقطة تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل.

4. λ عدد حقيقي ، عين بيانيا،حسب قيم العدد الحقيقي λ عدد حلول المعادلة: $f(x)=|\lambda|$.

حل مقترح

1. احسب $f'(x)$:

f دالة قابلة للاشتقاق على حيث:

$$f'(x)=a-\frac{c}{(x+1)^2}.$$

2. أ- ايجاد a ، b و c :

باستعمال جدول التغيرات دالة f :

$$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{3}{2}\right)=0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=1 \\ f\left(\frac{3}{2}\right)=3 \end{cases}$$ و منه $$\begin{cases} a-4c=0 \\ \frac{1}{2}a+b-2c=1 \\ \frac{1}{2}a+b+2c=3 \end{cases}$$

و بالتالي: $a=1$ ، $b=1$ و $c=\frac{1}{4}$.

ب- حساب

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$

ومنه: نستنتج أن المستقيم ذوالمعادلة : $x=-1$ مقارب ل (C) بجوار $+\infty$ و $-\infty$ يوازي محور التراتيب.

ج- المقارنة:

لدينا: $f\left(\frac{1}{2}\right)>f\left(\frac{3}{4}\right)$ لأن: $\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$ و f متناقصة على $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

3. أ- المستقيم المقارب المائل:

لدينا: $$\lim_{|x|\mapsto+\infty} f(x)-y=\lim_{|x|\mapsto+\infty}\left[x+1+\frac{1}{4(x+1)}-(x+1)\right]$$
$$=\lim_{|x|\mapsto+\infty}\left[\frac{1}{4(x+1)}\right]=0$$

و بالتالي: عندما يؤول x الى $+\infty$ أو $-\infty$ فان المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته: $y=x+1$.

ب- الو ضعية:

لدينا: $f(x)-y=\frac{1}{4(x+1)}$

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
$f(x)-y$	--	+
الوضعية	(C) تحت (Δ)	(C) فوق (Δ)

ج- أثبت أن النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر المنحنى (C) :

طريقة سحب المحاور.

نضع: $\begin{cases} x=X+1 \\ y=Y+2 \end{cases}$ و لدينا: $y=f(x)$

و منه: $Y+2=f(X+1)$

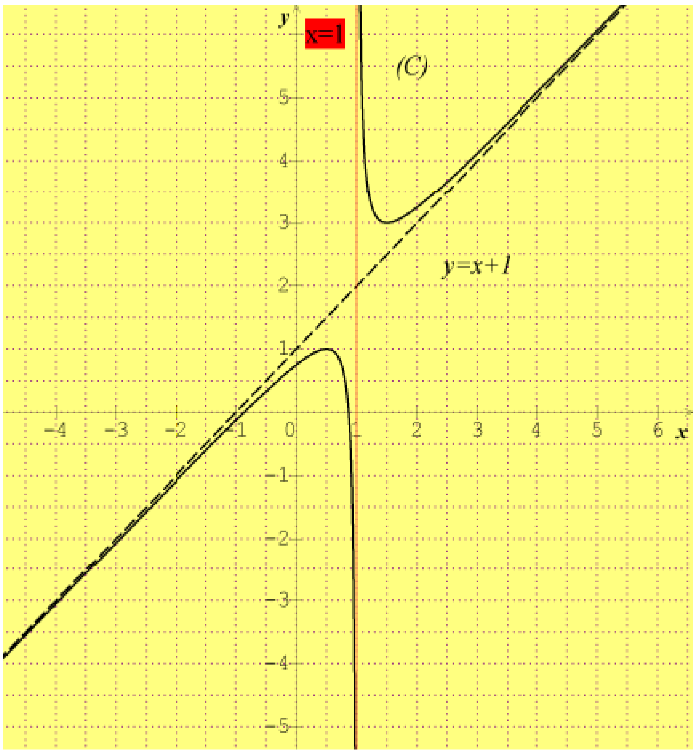
أي: $Y=f(X-1)+2=X+\frac{1}{4X}$

بوضع: $g(X)=X+\frac{1}{4X}$ نجد g دالة فردية

لأن : $g(-X)=-g(X)$

و بالتالي : النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

د-تعين نقطة تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل.



$f(0)=\frac{3}{4}$ ، $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$ و $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$

الرسم:

4. المناقشة البيانية:

$\lambda\in]-1;1[$ للمعادلة حلان .

$\lambda=-1$ أو $\lambda=1$ للمعادلة حل مضاعف.

$\lambda \in]-3;1[\cup]1;3[$ لا توجد حلول للمعادلة.

$\lambda=-3$ أو $\lambda=3$ للمعادلة حل مضاعف.

$\lambda\in]-\infty;-3[\cup]3;+\infty[$ للمعادلة حلان.

بكالوريا جوان 2009/ شعبة تسيير و اقتصاد / الموضوع الأول / التمرين 1

f دالة عددية معرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ ، (C_f) تمثيلها البياني و جدول تغيراتها يعطى كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	2

أجب ب: خطأ أو صحيح على كل سؤال مما يلي مع تبرير الاجابة:

1.المستقيم الذي معادلته : $y=2$ مقارب للمنحنى (C_f) .

2.المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا.

3.مجموعة حلول المتراجحة : $f(x)>0$ هي :
$S=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

4.في المجال $]-\infty;-1[$ يكون : " $f(-2)>f(x)$ عندما يكون $x<-2$".

5.النقطة $A(-3;1)$ تنتمي الى المنحنى (C_f) .

6.الدالة f زوجية.

حل مقترح

1. صحيح

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$.

2. خطأ

لأن :من جدول التغيرات نلاحظ أن .

3. صحيح

لأن لدينا : $f(x)>2$ من أجل كل x من D_f و بالتالي $f(x)>0$ لما $x\in D_f$.

4. صحيح

لأن: الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ وبالتالي من أجل $x<-2$ نجد : $f(x)<f(-2)$ أي: $f(-2)>f(x)$

5. خطأ

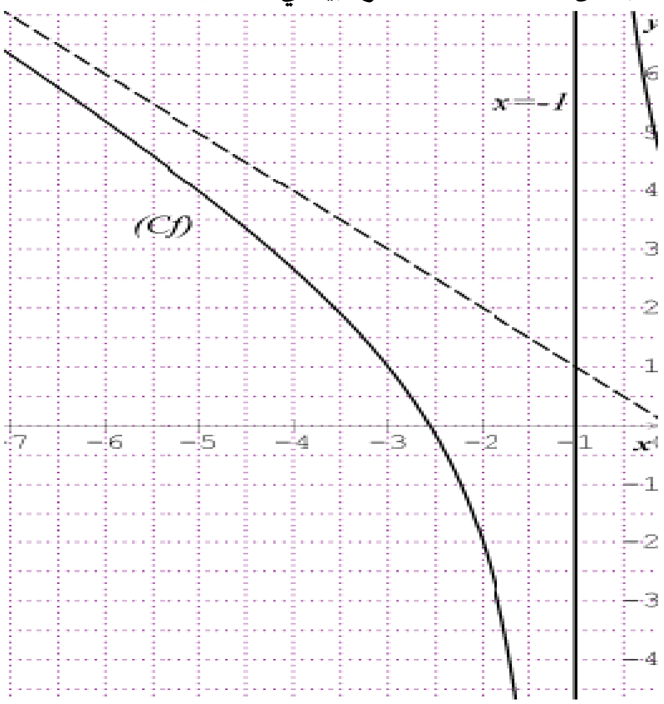
لأن: من أجل كل x من D_f لدينا : $f(x)>2$ و بالتالي : $f(-3)\neq 1$ و منه: النقطة $A(-3;1)$ لا تنتمي الى المنحنى (C_f).

6. خطأ

لأن لدينا: $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ نلاحظ أن D_f غير متناظر بالنسبة للمبدأ O ، أي: $-1\notin D_f$ و لكن $1\in D_f$.

بكالوريا جوان 2009/ شعبة علوم تجريبية / الموضوع الأول

I). f دالة معرفة على : $]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ ب: $f(x)=-x+\dfrac{4}{x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، كما هو مبين في الشكل:



1.أ-احسب نهايات f عند الحدود المفتوحة ل I .

ب- بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات f شكل جدول تغيراتها.

2. g دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$ ، (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

أ-احسب نهاية g عند $+\infty$.

ب-تحقق من أن (C_g) يقبلا مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعين معادلة له.

ج-أدرس تغيرات g .

II). k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$$k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$$

1.أ- احسب $\lim\limits_{\substack{< \\ h\to0}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ h\to0}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$.

ماذا تستنتج؟

ب- أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

2.أكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

3. أرسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) .

4. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=\frac{1}{2}$ و $x=-\frac{1}{2}$.

حل مقترح

I). f دالة معرفة على: $]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ ب:

$$f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$$

1. أ-حساب نهايات f :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto-1\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\mapsto-1\\<}}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto-1\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\mapsto-1\\>}}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

يمكن استخراج هذه النهايات من خلال التمثيل البياني (C_f).

ب- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		0
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\searrow$	4

2. g دالة معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$

أ-نهاية g عند $+\infty$.

$$\lim_{x\mapsto+\infty} g(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(x+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

ب-**التحقق** :

بما أن :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} g(x)-x=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(x+\frac{4}{x+1}\right)-x=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{4}{x+1}\right)=0$$

فان: المنحنى (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$

معادلته هي: $y=x$.

ج-دراسة تغيرات g :

***اتجاه التغير:**

قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث:

$$g'(x)=1-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

$g'(x)=0$ تكافؤ: $(x-1)(x+3)=0$ أي: $x=1$ ، $x=-3$ حل مرفوض).

ومنه اشارة هي حسب الجدول التالي:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	--	0	+

*جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	--	0	+
$g(x)$	4 $\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$ $+\infty$

حيث: $g(1)=3$.

II). k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$$k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$$

1. أ- حساب

$$\lim_{\substack{h\to0\\<}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to0\\<}}\frac{-h+\frac{4}{h+1}-4}{h}$$

$$=\lim_{\substack{h\to0\\<}}\frac{-h^2-5h}{h(h+1)}==\lim_{\substack{h\to0\\<}}\frac{-h-5}{h+1}=-5$$

و منه: $\lim_{\substack{h\to0\\<}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=-5$

ولدينا:

$$.\lim_{\substack{h\to0\\>}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to0\\>}}\frac{h+\frac{4}{h+1}-4}{h}$$

$$=\lim_{\substack{h\to0\\>}}\frac{h^2-3h}{h(h+1)}=\lim_{\substack{h\to0\\>}}\frac{h-3}{h+1}=-3$$

و منه: $\lim_{\substack{h\to0\\>}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=-3$

نستنتج أن:

k الدالة دالة غير قابلة للاشتقاق عند 0 لأن العدد المشتق من اليمين (-3) لا يساوي العدد المشتق من اليسار (-5).

ب- التفسير الهندسي:

بما أن البدالة k قابلة للاشتقاق من اليمين و قابلة للاشتقاق من اليسار فان منحنى الدالة k يقبل نصفي مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ملاحظة: يمكن القول أن النقطة $(0;4)$ هي نقطة زاوية لمنحنى الدالة k .

2. أكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$:

*معادلة نصف مماس (Δ_1):

(Δ_1) هو نصف مماس عند $x_0=0$ حيث: $x_0\geq0$

و منه: $y=k'(0)(x-0)+k(0)$

و بالتالي: $y=-3(x-0)+4$ أي: $(\Delta_1):y=-3x+4$.

*معادلة نصف مماس (Δ_1):

(Δ_2) هو نصف مماس عند $x_0=0$ حيث: $x_0\le 0$

و منه: $y=k'(0)(x-0)+k(0)$

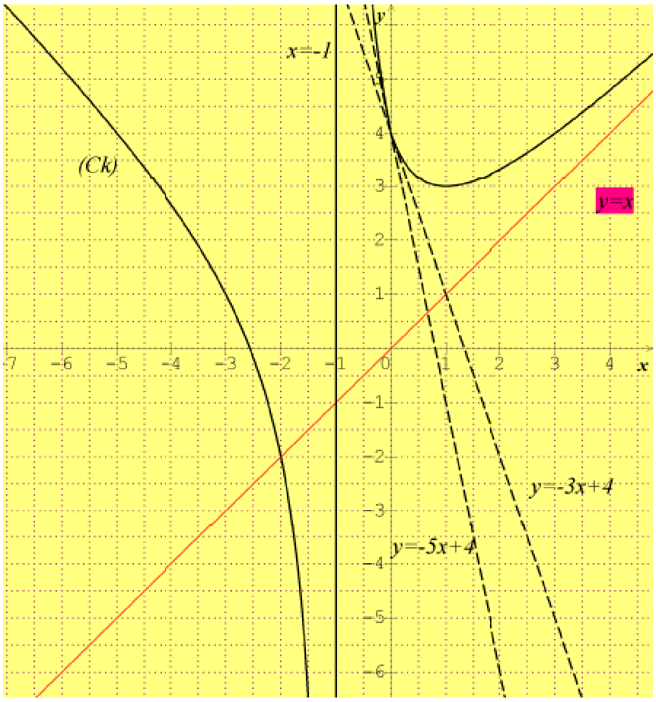
و بالتالي: $y=-5(x-0)+4$ أي: $(\Delta_2): y=-5x+4$.

3. رسم (Δ_1)، (Δ_2) و (C_k).

لرسم (C_k) نلاحظ:

-اذا كانت $x\le 0$ فان: $k(x)=f(x)$ و منه: $(C_f)=(C_k)$

-اذا كانت $x\ge 0$ فان: $k(x)=g(x)$ و منه: $(C_g)=(C_k)$



4. حساب المساحة:

نرمز ب S لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمات

التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=\frac{1}{2}$ و $x=-\frac{1}{2}$.

و منه: $S=\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}k(x)dx=\int_{\frac{-1}{2}}^{0}k(x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}k(x)dx$

$$=\int_{\frac{-1}{2}}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}g(x)dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}+4\ln(x+1)\right]_{\frac{-1}{2}}^{0}+\left[-\frac{x^2}{2}+4\ln(x+1)\right]_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{8}-4\ln 2+4\ln 3-4\ln 2=4\ln 3u.a$$

و بالتالي: $S=4\ln 3u.a$.

بكالوريا جوان 2009/ شعبة رياضيات / الموضوع الثاني

f دالة معرفة على : $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب

الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1.أدرس تغيرات الدالة f .

2.أ-بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما

(D) معادلته $y=x$.

ب-أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (D).

3.أ- بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة

فاصلتها x_0 حيث $1,3<x_0<1,4$.

ب-عين معادلة (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه

مع محور التراتيب.

ج-أرسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم .

4.أوجد الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل القيمة

0 للمتغير x .

5. g الدالة العددية معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة:

$g(x)=|f(x)|$.

بين كيف يمكن انشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) . ثم أرسمه

في نفس المعلم السابق.

6.ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة

حلول المعادلة: $g(x)=m^2$.

حل مقترح

f دالة معرفة على : $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$

1. دراسة تغيرات الدالة f .

النهايات:

$\lim_{x\mapsto 1^+}f(x)=\lim_{x\mapsto 1^+}x-\frac{1}{\sqrt{x+1}}=-\infty$ لأن:

$\lim_{x\mapsto 1^+}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}=-\infty$.

$\lim_{x\mapsto +\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto \infty}x-\frac{1}{\sqrt{x+1}}=+\infty$ لأن: $\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}}=0$.

المشتقة:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ حيث:

$$f'(x)=1-\frac{-\frac{2}{2\sqrt{x+1}}}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=1+\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

و منه: $f'(x)=1+\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$

$f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	-1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2. أ- **المستقيمات المتقاربة:**

بما أن: $\lim\limits_{x\mapsto -1^+} f(x)=-\infty$ فأن: $x=-1$ هي معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

لدينا:

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\mapsto\infty}\left[x-\frac{1}{\sqrt{x+1}}-x\right]=\lim_{x\mapsto\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right]=0$$

و منه: $y=x$ هي معادلة مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

3.أ- f مستمرة و رتيبة تماما على $]-1;+\infty[$ حيث:

$f(1,3)=-0,01$ و $f(1,4)\ \approx 0,1$ ومنه: $f(1,3).f(1,4)<0$

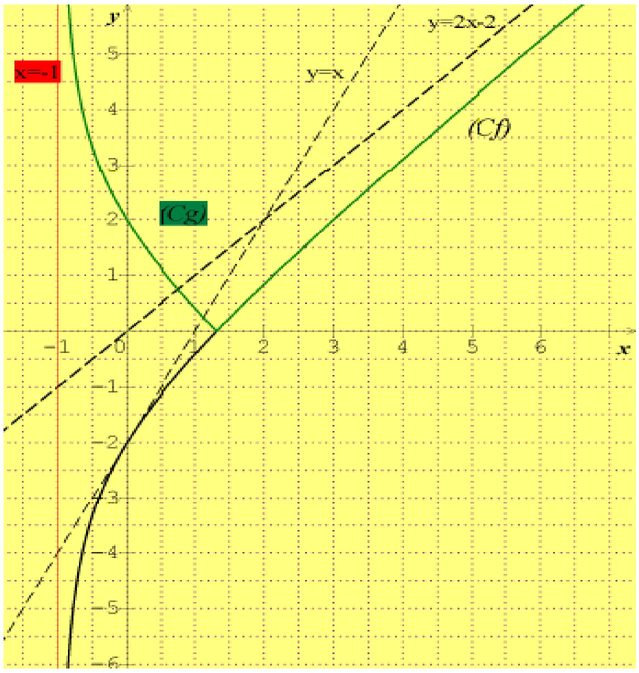
اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث: $1,3<x_0<1,4$.

ب-لدينا: $f(0)=-2$ و منه : $A(0;-2)$ هي نقطة تقاطع (C_f) مع محور التراتيب.

معادلة المماس (Δ):

لدينا: $(\Delta): y=f'(0)(x-0)f(0)$ أي: $y=2x-2$

ج- رسم (Δ) و (C_f) **في نفس المعلم .**



4. لتكن F الدالة الأصلية للدالة f :

$$F(x)=\int f(x)dx=\int x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}dx$$

أي: $$=\int xdx-\int\frac{2}{\sqrt{x+1}}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-4\sqrt{x+1}+c$$

لأن: $\left(\sqrt{x+1}\right)'=\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1})}$ حيث: c عدد حقيقي.

نعلم أن: F تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغير x يعني: $F(0)=0$

و بالتالي: $c=4$.

5. g دالة g معرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=|f(x)|$.

كيفية انشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) :

$$g(x)=|f(x)|=\begin{cases} g(x)=f(x), x>x_0 \\ g(x)=-f(x), x<x_0\end{cases}$$

وبالتالي:

من أجل $x>x_0$ (C_g) منطبق على (C_f).

من أجل $x<x_0$ (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

6. ناقش بيانيا، عدد واشارة حلول المعادلة: $g(x)=m^2$.

لدينا من أجل :

$m=0$ للمعادلة حل وحيد موجب $(x=x_0)$.

$0<|m|<\sqrt{2}$ للمعادلة حلين موجبين.

$|m|=\sqrt{2}$ للمعادلة حلان أحدهما موجب و الآخر معدوم.

$|m|>\sqrt{2}$ للمعادلة حلان مختلفان في الاشارة.

بكالوريا جوان 2009/ شعبة تسيير واقتصاد / الموضوع الأول / التمرين 4

الدالة العددية f معرفة على المجال $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ ، يرمز (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس .

I) 1. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

2. احسب نهايات f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها.

3. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب يطلب تعين معادلته.

4. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

5. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ).

II) 1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ فان:

$f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ ، و f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

2. عين اتجاه تغير الدالة f على مجالي مجموعة تعريفها و شكل جدول تغيراتها.

3. أكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

III) 1. بين أن النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

2. أرسم كلا من (D) ، (Δ) و (C_f) .

3. عين بيانا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة: $f(x)=m$ حلان مختلفان.

4. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=1$ و $x=e^2-1$.

حل مقترح

I) 1. تعين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

$$=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$$

$$=\frac{ax^2+(a+b)x+(b+c)}{x+1}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\a+b=0\\b+c=3\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=4\end{cases}$.

2. النهايات:

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x-1+\dfrac{4}{x+1}=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{4}{x+1}=0$

و $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x-1=+\infty$.

وبالتالي: $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x-1+\dfrac{4}{x+1}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{<\\x\mapsto-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{<\\x\mapsto-1}} x-1+\dfrac{4}{x+1}=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{\substack{<\\x\mapsto-1}}\dfrac{4}{\underbrace{x+1}_{\to0^-}}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{>\\x\mapsto-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{>\\x\mapsto-1}} x-1+\dfrac{4}{x+1}=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{\substack{>\\x\mapsto-1}}\dfrac{4}{\underbrace{x+1}_{\to0^+}}=+\infty$

3. بما أن : $\lim\limits_{\substack{>\\x\mapsto-1}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{<\\x\mapsto-1}} f(x)=-\infty$ فان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته: $x=-1$.

4. المستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

لدينا: $\lim\limits_{|x|\mapsto+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x-1+\dfrac{4}{x+1}-(x-1)$

$$=\lim_{|x|\mapsto+\infty}\frac{4}{x+1}$$

$$=0$$

و منه: المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

5. دراسة الوضعية ل (C_f) و (Δ) .

لدينا: $f(x)-y=[f(x)-(x-1)]=\dfrac{4}{x+1}$

ندرس اشارة $\dfrac{4}{x+1}$ نجد:

لما $x<-1$ المنحنى (C_f) تحت (Δ).

و لما $x>-1$ المنحنى (C_f) فوق (Δ). $-\infty$

II) 1. المشتقة:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$:

لدينا: $f'(x)=1-\dfrac{4}{(x+1)^2}$

$$=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}$$

تذكير: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

و منه: $f'(x)=\dfrac{(x+1-2)(x+1+2)}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.

2. تعين اتجاه تغير الدالة f .

*اشارة $f'(x)$ من اشارة البسط (لأن المقام موجب تماما على $\mathbb{R}-\{-1\}$) و هي:

$(x-1)(x+3)=0$ معناه: اما $(x-1)=0$ أو $(x+3)=0$ أي: $x=1$ أو $x=-3$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$(x-1)(x+3)$		$+$	0	--	0	$+$	

و عليه

: f متزايدة تماما على المجال: $]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$

و متناقصة تماما على المجال : $[-3;-1[\cup]-1;1]$

(لأن: $-1\notin D_f$).

***جدول تغيرات:**

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	--	||	--	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$f(-3)=-6$ و $f(1)=2$.

3. معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0:

تكتب من الشكل: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ حيث: $f(0)=3$

و $f'(0)=-3$ اذن: $y=-3x+3$.

III).1 تبيان أن النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

الطريقة1:

تذكير: $A(-1;-2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) معناه: من أجل كل x، $2\alpha-x$ من D_f، لدينا:

$f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$.

لدينا: $\alpha=-1$ و $\beta=-2$ و بالتالي:

: $f(-2-x)=-2-x-1+\dfrac{4}{-2-x+1}$

و منه: $f(-2-x)=-x-3+\dfrac{4}{-x-1}=-x-3-\dfrac{4}{x+1}$.

و $f(-2-x)+f(x)=-4$ أي :

$f(2(-1)-x)+f(x)=2(-2)$.

و بالتالي النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

الطريقة2 : سحب المحاور.

نضع: $\begin{cases}x=X-1\\ y=Y-2\end{cases}$ و لدينا: $y=f(x)$

و منه: $Y-2=f(X-1)$

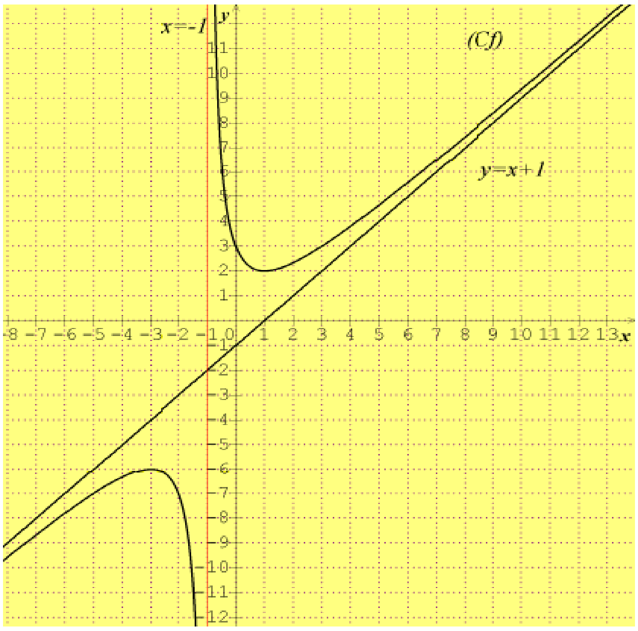
أي: $Y=f(X-1)+2=X+\dfrac{4}{X}$

بوضع: $g(X)=X+\dfrac{4}{X}$ نجد g دالة فردية

لأن : $g(-X)=-g(X)$

و بالتالي : النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

2. رسم (D)، (Δ) و (C_f) .



3. المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة: $y=m$ وعليه:

- للمعادلة حلين مختلفين من أجل : $m\in]-\infty;-6[\cup]2;+\infty[$.
- للمعادلة حل مضاعف من أجل: $m=-6$ أو $m=2$.
- ليس للمعادلة حلول من اجل: $m\in]-6;2[$.

4. حساب المساحة:

$$S=\int_1^{e^2-1}[f(x)-(x-1)]dx=\int_1^{e^2-1}\frac{4}{x+1}dx=[4\ln(x+1)]_1^{e^2-1}ua.$$

و منه: $S=4\left(lne^2-\ln 2\right)ua=\left(8-4\ln 2\right)ua$

بكالوريا جوان 2010/ شعبة تقني رياضي / الموضوع الثاني

f **دالة عددية معرفة على** $\mathbb{R}$ **كما يلي:**

$$f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

و (C_f) **تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس** $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1.أ-أثبت أن الدالة f **فردية.**

ب-أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x **لدينا :**

$$f'(x)=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

ج-أدرس تغيرات الدالة f .

2.أ-أكتب معادلة المماس (T) **للمنحنى** (C_f) **في النقطة ذات الفاصلة** 0 .

ب-أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (T) و استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

ج-بين ان (d) ذو المعادلة: $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$ ثم استنتج معادلة (d') المستقيم المقارب الآخر.

د-أرسم (d)، (d') و (C_f) في المعلم السابق.

3. g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=|x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

أ-أثبت أن الدالة g زوجية.

ب-انطلاقا من (C_f) أرسم (C_g) منحنى الدالة في نفس المعلم السابق.

حل مقترح

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

1. أ- اثبات أن الدالة f فردية.

تذكير: f دالة فردية معناه: من أجل كل x من D_f و $-x$ من D_f لدينا : $f(-x)=-f(x)$.

لدينا:

$-x, x\in D_f$

$$f(-x)=-x\left(1+\frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}}\right)$$

أي: $$f(-x)=-\left[x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right]$$

$$=-f(x)$$

و بالتالي : الدالة f فردية.

ب- المشتقة:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x الدالة f قابلة للاشتقاق:

$$f'(x)=\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)+x\left(\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\right)$$

$$=1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

و منه: $$f'(x)=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

ج- دراسة تغيرات الدالة f .

النهايات:

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty} x\left(1+\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}\right)=\lim_{x\mapsto+\infty}x=+\infty$$

و بالتالي: $\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}x=-\infty$

لدينا : $f'(x)>0$ اذن دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و منه **جدول تغيراتها** هو كالآتي:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2. أ-معادلة المماس (T) :

لدينا: $(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ حيث: $f'(0)=2$ و $f(0)=0$

و منه: $y=2x$ هي معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

ب-دراسة وضعية (C_f) بالنسبة الى (T)

لدينا:

$$f(x)-y=f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-2x$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x=\frac{x-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

أي: $$f(x)-y=\frac{x\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$$

اشارة الفرق من اشارة البسط أي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	+	0	.1
الوضعية	(C_f) فوق (T)	$(C_f)\cap(T)=\{O(0;0)\}$	(C_f) تحت (T)

نستنتج أن:

(C_f) يقطع (يخرق) المماس (T) في المبدأ و بالتالي: $O(0;0)$ هي نطة انعطاف للمنحنى (C_f).

ج-بين ان (d) ذو المعادلة: $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$

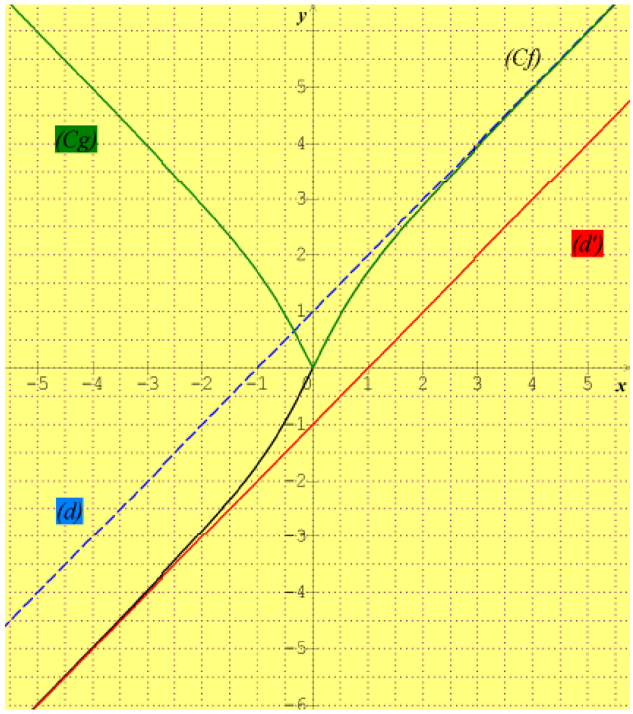
لدينا:

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)-y=f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty} x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-x-1$$

$$=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=0$$

و بالتالي: المستقيم (d) ذو المعادلة: $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$.

نلاحظ أن: المستقيم $x-1$ هو مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $-\infty$



لأن:

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)-y=f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty} x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-x+1$$

$$=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1=0$$

و بالتالي: $(d'):y=x-1$ هي معادلة المستقيم المقارب الآخر (C_f).

د- رسم (d) ،(d') و (C_f): (أنظر أسفله ☟)

3. g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=|x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

أ- اثبات أن الدالة g زوجية:

تذكير: f دالة معناه**:** من أجل كل x من D_f و $-x$ من D_f لدينا **:** $f(-x)=f(x)$ **.**

$$g(-x)=|-x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}}\right)=|x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=g(x)$$

و منه: الدالة g زوجية.

ب-الرسم:

لدينا:

$g(x)=|f(x)|=\begin{cases} f(x), x>0\\ -f(x), x<0\end{cases}$.

أي: اذا كان $x>0$ فان (C_g) منطبق على (C_f) .

اذا كان فان (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

بكالوريا جوان 2010/ شعبة تسيير م اقتصاد / الموضوع الأول

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1.بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فان : $f(x)=x-5+\dfrac{\alpha}{x^2}$ ،

حيث α عدد حقيقي يطلب تعيينه

2.احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

3.أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فان :

$f'(x)=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}$ **،استنتج تغير الدالة f .**

ب-شكل جدول تغيرات الدالة f .

4.أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل ، يطلب تعين معدلتهما..

5.أوجد معادلة ل (Δ) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

6.أرسم (Δ) و المنحنى (C_f).

7.أ-عين الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق : $F(2)=-10$.

ب-أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين $x=1$ و $x=2$.

✍ حل مقترح

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}$$

1. تعيين α:

$$f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}\quad=\frac{x^3(x-5)+4}{x^3}$$

أي: $f(x)=x-5\frac{4}{x^2}$ وبالتالي: $\alpha=5$.

2. النهايات:

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(x-5\frac{4}{x^2}\right)=+\infty \ .$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}\left(x-5\frac{4}{x^2}\right)=-\infty \ .$$

$$\lim_{x\mapsto0} f(x)=\lim_{x\mapsto0}\left(x-5\frac{4}{x^2}\right)=+\infty$$

3. أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$:

لدينا: $f'(x)=1-\frac{8x}{x^4}=1-\frac{8}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3}$

و منه: $f'(x)=\frac{(x-2)(x^2-2x+4)}{x^3}$ لأن:

$$(x-2)(x^2-2x+4)=x^3-8$$

لدينا: x^2+2x+4 مميزه: $\Delta=-12$ ومنه: $x^2+2x+4>0$ و

بالتالي: اشارة $f'(x)$ من اشارة: $\frac{x-2}{x^3}$ و بالتالي:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	--	0	+	

f متزايدة تماما على $]-\infty;0[\cup[2;+\infty[$

f متناقصة تماما على $]0;2]$.

ب- جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	--	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

4. المستقيمين المقاربين:

بما أن : $\lim_{x\mapsto0} f(x)=+\infty$ فإن: $x=0$ معادلة مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب.

و نلاحظ أن : $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)-(x-5)=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{4}{x^2}\right)=0$ و

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)-(x-5)=\lim_{x\mapsto-\infty}\left(\frac{4}{x^2}\right)=0$$

و منه: $y=x-5$ معادلة مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

5. معادلة المماس (Δ):

المعادلة هي: $(\Delta): y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

حيث: $f(1)=0$ و $f'(1)=-7$

و بالتالي: معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1هي: $y=-7x+7$.

6. رسم (Δ) و المنحنى (C_f). **(أنظر أسفله ☟)**

7. أ-تعين الدالة الأصلية F للدالة f :

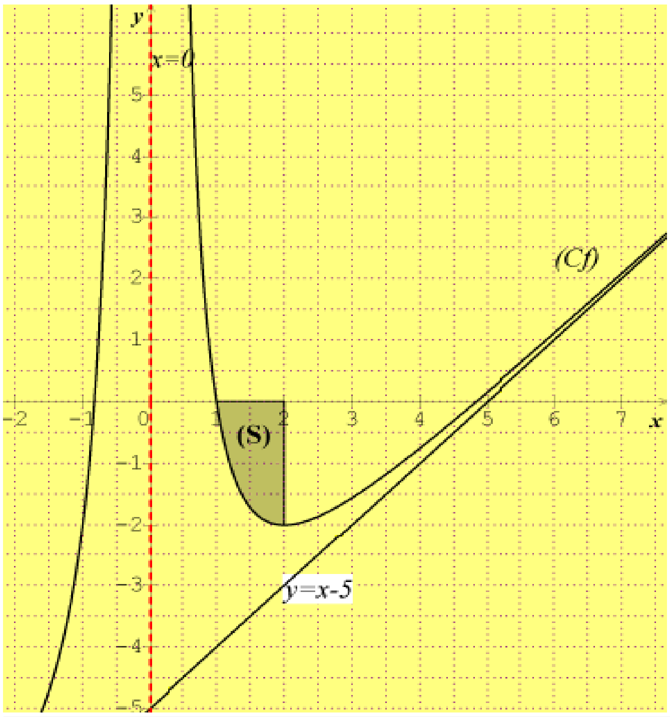
$F(x)=\frac{1}{2}x^2-5x-4\frac{1}{x}+c$ ، حيث c عدد حقيقي.

لدينا F تحقق: $F(2)=-10$ معناه: $c=0$

اذن: $F(x)=\frac{1}{2}x^2-5x-4\frac{1}{x}$.

ب-المساحة:

تذكير: * اذا كانت f الدالة سالبة على المجال $[a;b]$ و S المساحة المحددة بالمنحنى $(C)_f$ و المستقيمات : $x=a$.



$x=b$ و $y=0$ فان: $S=\int_a^b -f(x)dx$

$\int_a^b -f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(x)dx$ *

$$S=\int_1^2 -f(x)dx=-\int_1^2 f(x)dx=\int_2^1 f(x)dx$$

و منه: $S=F(1)-F(2)$ و بالتالي: $S=\frac{3}{2}ua$.

بكالوريا جوان 2011/ شعبة تسيير م اقتصاد / الموضوع الثاني

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ **بالعبارة:** $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$

(C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الوحدة $1cm$ على محور الفواصل و $4cm$ على محور التراتيب.

1.بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x)=1-\dfrac{x}{x^2+1}$

.

2.احسب نهاية الدالة عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، و استنتج أن (C) يقبل مستقيما مقاربا يطلب تعين معادلة له.

3. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ) الذي معادلته: $y=1$.

4.احسب $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$f(-x)=2-f(x)$ و استنتج أن (C) يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه.

6. أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C).

7.أ-احسب التكامل: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$.

ب-احسب بالسنتيمتر مربع مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى و محور الفاصل و المستقيمين اللذين معادلتهما: $x=0$ و $x=1$.

حل مقترح

الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$.

1. التبيان :

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}$$
$$=1-\frac{x}{x^2+1}$$

النهايات:

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+1}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$.

و بالتالي: $\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=1$.

اذن: $y=1$ معادلة مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ و $-\infty$ ، يوازي محور الفواصل.

3. الوضعية:

لدينا: $f(x)-y=\dfrac{-x}{x^2+1}$ اشارة الفرق $f(x)-y$ هي من اشارة: $-x$ معناه:

لما $x<0$ المنحنى (C) فوق (Δ).

ولما $x>0$ المنحنى (C) تحت (Δ).

في النقطة $A(0,1)$ المنحنى (C) يقطع (Δ).

4. حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

لدينا: $f'(x)=\dfrac{-1(x^2+1)+x(2x)}{(x^2+1)^2}$

و منه: $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

*اشارة $f'(x)$ من اشارة : x^2-1.

و منه: $x^2-1=0$ أي: $(x-1)(x+1)=0$ اذن : $x=1$ أو $x=-1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(x-1)(x+1)$		$+$	0	--	0	$+$	

***اتجاه التغير:**

و عليه : f متزايدة تماما على المجال: $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$

و متناقصة تماما على المجال : $[-1;1]$.

***جدول تغيرات:**

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	--	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1

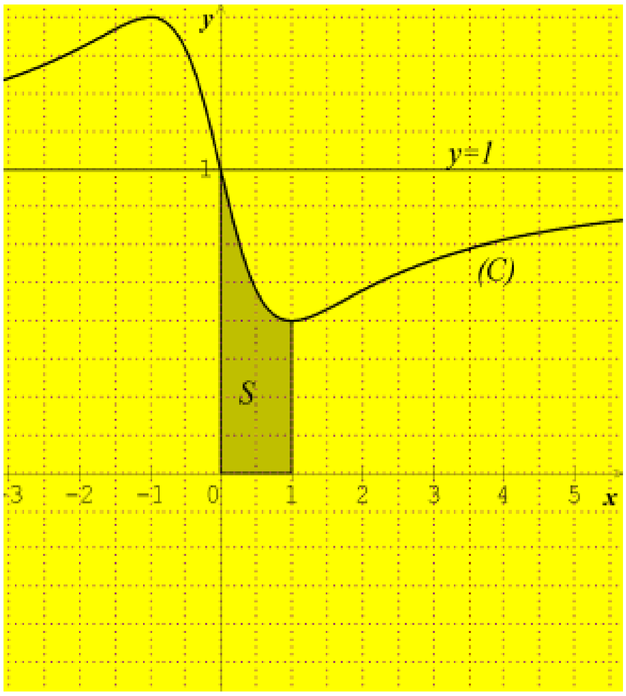
5. لدينا من أجل كل عدد حقيقي x:

$$2-f(x)=2-1+\frac{x}{x^2+1}=1+\frac{x}{x^2+1}$$
$$=f(-x)$$

نستنتج أن النقطة $\Omega(0;1)$ هي مركز تناظر (C).

ملاحظة: بما أن $\Omega(0;1)\in(C)$ فان Ω نقطة انعطاف أيضا.

6. رسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C).



7.أ- حساب التكامل:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 \ .$$

ب-المساحة:

$$S = 4.\int_0^1 f(x)dx = 4cm^2 \times \left(\int_0^1 1-\frac{x}{x^2+1}dx\right)cm^2$$

و منه: $S = 4\times\left(1-\frac{1}{2}\ln 2\right)cm^2$

أي: $S = (4-2\ln 2)cm^2$.

بكالوريا جوان 2012/ شعبة تسيير م اقتصاد / الموضوع الثاني

f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}$$

1.احسب نهايتي f عند -1 بقيم أكبر وعند $+\infty$.

2.أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$$

ب-استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$،ثم شكل جدول تغيراتها.

ج-جد الدالة الأصلية H للدالة $h: x \mapsto \frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1;+\infty[$ و التي تنعدم من أجل $x=0$.

3.تنتج احدى شركات تركيب آلات الغسيل خلال أسبوع 5 آلات على الأقل و 200 ألة على الأكثر. تنمذج الكلفة الهامشية C_m لإنتاج x ألة اضافية للشركة على المجال $[5;200]$ بالدالة f أي : من أجل كل x من المجال $[5;200]$ ، $C_m(x) = f(x)$.

أ- ما هو عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون التكلفة الهامشية أقل ما يمكن؟.

ب- نرمز بالرمز $C(x)$ للكلفة الإجمالية لإنتاج آلة و نذكر أن : $C'(x) = C_m(x)$

جد عبارة الكلفة الإجمالية $C(x)$ ، علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000 ، ثم استنتج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى.

حل مقترح

f دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كمايلي :

1. النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^3 = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x) = +\infty \ .$$

2. أ- المشتقة :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$:

$$f'(x) = x^2 - \frac{57600}{(x+1)^2} = \frac{x^2(x^2+1)^2 - 57600}{(x+1)^2}$$

و منه : $f'(x) = \frac{(x^2+x)^2 - 57600}{(x+1)^2}$

ب- اتجاه التغير:

نلاحظ أن:

$(x^2+x)^2 - 57600 = (x^2+x-240)(x^2+x+240)$

لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ $x^2+x+240>0$ ، و منه :

اشارة $f'(x)$ من اشارة: $x^2+x-240$.

نجد: $\Delta = 961$ و بالتالي: يوجد حلان هما: 15 و -16

(-16 حل مرفوض لأنه لا ينتمي الى مجموعة تعريف الدالة f).

x	-1		15		$+\infty$
$x^2+x-240$		--	0	$+$	

و منه: متزايدة تماما على $[15;+\infty[$

و متناقصة تماما على $]-1;15]$.

*جدول تغيرات:

x	-1		15		$+\infty$
$f'(x)$		--	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	4825	↗	$+\infty$

ج-
الدالة الأصلية H للدالة $h: x \mapsto \frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1;+\infty[$:
لدينا: $H(x)=\int h(x)dx=\int \frac{1}{x+1}dx=\ln(x+1)+c$
حيث c عدد حقيقي.
نعلم أن H تنعدم من أجل $x=0$ أي: $H(0)=0$
و بالتالي: $c=0$.

3. أ- عدد الآلات
الكلفة الهامشية أقل ما يمكن أي نبحث عن القيمة الحدية الصغرى للدالة f .
من جدول التغيرات نجد أن f لها قيمة الحدية الصغرى تبلغها من أجل: $x=15$.
و بالتالي عدد الآلات هو 15.
ب-الكلفة الإجمالية
نعلم أن: $C'(x)=C_m(x)$ ومنه : C هي الدالة الأصلية للدالة f
لأن: $C_m(x)=f(x)$.
أذن:
$$C(x)=\int f(x)dx=\int f(x)=\frac{1}{3}x^3+100+\frac{57600}{x+1}dx$$
أي: $C(x)=\frac{1}{12}x^4+100x+57600\ln(x+1)+k$ ،
حيث: k عدد حقيقي.
علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000 يعني:
$C(5)=4000$ و منه : $k=\frac{473375}{12}-57600\ln 6$
و بالتالي:
عبارة الكلفة الإجمالية $C(x)$ هي:
$$C(x)=\frac{1}{12}x^4+100x+57600\ln\left(\frac{x+1}{6}\right)+\frac{473375}{12}.$$
استنتج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى:
$C(15)=101662,43DA$.

بكالوريا جوان 2014/ شعبة علوم تجريبية / الموضوع الثاني

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$.
1. أ- احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
ب-أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.
2. أ- بين أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.7<\alpha<0.8$.
ب-استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.
1. احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$.
ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعين معادلة له.
ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .
3. أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{x.g(x)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$
حيث f' مشتقة الدالة f .
ب-استنتج اشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيرات الدالة f . (نأخذ $f(\alpha)\approx -0,1$)
4. احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.
5. أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).
6. لتكن h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$. و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
أ- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$
ب- استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h).

حل مقترح

I).1. أ-النهايات:
$$\lim_{x\mapsto+\infty} g(x)=\lim_{x\mapsto+\infty} 2x^3-4x^2+7x-4=\lim_{x\mapsto+\infty} 2x^3=+\infty$$
و منه: $\lim_{x\mapsto-\infty} g(x)=-\infty$.
ب-دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$:
الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:
لدينا: $g'(x)=6x^2-8x+7$
$g'(x)>0$ و بالتالي g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2. أ- g مستمرة و رتيبة تماما على $\mathbb{R}$ حيث: $g(0,7)\simeq -0,37$ و $g(0,8)\simeq 0,06$

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.7<\alpha<0.8$.

ب-الاشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	--	0	+

II).1. النهايات:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

2. لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

بتوحيد المقامات للعبارة : $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

نجد: $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

ب-المستقيم المقارب مائل:

$$\lim_{x\to +\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}(x+1)\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{-3x}{2(2x^2)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-3}{4x}=0$$

اذن: المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته:

$$y=\frac{1}{2}(x+1)$$

ج- ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

$$f(x)-\frac{1}{2}(x+1)=\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

العبارة: $2(2x^2-2x+1)>0$ لأن مميزها : $\Delta=-16<0$

و بالتالي:

اشارة: $f(x)-\dfrac{1}{2}(x+1)$ من اشارة: $1-3x$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x)-y$	--	0	+
الوضعية	المنحنى (C_f) تحت (Δ)	↓ نقطة التقاطع $A(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$	المنحنى (C_f) فوق (Δ)

3. أ- من أجل كل من :

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{-3(2(2x^2-2x+1)-(1-3x)(8x-4)}{4(2x^2-2x+1)^2}$$

بتوحيد المقام نجد:

$$f'(x)=\frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{(2x^2-2x+1)^2}$$

أي: $$f'(x)=\frac{x.\left(2x^3-4x^2+7x-4\right)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

و منه: $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$

اشارة: $f'(x)$ من اشارة: $x.g(x)$ أي:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$x.g(x)$	--	0 --	0	+

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	--	0 --	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1 ↘	$f(\alpha)$ ↗	$+\infty$

4. حساب $f(1)$:

$f(1)=0$

ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

$f(x)=0$ يعني: $\dfrac{(x-1)(x^2+x-1)}{2x^2-2x+1}=0$ و بالتالي:

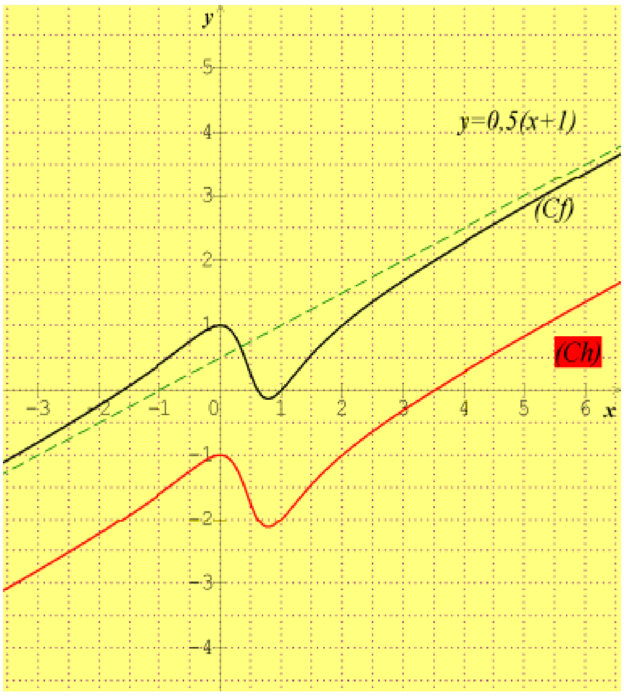
$(x+1)(x^2+x-1)=0$

و بالتالي: $x+1=0$ أو $x^2+x-1=0$.

اذن حلول المعادلة هي:

$x_0=1$ ، $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ و $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

5. أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).(نأخذ $f(\alpha)\approx -0,1$)



6. h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$h(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$.

أ- التحقق:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$ يعني:

$$h(x)+2=f(x)$$

$$h(x)+2=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}+2$$

أي: $$=\frac{x^3-4x^2+2x-1+2(2x^2-2x+1)}{2x^2-2x+1}$$

$$=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}=f(x)$$

و بالتالي:

$$h(x)+2=f(x)$$

ب- نستنتج أن:

(C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.

بكالوريا جوان 2017/ شعبة تقني رياضي / الموضوع الثاني

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=x^3+6x+12$$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

2. بين أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-1,48;-1,47[$ ، ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^3-6}{x^2+2}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ-احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ب-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{x.g(x)}{(x^2+2)^2}$.

ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2. أ-بين أن المستقيم ذو المعادلة: $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ).

3. بين أن: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4. أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

5. نرمز ب S الى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=\alpha$ ، $x=0$ و $y=0$.

أثبت أن من أجل كل $x\in[\alpha;0]$ ، $-3\le f(x)\le f(\alpha)$

ثم بين ان $\frac{3}{2}\alpha^2\le S\le -3\alpha$.

حل مقترح

I). g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3+6x+12$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$

لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$ حيث:

$g'(x)=3x^2+6$.

g دالة متزايدة تماما على لأن: $3x^2+6>0$.

2. g مستمرة و رتيبة تماما على $\mathbb{R}$ حيث: $g(-1,48)\simeq ?$ و $g(-1,47)\simeq ?$

اذن:

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha\in]-1,48;-1,47[$.

اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	--	0	+

II). f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^3-6}{x^2+2}$.

1. أ- النهايات:

$$\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^3-6}{x^2+2}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\mapsto+\infty}x=+\infty$$

و بالتالي: $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}x=-\infty$.

ب- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$ حيث:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+2)-2x(x^3-6)}{(x^2+2)^2}=\frac{3x^4+6x^2-2x^4+12x}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{x.(x^3+6x+12)}{(x^2+2)^2}$$

و بالتالي: $f'(x)=\frac{x.g(x)}{(x^2+2)^2}$

اشارة $f'(x)$ من اشارة $x.g(x)$ أي:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	--	0	+	

الدالة f متناقصة تماما على $[\alpha;0]$

و متزايدة تماما على $]-\infty;\alpha]\cup[0;+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	--	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

2. أ- المستقيم المقارب المائل:

بما أن :

$$\lim_{|x|\mapsto+\infty} f(x)-y=\lim_{|x|\mapsto+\infty}\frac{x^3-6}{x^2+2}-x=\lim_{|x|\mapsto+\infty}\frac{x^3-6-x(x^2+2)}{x^2+2}$$

$$=\lim_{|x|\mapsto+\infty}\frac{-6-2x}{x^2+2}=\lim_{|x|\mapsto+\infty}\frac{-2x}{x^2}=\lim_{|x|\mapsto+\infty}\frac{-2}{x}=0$$

لدينا: $\lim_{|x|\mapsto+\infty} f(x)-x=0$ و منه: المستقيم ذو المعادلة: $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب- وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ):

لدينا: $f(x)-y=\frac{-6-2}{(x^2+2)^2}$ اشارة الفرق من اشارة: $-6-2x$ أي:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	--	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	$(C_f)\cap(\Delta)=\{I(-3;-3)\}$	(C_f) تحت (Δ)	

3. تبيان أن: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$.

لدينا: $f(\alpha)=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}...(1)$ و من السؤال (I). 2) لدينا:

$g(\alpha)=0$

أي: $\alpha^3+6\alpha+12$ و بالتالي: $\alpha^3=-6\alpha-12$ و

$\alpha^2=-6-\frac{12}{\alpha}$

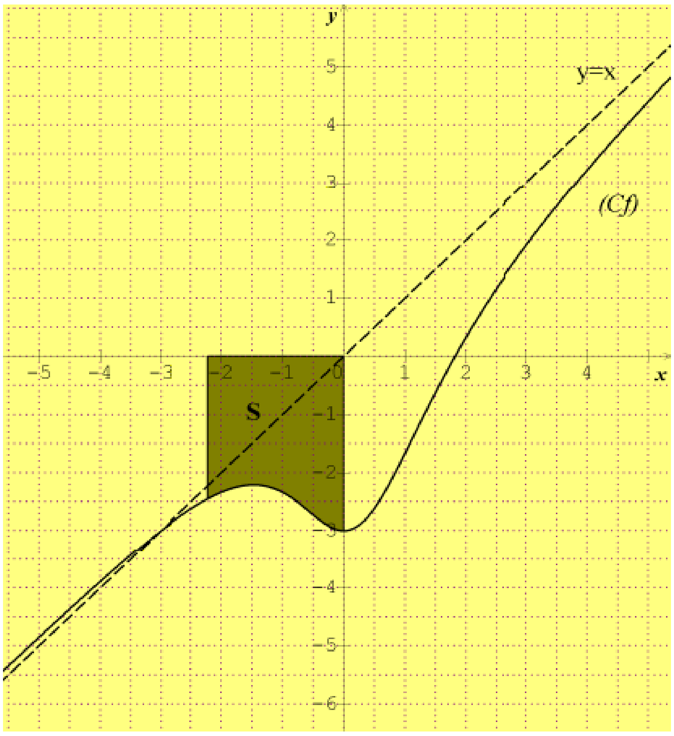
بالتعويض في (1) نجد: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا: $-1,48<\alpha<-1,47$ و بالتالي:

$-2,22<f(\alpha)<-2,21$.

4. أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f):



5. أثبت أن من أجل كل $x\in[\alpha;0]$ ، $-3\le f(x)\le f(\alpha)$

*من جدول التغيرات للدالة f نجد:

$\alpha\le x\le 0$ فان: $-3\le f(x)\le f(\alpha)$

*لدينا:

$$\int_0^\alpha -3dx\le\int_0^\alpha f(x)dx\le\int_0^\alpha f(\alpha)dx$$

S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=\alpha$ ، $x=0$ و $y=0$ و بما أن الدالة سالبة على المجال $\alpha\le x\le 0$ اذن

$$-\int_\alpha^0 f(\alpha)dx\le-\int_\alpha^0 f(x)dx\le-\int_\alpha^0 -3dx$$

أي: $-\int_\alpha^0\frac{3}{2}\alpha dx\le-\int_\alpha^0 f(x)dx\le-\int_\alpha^0 -3dx$

و منه: $-\int_\alpha^0\frac{3}{2}\alpha dx\le-\int_\alpha^0 f(x)dx\le-\int_\alpha^0 -3dx$

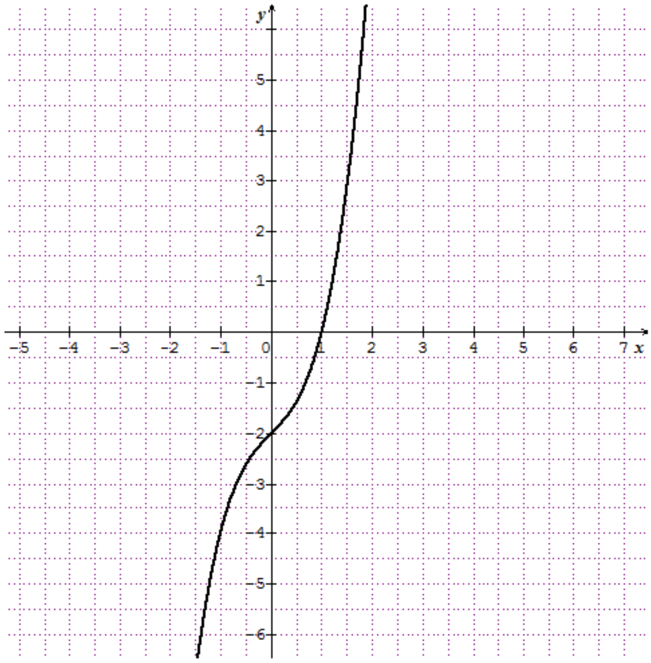
$$-\left[\frac{3}{2}\alpha x\right]_\alpha^0\le S\le-[-3x]_\alpha^0$$

و منه: $\frac{3}{2}\alpha^2\le S\le-3\alpha$

بكالوريا جوان 2019/ شعبة تسيير و اقتصاد / الموضوع الأول

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3+x-2$

و تمثيلها البياني كما هو مبيّن في الشكل :



بقراءة بيانية عيّن $g(1)$ و استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ :

$$f(x)=x-\frac{1-x}{x^2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

1) أ - أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب - أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانيا .

2) بيّن أنه من أجل كل x غير معدوم: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

- استنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

3) أ - بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب - أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

4) بيّن أن المعادلة $f(\alpha)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1,4;-1,3[$.

5) أرسم (Δ) ثم المنحنى (C_f) .

6) أحسب A مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=x$ ، $x=1$ و $x=3$.

حل مقترح

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3+x-2$

• $g(1)=0$.

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=x-\frac{x-1}{x^2}$

(1 أ -

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{x-1}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-x+1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty$$

.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x-1}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-x+1}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$$

ب -

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left(x-\frac{x-1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^3-x+1}{x^2}\right)=+\infty$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

2) تبيان أنه من أجل كل x غير معدوم: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل x غير معدوم :

$$f'(x)=1-\frac{1\times x^2-2x(x-1)}{(x^2)^2}$$
$$=1-\frac{x^2-2x^2+2x}{x^4}=1-\frac{-x^2+2x}{x^4}$$
$$=\frac{x^4+x^2-2x}{x^4}=\frac{x(x^3+x-2)}{x^4}$$
$$=\frac{g(x)}{x^3}$$

- إتجاه تغيّر الدالة f :

لندرس إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

من أجل $x \in]0;1[$ ، يكون $f'(x)<0$ و بالتالي الدالة متناقصة تماما على المجال $]0;1[$.

من أجل $x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ ، يكون $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة متزايدة تماما على كل من المجالين $]1;+\infty[$ و $]-\infty;0[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3- أ - تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

لدينا : $f(x)-y=f(x)-x=-\dfrac{x-1}{x^2}=\dfrac{-x+1}{x^2}$

و

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\left(\frac{-x+1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

و $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب - دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) :

$f(x)-x=-\dfrac{x-1}{x^2}=\dfrac{-x+1}{x^2}$ و بالتالي إشارة $f(x)-x$ من إشارة $-x+1$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

4-تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1,4;-1,3[$:

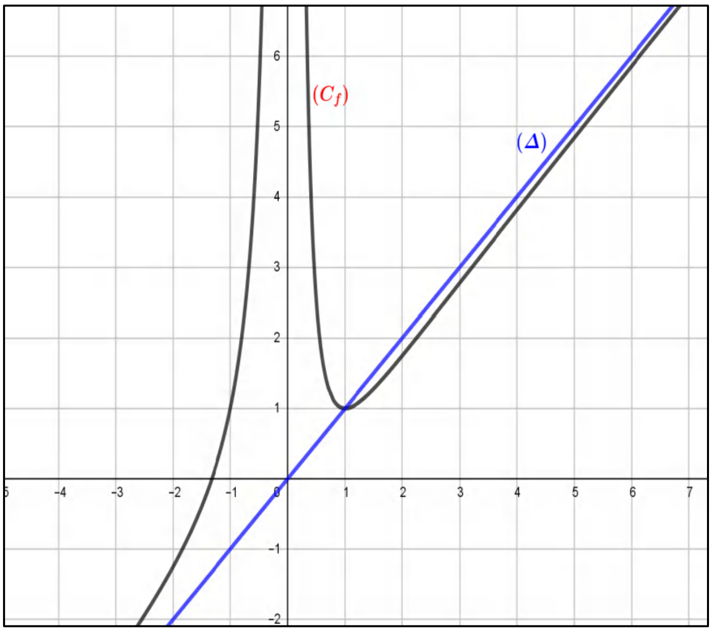
الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و

$]-1,4;-1,3[\subset]-\infty;0[$ و $\begin{cases} f(-1.4)=-0,17 \\ f(-1.3)=0,06 \end{cases}$

أي $f(-1,4)\times f(-1,3)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ، بحيث

$-1.4<\alpha<-1.3$

5-الرسم :



6-حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x=1$ ، $x=3$ و $y=x$.

$$A=\int_1^3 (x-f(x))dx$$

$$=\int_1^3\left(\frac{x-1}{x^2}\right)dx=\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\ln x+\frac{1}{x}\right]$$

$$=\left(\ln 3-\frac{2}{3}\right)u.a$$

بكالوريا جوان 2021/ شعبة علوم تجريبية / الموضوع الأول

الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+1}$ ،

(C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ-بين أن f دالة زوجية.

ب-احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و فسر النتيجتين هندسيا.

ج- أدرس وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1$.

2. أ-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\frac{10x}{(x^2+1)^2}$

ب-استنتج أن f متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أ-أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 2 .

ب-جد احداثيات نقطتي تقاطع (C) مع حامل محور الفواصل.

4. أرسم (T) ، (Δ) و (C).

5. الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x)=\frac{|x^2-4|}{x^2+1}$ ،

(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ-بين أن : من أجل كل x من $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ ، $g(x)=f(x)$.

و من أجل كل x من $[-2;2]$ ، $g(x)=-f(x)$

ب-شكل جدول تغيرات دالة g .

بكالوريا جوان 2021/ شعبة علوم تجريبية / الموضوع الثاني

الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\frac{x^2-x+4}{x^2+x+2}$

(C) ، تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

1. احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و فسر النتيجتين هندسيا.

2. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ نضع : $g(x)=f(x)-1$

أ- أدرس حسب قيم x اشارة $g(x)$.

ب- أدرس وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1$.

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=\frac{2(x+1)(x-3)}{(x^2+x+2)^2}$$

ب-بين أن f متزايدة تماما على كل من $]-\infty;-1]$ و $[3;+\infty[$ و متناقصة تماما على $[-1;3]$.

ج شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. أ- أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1.

ب- تحقق أن (T) يقطع (C) في النقطة $A\left(-2;\frac{5}{2}\right)$.

5. أرسم (T) ، (Δ) و (C).

6. h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $h(x)=\frac{x^2-|x|+4}{x^2+|x|+2}$.

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ-بين أن الدال h زوجية.

ب-تحقق أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $h(x)=f(x)$

ج-اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C) و أرسمه.

سيتم نشر حل التمرين لاحقا

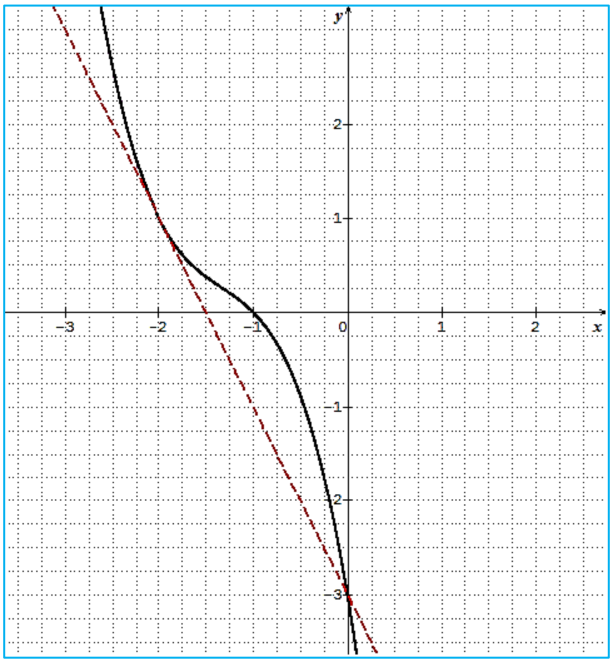
تقويم وحدة الدوال العددية

نص التمرين:

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=ax^3-4x^2-6x+b$

(C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (T) مماس للمنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة -2.

كما هو موضح في الشكل المقابل:



بقراءة بيانية :

1. احسب $g'(-2)$ ثم أكتب معادلة المماس (T).
2. شكل جدول تغيرات الدالة g.
3. عين اشارة $g(x)$.
4. عين العددين a و b.

II. لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}-\{-1\}$ على $f(x)=-2x-1-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب نهاية الدالة f عند -1 ثم فسر النتيجة بيانيا.
2. احسب نهايتي الدالة عند $-\infty$ و $+\infty$.
3. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f'(x)=\dfrac{2x.g(x)}{(x+1)^4}$.
4. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
5. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $-1{,}7\prec\beta\prec-1{,}6$.
6. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-2x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.
7. أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).
8. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $(x+1)^2+m+mx^2=-1-2mx$.

انتهى

هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ و التنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com

تجدون هذا الملف عبر مختلف منصات التواصل الاجتماعي للصفحة

5min Maths