نهاية بعض الدوال

نهاية دالة كثير حدود هي نهاية الحد الاكبر درجة بجوار $\pm\infty$

مثـــال

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x^3-3x^2-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x^3\right)=+\infty$$

نهاية دالة ناطقة هي نهاية أكبر حد في البسط على أكبر حد في المقام بجوار $\pm\infty$.

مثـــال

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3-3x^2-1}{x^3-3x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{x^3}\right)=2$$

نهاية مركب دالتين

$f(x)=goh(x)$ دالة مركبة من الدالتين g و h. $c;b;a$ أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$

إذا كانت: $\lim_{x\to a}h(x)=b$ و $\lim_{x\to b}g(x)=c$ فان: $\lim_{x\to a}f(x)=c$

مثـــال

حساب: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)$

نضع $f(x)=1+\sqrt{\frac{x-1}{x}}$ لاحظ أن: $f(x)=goh(x)$ مع: $g(x)=1+\sqrt{x}$ و $h(x)=\frac{x-1}{x}$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}h(x)=1$ و $\lim_{x\to1}g(x)=2$ ومنه: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)=2$

هناك حالات لايمكن حساب فيها النهاية مباشرة تسمى هذه الحالات بحالة عدم التعيين وهي اربع:

$\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};0\times\infty;+\infty-\infty$

الحالات: $\frac{0}{\infty}=0;\frac{\infty}{0}=\infty;(+\infty)\times(-\infty)=-\infty$ ليست حالات عدم التعيين

ولازالة حالات عدم التعيين نتبع احدى الطرق التالية : التحليل والاختزال او الضرب في المرافق أو الحصر العدد المشتق او العامل مشترك نتطرق لكل حالة في التمارين

التحضير الجيد لشهادة البكالوريا | السلسلة رقم 03 | المستوى: 3 ثانوي
اعداد الاستاذ: خليل طيب الشريف | النهايات | بكالوريا: 2021

النهايات والمستقيمات المقاربة

المستقيم المقارب الموازى لمحور الفواصل

اذا كانت: $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=b$ فان المستقيم ذو المعادلة : $y=b$ مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل

المستقيم المقارب الموازى لمحور التراتيب

اذا كانت: $\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$ فان المستقيم ذو المعادلة : $x=a$ مستقيم مقارب موازي لمحور التراتيب

المستقيم المقارب المائل

المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=ax+b$ يكون المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $\pm\infty$ اذا كانت: $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$

إذا كانت f دالة بحيث: $f(x)=ax+b+g(x)$ و كانت: $\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=0$

فان المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=ax+b$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $\pm\infty$.

الوضع النسبي

لدراسة وضعية المنحني (C_g) الممثل لدالة g بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta): y=ax+b$

نقوم بدراسة إشارة الفرق $g(x)-(ax+b)$

اذا كانت: $g(x)-(ax+b)>0$ فان: (C_g) يقع فوق (Δ)

اذا كانت: $g(x)-(ax+b)<0$ فان: (C_g) يقع اسفل (Δ)

النهايات بالمقارنة

f، g و h دوال و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}g(x)=l$ و $\lim_{x\to+\infty}h(x)=l$

وكانت: $g(x)\le f(x)\le h(x)$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$.

التمرين 01

احسب النهايات التالية ثم فسر النتائج هندسيا (بيانيا):

(1 $\lim_{x\to-1}\left(2x^3-3x^2+x+1\right)$ ، (2 $\lim_{x\to-\infty}\left(2x^3-3x^2+x+1\right)$; (3 $\lim_{x\to+\infty}\left(2x^3-3x^2+x+1\right)$

(4 $\lim_{x\to-1}\left(-2x^3-3x^2+x\right)$ (5 $\lim_{x\to-\infty}\left(-2x^3-3x^2+x+1\right)$; (6 $\lim_{x\to+\infty}\left(-2x^3-3x^2+x\right)$

(8 $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-x+2}{x^2+1}$ ، (9 $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+2}{x^2+1}$ ، (10 $\lim_{x\overset{<}{\to}1}\dfrac{x^2-x+3}{x-1}$ ، (11 $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\dfrac{x^2-x+3}{x-1}$.

(12 $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x^2-x-2}$ ، (13 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}$ ، (14 $\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{x^2-x+2}$ ،

(15 $\lim_{x\to-1^+}\sqrt{\dfrac{1-2x}{x+1}}$ ، (16 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x+3}}$ (17 $\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3+2x^2\right)\left(1-x\right)$

التمرين 02

احسب نهايات الدالة عند حدود مجموعة التعريف في كل حالة مما يلي:

(1 $f(x)=\dfrac{-3x+2}{-x+1}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

(2 $f(x)=\dfrac{-3x^2+2x+4}{x+3}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-3\}$

(3 $f(x)=\dfrac{2x+7}{(x-2)^4}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

(4 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x-3}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-3;1\}$

(5 $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

(1 $f(x)=4x+2-\dfrac{3}{x}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

التحضير الجيد لشهادة البكالوريا — السلسلة رقم 03 — المستوى: 3 ثانوي
اعداد الاستاذ: خليل طيب الشريف — ❁ النهايات ❁ — بكالوريا: 2021

التمرين 03

باستعمال الاختزال أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to2}\left(\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-3x+2}\right)$; $\lim_{x\to-1}\left(\dfrac{2x^2-4x-6}{x^2-4x-5}\right)$.

باستعمال المرافق أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)$; $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$; $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

باستعمال تعريف العدد المشتق أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to1}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}\right)$; $\lim_{x\to0}\left(\dfrac{\cos(x)-1}{x}\right)$; $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

باستعمال الحصر أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{\cos x}{x^2}\right)$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2+\sin x}\right)$

التمرين 04

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim_{x\overset{<}{\to}-1}f(x)$; $\lim_{x\overset{>}{\to}-1}f(x)$ فسر النتائج هندسيا.

2) عين الاعداد الحقيقية a;b;c;d بحيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x+1)^2}$

3) أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ فسر النتائج هندسيا.

4) بين أن المنحني (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ يطلب تعيين معادلة له

5) حدّد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى Δ .

الأسباب الخمسة للنجاح: التركيز، التميز، التنظيم، التطوير، والتصميم.

التمرين 05

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x)$; $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$; $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$; $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$ ثم فسر النتائج هندسيا.

2) عين الاعداد الحقيقية a;b;c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=ax+b+\dfrac{cx}{x^2-1}$

3) أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$; $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$ ثم فسر النتائج هندسيا.

4) ادر وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى $(\Delta): y=x+1$.

التمرين 06

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

2) أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ماذا تستنتج.

3) أحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. خمن وجود مستقيم مقارب مائل.

4) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $(\Delta): y=-2x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C).

5) بين أن $u(x)+2x>0$ ثم ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

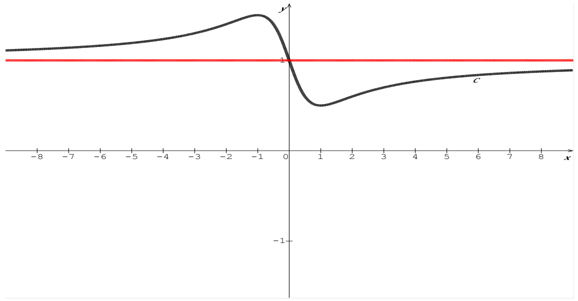
2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x)=g(x)$ ماذا تستنتج.

التحضير الجيد لشهادة البكالوريا — السلسلة رقم 03 — المستوى: 3 ثانوي
اعداد الاستاذ: خليل طيب الشريف — النهايات — بكالوريا: 2021

التمرين 07

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Δ) مستقيم معادلته : $y=1$.



بقراءة بيانية :

1) شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3) عين اشارة الدالة f .

4) اثبت ان النقطة $A(0;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C) .

التمرين 08

$\mathcal{C}_f$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

بقراءة بيانية:

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2) عين اشارة الدالة f' .

3) عين اشارة الدالة f .

4) عين وضعية $\mathcal{C}_f$ بالنسبة للمستقيم القارب المائل.

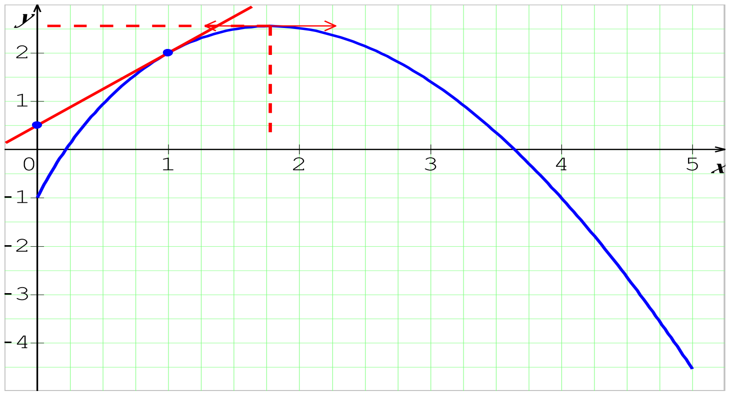
5) شكل جدول تغيرات الدالة f .

6) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

التحضير الجيد لشهادة البكالوريا — السلسلة رقم 03 — المستوى: 3 ثانوي
اعداد الاستاذ: خليل طيب الشريف — ✺ النهايات ✺ — بكالوريا: 2021

التمرين 09

الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$



المستقيمان المرسومان في الشكل هما المماسان للمنحنى عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 1 و $\frac{16}{9}$.

1) بقراءة بيانية عين $f(1)$ و $f'(1)$ و $f(0)$.

2) بقراءة بيانية عين: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) حل بيانيا في المجال $[0;+\infty[$ المتراجحات التالية (القيم المقروءة في التمثيل تعطى بالتقريب إلى 10^{-1})

أ) $f(x)\geq 0$ ، ب) $f'(x)\leq 0$ ،

5) نعتبر من اجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)=a+bx\left(2-\sqrt{x}\right)$ مع: a و b عددان حقيقيان.

أ - بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$: $f'(x)=b\left(2-\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$

ب- باستعمال قيم $f(1)$ و $f'(1)$ المحصل عليها في السؤال 1 عيّن a و b .

التمرين 10

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$. جدول تغيراتها كما يلي :

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

نفرض أنه من أجل كل $x>1$ ، $f(x)$ تكتب على الشكل $f(x)=ax+\frac{b}{x-c}$ ، a ، b و c أعداد حقيقية نريد تعيينها . نسمي (C_f) منحنى f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) عين نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة التعريف .

2) أثبت أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب. ثم استنتج قيمة c .

3) انطلاقا من عبارة $f(x)$ ، بين أن لدينا العلاقة $6a+b=5$.

4) انطلاقا من عبارة $f'(x)$ بين أن لدينا $4a-b=0$

5) استنتج عبارة $f(x)$ وبرهن أن المستقيم (D) ذي المعادلة $x-2y=0$ مقارب للمنحنى (C_f) .

6) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (D) .

7) أرسم (C_f) ومستقيميه المقاربين .

رحلة النجاح لا تتطلب البحث عن أرض جديدة ولكنها تتطلب الأهتمام بالنجاح والرغبة في تحقيقه والنظر إلى الأشياء بعيون جديدة.