# العبقري في الرياضيات

## الدوال العددية

### الثالثة ثانوي

الشعب: ● علوم تجريبية؛
● تقني رياضي؛
● رياضيات.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

# مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية)
# الملخص // الشعبة: علوم تجريبية؛ تقني رياضي.

## ملخص: حول الدّوال العددية// التحضير الجيد بكالوريا// الشعبة: علوم تج؛ تر.

### 1 المستقيمات المقاربة:

| المستقيم المقارب | النهاية | التفسير الهندسي |
| --- | --- | --- |
| ①العمودي | $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ | المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x=a}$ (المُوازي لمحور التراتيب) مقارب لـ$(C_f)$. |
| ②الأفقي | $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ | المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=b}$ (المُوازي لمحور الفواصل) مقارب لـ$(C_f)$ عند $\infty$. |
| ③المائل | $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ | المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=ax+b}$ مقارب مائل لـ$(C_f)$ عند $\infty$. |

**ملاحظة: إذا كان:** $\begin{cases} f(x)=ax+b+g(x) \\ \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0 \end{cases}$،

**فإنّ:** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=ax+b}$ مقارب **مائل** لـ$(C_f)$ عند $\infty$.

### 2 الدّالة الزوجية، والدّالة الفردية:

| الدّالة $f$ | معناه | ويكون |
| --- | --- | --- |
| ①الزوجية | **1)** $D_f$ **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر**<br>(**أي:** من أجل كل $x$ من $D_f$، **فإنّ** $-x$ من $D_f$)<br>**2)** $\boxed{f(-x)=f(x)}$. | منحناها **متناظر** بالنسبة إلى **محور التراتيب**. |
| ②الفردية | **1)** $D_f$ **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر**<br>(**أي:** من أجل كل $x$ من $D_f$، **فإنّ** $-x$ من $D_f$)<br>**2)** $\boxed{f(-x)=-f(x)}$ **أو** $\boxed{f(-x)+f(x)=0}$. | منحناها **متناظر** بالنسبة إلى **مبدأ المعلم**. |

### 3 مركز التناظر، ومحور التناظر:

| | |
| --- | --- |
| ①محور التناظر | المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x=\alpha}$ **محور تناظر** للمنحنى $(C_f)$، **معناه:**<br>$\boxed{f(2\alpha-x)=f(x)}$ **أو** $\boxed{f(\alpha-x)=f(\alpha+x)}$. |
| ②مركز التناظر | النقطة $\boxed{\omega(\alpha;\beta)}$ **مركز تناظر** للمنحنى $(C_f)$، **معناه:**<br>$\boxed{f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta}$ **أو** $\boxed{f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta}$. |

## 4 تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور التراتيب، ومع حامل محور الفواصل:

| | الطريقة | ونكتب |
|---|---|---|
| ① تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور التراتيب $(C_f)\cap(yy')$ | ▪ نحسب $\boxed{f(0)}$. | $(C_f)\cap(yy')=\{A(0;\dots)\}$ |
| ② تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل $(C_f)\cap(xx')$ | ▪ نحل المعادلة $\boxed{f(x)=0}$ في $D_f$. | $(C_f)\cap(xx')=\{A(\dots;0);B(\dots;0)\}$ |

## 5 المماس:

هناك سِتُّ (06) صيغ -تقريباً- لطرح سؤال المماس، لكن تبقى **معرفة فاصلة نقطة التّماس $x_0$ هي المفتاح للإجابة** على أي منها كما سنرى:

| الصيغة | الطــــــرح | كيفية الإجابة |
|---|---|---|
| **الصيغة الأولى (العادية)** | اكتب معادلة المماس للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$. | نكتب الدستور: $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$ حيث نعوض $x_0$ بقيمتها المُعطاة. |
| **الصيغة الثانية** | اكتب معادلة المماس للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الترتيب $y_0$. | نحلّ المعادلة $\boxed{f(x_0)=y_0}$، وعند تعيين قيمة $x_0$ نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية). |
| **الصيغة الثالثة** | بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى $(C_f)$ **ميله (أو معامل توجيهه)** يساوي $\alpha$. | نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0)=\alpha}$، وعند تعيين قيمة (أو قيم) $x_0$ نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية). **ملاحظة:** عدد الحلول يدلّ على عدد المماسات. |
| **الصيغة الرابعة** | بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى $(C_f)$ **يُوازي** المستقيم ذا المعادلة $y=\alpha x+\beta$. | نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0)=\alpha}$، عُدنا إلى الحالة الثانية. **ملاحظة:** مستقيمان متوازيان لهما نفس معامل التوجيه. |
| **الصيغة الخامسة** | بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى $(C_f)$ **يُعامد** المستقيم ذا المعادلة $y=\alpha x+\beta$. | نحلّ المعادلة $\boxed{\alpha\times f'(x_0)=-1}$. **ملاحظة:** مستقيمان متعامدان، جداء معاملي توجيههما يساوي $(-1)$. |
| **الصيغة السادسة** | بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى $(C_f)$ **يشمل** النقطة ذات الإحداثيين $(x_M;y_M)$. | نحلّ المعادلة $\boxed{y_M=f'(x_0)(x_M-x_0)+f(x_0)}$، وعند تعيين قيمة (أو قيم) $x_0$ نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية). |

## 6 وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta): ax+b$:

| الطريقة | إشارة الفرق | الوضعية النسبية |
|---|---|---|
| ندرس إشارة الفرق $f(x)-(ax+b)$ | ▪ $f(x)-(ax+b)>0$<br>▪ $f(x)-(ax+b)<0$<br>▪ $f(x)-(ax+b)=0$ | ▪ $(C_f)$ يقع **فوق** $(\Delta)$.<br>▪ $(C_f)$ يقع **تحت** $(\Delta)$.<br>▪ $(C_f)$ **يقطع** $(\Delta)$. |

## 7 النهايات:

### أ) حالات <<عدم التعيين>> (ح ع ت):

| توجد | الجمع | الجداء | حاصل القسمة | |
|---|---|---|---|---|
| أربع (04) أشكال | $(+\infty)+(-\infty)$ والعكس | $0\times\infty$ والعكس | $\frac{\infty}{\infty}$ | $\frac{0}{0}$ |

### ب) نهاية #دَالّة كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$:

- **النهاية** عند $+\infty$ وَعند $-\infty$ لدّالة كثير حدود هي **نهاية حدها الأعلى درجة** عند $+\infty$ $(-\infty)$.

| $f(x)=\boldsymbol{x^3}+x-2$ | $g(x)=x^2\boldsymbol{-2x^3}+1$ |
|---|---|
| $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(\boldsymbol{x^3})$ <br> $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\boldsymbol{x^3})$ | $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(\boldsymbol{-2x^3})$ <br> $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(\boldsymbol{-2x^3})$ |

### ج) نهاية #دَالّة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$:

- **النهاية** عند $+\infty$ وَعند $-\infty$ لدّالة ناطقة هي **نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة** عند $+\infty$ $(-\infty)$.
- **لحساب نهايات #دَالّة ناطقة** عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها؛ **نتذكّر أنّ:** $\boxed{\frac{l}{0}=\infty}$ **ويُحدّد** بدراسة إشارة **المقام** على اليمين واليسار **وحسب** مجموعة التعريف.

| المقام من الشكل/ حيث | $n$ فردي | $n$ زوجي |
|---|---|---|
| $x^n$ <br> $(n\in\mathbb{N}^*)$ | **إشارة** $x^n$ **من إشارة** $x$ <br> **النهاية عند 0** <br> $\lim_{x \underset{<}{\to} 0}\frac{\;}{x^n}$ $\left(\frac{l}{0^-}\right)$ وَ $\lim_{x \underset{>}{\to} 0}\frac{\;}{x^n}$ $\left(\frac{l}{0^+}\right)$ | **إشارة** $x^n$ **موجب** $(x^n\geq 0)$ <br> **النهاية عند 0** <br> $\lim_{x\to 0}\frac{\;}{x^n}$ $\left(\frac{l}{0^+}\right)$ |
| $(ax+b)^n$ <br> $(n\in\mathbb{N}^*)$ | **إشارة** $(ax+b)^n$ **من إشارة** $(ax+b)$ <br> **النهاية عند** $-\frac{b}{a}$: <br> $\lim_{x \underset{<}{\to} -\frac{b}{a}}\frac{\;}{(ax+b)^n}$ $\left(\frac{l}{0_{\text{عكس إشارة } a}}\right)$ <br> $\lim_{x \underset{>}{\to} -\frac{b}{a}}\frac{\;}{(ax+b)^n}$ $\left(\frac{l}{0_{\text{عكس إشارة } a}}\right)$ وَ | **إشارة** $(ax+b)^n$ **موجب** $(ax+b)^n\geq 0$ <br> **النهاية عند** $-\frac{b}{a}$: <br> $\lim_{x\to-\frac{b}{a}}\frac{\;}{(ax+b)^n}$ $\left(\frac{l}{0^+}\right)$ |
| $ax^2+bx+c$ | **ندرس إشارة** $ax^2+bx+c$ **باستعمال المميز** $\Delta=b^2-4ac$ | |

### ج) إشارة $ax+b$ $(a\neq 0)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax+b$ | | **عكس** إشارة $a$ | 0 | **مثل** إشارة $a$ | |

ج) إشارة $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$:

| المميز $\Delta=b^2-4ac$ | حلول المعادلة $P(x)=0$ في $\mathbb{R}$ | إشارة $P(x)$ | تحليل $P(x)$ |
|---|---|---|---|
| $\Delta<0$ | $S=\emptyset$ | $x$: $-\infty$ … $+\infty$ <br> $P(x)$: مثل إشارة $a$ | لا يُمكن تحليل $P(x)$ |
| $\Delta=0$ | $S=\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$ | $x$: $-\infty$ , $-\dfrac{b}{2a}$ , $+\infty$ <br> $P(x)$: مثل إشارة $a$ ○ مثل إشارة $a$ | $P(x)=a(x-x_0)^2$ <br> $\left(x_0=-\dfrac{b}{2a}\right)$ |
| $\Delta>0$ | $S=\{x_1;x_2\}$ <br> **حيث:** <br> $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ <br> $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ | $x$: $-\infty$ , $x_1$ , $x_2$ , $+\infty$ <br> $P(x)$: مثل إشارة $a$ ○ عكس إشارة $a$ ○ مثل إشارة $a$ <br> **(نفرض أنّ $x_1<x_2$)** | $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ |

## 8 الإشتقاقية:

### أ. مشتقات دوال مألوفة:

| $f(x)=$ | $f'(x)=$ | مجالات قابلية الاشتقاق |
|---|---|---|
| $(k\in\mathbb{R})$ $k$ | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x$ | $1$ | $\mathbb{R}$ |
| $(n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N})$ $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$ |
| $(n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N})$ $\dfrac{1}{x^n}$ | $-\dfrac{n}{x^{n+1}}$ | $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0;+\infty[$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ |

### ب. المشتقات والعمليات على الدوال:

$u$ و $v$ دالّتان **قابلتان للاشتقاق** على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و $k$ عدد حقيقي.

| الدّالة | $u+v$ | $ku$ | $uv$ | $\dfrac{1}{v}$ | $\dfrac{u}{v}$ ( الدّالة $v$ **لا تنعدم** على $I$ ) |
|---|---|---|---|---|---|
| المشتقة | $u'+v'$ | $ku'$ | $u'v+v'u$ | $\dfrac{-v'}{v}$ | $\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ |

**نتائج:**

- الدّوال **كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$.
- الدّوال **الناطقة قابلة للاشتقاق** على **كل مجال** محتوى **في مجموعة تعريفها**.

### ج. اللاشتقاقية واللاستمرارية:

إذا كانت $f$ **قابلة للاشتقاق** على مجال $I$، فإنّها **مستمرة** على هذا المجال **وعكس هذه الخاصية ليس صحيح**.

### إشتقاق دالة مركبة:

أ. مشتقة الدّالة $v \circ u$: $\boxed{(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]}$

ب. تطبيقات:

مشتقة الدّالة $x \mapsto u(ax+b)$ ( $a \neq 0$ )

| | |
|---|---|
| $f(x) = u(ax+b)$ | $f'(x) = au'(ax+b)$ |

مشتقة الدّالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

| | |
|---|---|
| $f(x) = \sqrt{u(x)}$ | $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ |

مشتقة الدّالة $x \mapsto [u(x)]^n$ ( $n$ عدد طبيعي يحقق $n \geq 2$ )

| | |
|---|---|
| $f(x) = [u(x)]^n$ | $f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$ |

مشتقة الدّالة $x \mapsto \dfrac{1}{[u(x)]^n}$ ( $n$ عدد طبيعي يحقق $n \geq 1$ )

| | |
|---|---|
| $f(x) = \dfrac{1}{[u(x)]^n}$ | $f'(x) = \dfrac{-nu'(x)}{[u(x)]^{n+1}}$ |

## 9 الإستمرارية:

$f$ دّالة **معرّفة** على مجال $I$ من $\mathbb{R}$، إذا كانت $f$ **مستمرة على $I$** فإنّ **تفسيرها البياني (أو الهندسي)** هو: أنّه **يُمكن رسم منحناها البياني على $I$ دون رفع القلم (اليد).**

**نتائـــــج:**

- الدّوال المرجعية **مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- الدّوال كثيرات الحدود؛ "$cos$" و"$sin$" هي دّوال **مستمرة على** $\mathbb{R}$.
- الدّوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) هي دّوال **مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- مجموع؛ جداء وتركيب دّوال **مستمرة هي دّوال مستمرة**.

**مبرهنة القيم المتوسطة:**

| مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان) | التفسير البياني (أو الهندسي) "لمبرهنة القيم المتوسطة" |
|---|---|
| ▪ **الحالة العامة** ($k \in \mathbb{R}$)<br>إذا كانت $f$ دّالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$، من أجل كل عدد حقيقي $k$ **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$،<br>فــإنّ: المعادلة $f(x) = k$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$. | المنحنى $(C_f)$ **يقطع** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=k}$ **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$. |
| ▪ **الحالة الخاصة** ($k = 0$)<br>إذا كانت $f$ دّالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$،<br>وكان 0 **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، أيّ: $f(a) \times f(b) < 0$<br>فــإنّ: المعادلة $f(x) = 0$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$. | المنحنى $(C_f)$ **يقطع** حامل محور الفواصل **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$. |
| **وحدانية الحل** | |
| ▪ **الحالة العامة** ($k \in \mathbb{R}$)<br>إذا كانت $f$ دّالة **معرّفة ومستمرة ورتيبة تماما** على المجال $[a;b]$،<br>من أجل كل عدد حقيقي $k$ **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$،<br>فــإنّ: المعادلة $f(x) = k$ **تقبل حلا وحيدا $\alpha$** في المجال $[a;b]$. | المنحنى $(C_f)$ **يقطع** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=k}$ **في نقطة واحدة فاصلتها $\alpha$** في المجال $[a;b]$. |

| | |
|---|---|
| ▪ **الحالة الخاصة** $(k=0)$<br>إذا كانت $f$ دّالة **معرّفة ومستمرة ورتيبة تماما** على المجال $[a;b]$، وكان 0 **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، أي: $f(a)\times f(b)<0$<br>فــإنّ: المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** $\alpha$ في المجال $[a;b]$. | المنحنى $(C_f)$ **يقطع** حامل محور الفواصل **في نقطة واحدة فاصلتها** $\alpha$ في المجال $[a;b]$. |

**طُرق اثبات "وُجود" حلول معادلة في مجال** $[a;b]$ **باستعمال "مبرهنة القيم المتوسطة"**

| **الحالة العامة** $(k\in\mathbb{R})$ | **الحالة الخاصة** $(k=0)$ |
|---|---|
| **1/**نكتب المعادلة من الشكل $f(x)=k$ **(إن لم تُعطى لنا)**<br>**2/نتحقّق من استمرارية** الدّالة $f$ على المجال $[a;b]$.<br>**3/نتحقّق** من أنّ $k$ **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، وذلك **بعد** حسابهما. | **1/**نكتب المعادلة من الشكل $f(x)=0$ **(إن لم تُعطى لنا)**<br>**2/نتحقّق من استمرارية** الدّالة $f$ على المجال $[a;b]$.<br>**3/نتحقّق** من أنّ $\boxed{f(a)\times f(b)<0}$، وذلك **بعد** حسابهما. |

**ملاحظة:** تقبل المبرهنات السابقة عدة **تمديدات** في حالة الدّالة $f$ **مستمرة** و**رتيبة تماماً** على مجال **مفتوح** أو **مفتوح من إحدى الجهتين، محدود** أو **غير محدود**. (في حالة المجال مفتوح نستعمل النهايات)

## 10 المناقشة البيانية:

المعادلة من الشكل $f(x)=m$، $m$ وسيط حقيقي. ← **المناقشة أفقية** مُوازية لمحور الفواصل.

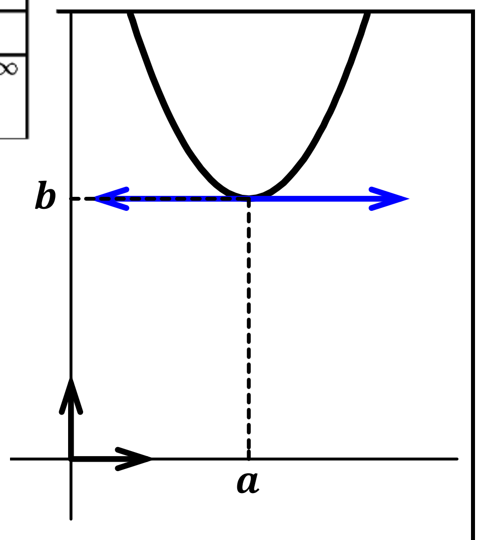
المعادلة من الشكل $f(x)=ax+\boxed{m}$، $m$ وسيط حقيقي. ← **المناقشة مائلة** مُوازية للمستقيم ذو المعادلة $y=ax+\boxed{b}$.

المعادلة من الشكل $f(x)=mx+b$، $m$ وسيط حقيقي. ← **المناقشة دورانية** حول النقطة $A(0;b)$.

المعادلة من الشكل $f(x)=f(m)$، $m$ وسيط حقيقي. ← **المناقشة أفقية** مُوازية لمحور الفواصل.

## 11 إضافات:

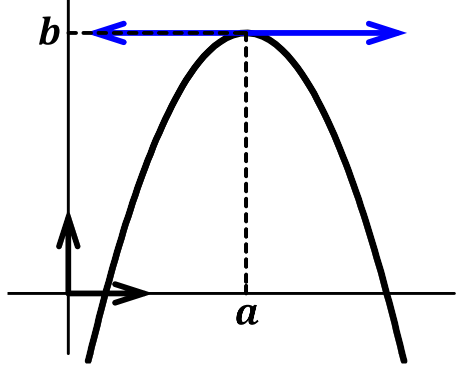
| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(a)$ | ↗ | $+\infty$ |




(الشكل 01)

$$\begin{cases} f(a)=b \\ f'(a)=0 \end{cases}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(a)$ | ↘ | $-\infty$ |




(الشكل 02)

## 12 استنتاج تمثيل بياني من آخر:

بعد إنشاء $(C_f)$، قد يُطلب منّا أنْ **نستنتج منحنياً آخر** $(C_h)$ **-مثلاً- لدّالة** $h$؛ ويكون الاستنتاج حسب صيغة السؤال كما سيأتي:

| الصيغة | الطـــــــــرح | كيفية الإجابة |
| --- | --- | --- |
| **الصيغة الأولى** | استنتج $(C_h)$ منحنى الدّالة $h$ **حيث:** $\boxed{h(x) = \lvert f(x)\rvert}$. | ▪ **على المجالات** التي تكون فيها $\boxed{f(x) \geq 0}$ (أي يكون فيها $(C_f)$ على محور الفواصل أو فوقه) نحصل على $h(x) = f(x)$؛ ومنه $(C_h)$ **ينطبق على** $(C_f)$.<br>▪ **على المجالات** التي تكون فيها $\boxed{f(x) \leq 0}$ (أي يكون فيها $(C_f)$ على محور الفواصل أو تحته) نحصل على $h(x) = -f(x)$؛ ومنه يكون $(C_h)$ **نظير** $(C_f)$ **بالنسبة إلى محور الفواصل.** |
| **الصيغة الثانية** | استنتج $(C_h)$ منحنى الدّالة $h$ **حيث:** $\boxed{h(x) = f(\lvert x\rvert)}$.<br>**ملاحظة:** عادةً ما يُطلب منّا أوّلا أن نُثبت أنّ $h$ **زوجية.** | ▪ إذا كان $x \geq 0$ و $x \in D_f$ أي $\boxed{x \in D_f \cap [0; +\infty[}$ ($x$ ينتمي إلى الجزء الموجب من $D_f$) نحصل على $h(x) = f(x)$؛ ومنه $(C_h)$ **ينطبق على** $(C_f)$.<br>▪ نُكمل الجزء المتبقي من $(C_h)$ **بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب** لأنّ $h$ **زوجية.** |
| **الصيغة الثالثة** | استنتج $(C_h)$ منحنى الدّالة $h$ حيث: $\boxed{h(x) = f(-\lvert x\rvert)}$.<br>**ملاحظة:** عادةً ما يُطلب منّا أوّلا أن نُثبت أنّ $h$ **زوجية.** | ▪ إذا كان $x \leq 0$ و $x \in D_f$ أي $\boxed{x \in D_f \cap ]-\infty; 0]}$ ($x$ ينتمي إلى الجزء السالب من $D_f$) نحصل على $h(x) = f(x)$؛ ومنه $(C_h)$ **ينطبق على** $(C_f)$.<br>▪ نُكمل الجزء المتبقي من $(C_h)$ **بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب** لأنّ $h$ **زوجية.** |
| **الصيغة الرابعة** | استنتج $(C_h)$ منحنى الدّالة $h$ حيث: $\boxed{h(x) = -f(x)}$. | ▪ $(C_h)$ **هو نظير** $(C_f)$ **بالنسبة إلى محور الفواصل.** |
| **الصيغة الخامسة** | استنتج $(C_h)$ منحنى الدّالة $h$ حيث: $\boxed{h(x) = f(-x)}$. | ▪ $(C_h)$ **هو نظير** $(C_f)$ **بالنسبة إلى محور التراتيب.** |
| **الصيغة السادسة** | استنتج $(C_h)$ منحنى الدّالة $h$ حيث: $h(x) = -f(-x)$. | ▪ $(C_h)$ **هو نظير** $(C_f)$ **بالنسبة إلى مبدأ المعلم.** |
| **الصيغة السابعة** | استنتج $(C_h)$ منحنى الدّالة $h$ التي تحقق: $\boxed{h(x) = f(x+b) + k}$. | ▪ نستنتج $(C_h)$ من $(C_f)$ **بالانسحاب ذي الشعاع** $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\k\end{pmatrix}$.<br>(أي $(C_h)$ **صورة** $(C_f)$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\k\end{pmatrix}$) |
| **الصيغة الثامنة** | استنتج $(C_h)$ منحنى الدّالة $h$ التي تحقق: $\boxed{h(x) = f(x) + k}$. | ▪ هذه الصيغة هي الصيغة السابعة في حالة $\boxed{b = 0}$.<br>▪ $(C_h)$ **صورة** $(C_f)$ بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$. |
| **الصيغة التاسعة** | استنتج $(C_h)$ منحنى الدّالة $h$ التي تحقق: $\boxed{h(x) = f(x+b)}$. | ▪ هذه الصيغة هي الصيغة السابعة في حالة $\boxed{k = 0}$.<br>▪ $(C_h)$ **صورة** $(C_f)$ بالانسحاب الذي شعاعه $-b\vec{i}$. |

| | | |
|---|---|---|
| **الصيغة العاشرة** | استنتج $(C_h)$ منحنى الدّالة $h$ التي تحقق: $\boxed{h(x)=kf(x)}$؛ $k\in\mathbb{R}^*$. | ▪ نحصل على نقطة من $(C_h)$ ذات الفاصلة $x$ بضرب ترتيب النقطة $M$ في العدد $k$؛ حيث $M$ نقطة من $(C_f)$ فاصلتها $x$. |

## 13 قابلية إشتقاق دّالة عند عدد حقيقي: (العدد المشتق)

تكون $f$ **قابلة للاشتقاق** عند $x_0$ إذا وفقط إذا كانت $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h}=l}$ أو $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0}=l}$،
حيث $\boxed{f'(x_0)=l\in\mathbb{R}}$ يسمى **العدد المشتق للدّالة $f$ عند $x_0$**. وتفسيرها البياني (أو الهندسي) هو: المنحنى $(C_f)$ يقبل **مماس** عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ **معامل توجيهه** $\boxed{f'(x_0)}$، ومعادلته من الشكل:

$$\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$$

مخطط توضيحي (خريطة ذهنية)

**$f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0$**

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h}=l}$$

**معنـــــــــــــاه**

أو

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0}=l}$$

**$l$ يسمى العدد المشتق للدّالة $f$ عند $x_0$**، ونرمز له بالرمز $f'(x_0)$.

**نكتب:**

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)}$$

### التفسير الهندسي للعدد المشتق:

يُمثل بيانيا (أو هندسيا) **معامل توجيه مماس المنحنى** $(C_f)$ **عند النقطة** $A(x_0;y_0)$، حيث $y_0=f(x_0)$.
**بصيغة أخرى:** يُمثل بيانيا (أو هندسيا) **معامل توجيه مماس المنحنى** $(C_f)$ **عند النقطة ذات الفاصلة** $x_0$.

### القراءة البيانية للعدد المشتق:

**يُمكن إيجاده بيانيا** بأخذ نقطتين A و B من هذا المماس معلومتين الإحداثيات فنجد: $\boxed{f'(x_0)=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}}$.

إذا كان المماس للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ **مُوازيا لمحور الفواصل** فإنّ **معامل توجيهه معدوم** أي $f'(x_0)=0$ وتكون معادلته من الشكل $y=f(x_0)$.

## 14 نقطة زاوية:

إذا كان: $\boxed{\lim\limits_{\substack{< \\ h\to 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_1}$ وَ $\boxed{\lim\limits_{\substack{> \\ h\to 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_2}$، حيث $l_1$ و $l_2$ **عددان حقيقيان**.

فإنّ $f$ **قابلة للاشتقاق عند $x_0$ من اليسار** وعددّها المشتق هو $f'_g(x_0) = l_1$.

و $f$ **قابلة للاشتقاق عند $x_0$ من اليمين** وعددّها المشتق هو $f'_d(x_0) = l_2$.

**في حالة $(l_1 \neq l_2)$**، نقول أنّ $f$ **غير قابلة للاشتقاق عند $x_0$**.

ويكون **التفسير الهندسي** هو أنّ النقطة ذات الفاصلة $x_0$: **نقطة زاوية** للمنحنى $(C_f)$.

**ملاحظة 01**: قد تُكتب النهايتان السابقتان على الشكل التالي: $\boxed{\lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1}$ وَ $\boxed{\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2}$

**ملاحظة 02**: المنحنى $(C_f)$ يقبل **نصفي مماسين** عند **نقطة الزاوية** معادلاتهما:

$$\boxed{\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}} \text{ وَ } \boxed{\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}}.$$

**تنبيه**: تبقى **النقطة الزاوية موجودة** حتى لو كانت **إحدى النهايتين السابقتين عدداً حقيقياً** والأخرى $\infty$.

## 15 نقطة الإنعطاف:

بصفة عامة، لتعيين **نقطة الانعطاف**؛ نقوم بما يلي:

- **نحسب المشتق الثاني $f''(x)$، وندرس إشارته**، فإذا وجدنا $f''(x)$ **انعدم** عند قيمة $x_0$ من $D_f$، **مُغيّراً إشارته**، تكون النقطة ذات الفاصلة $x_0$ **نقطة انعطاف** لـ$(C_f)$؛ أي: $\boxed{E(x_0; f(x_0))}$.

- **حالة خاصة**:

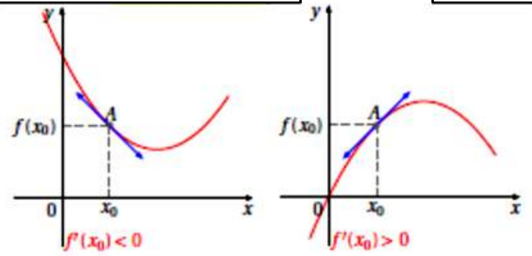
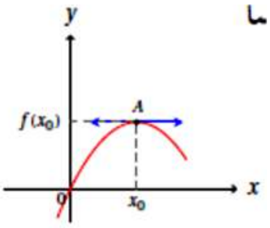
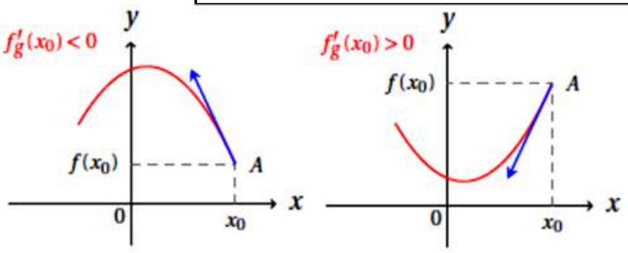
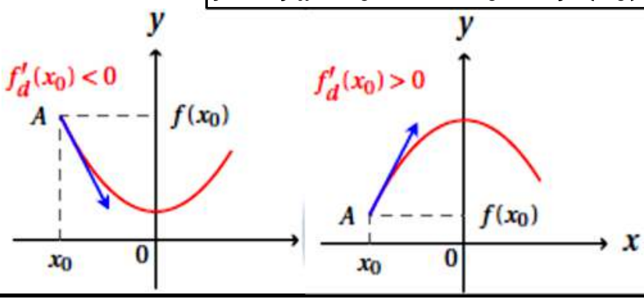
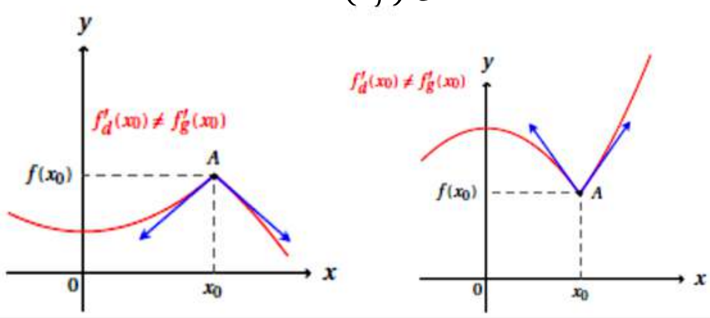
في بعض الحالات، يُمكن تعيين **نقطة الانعطاف** دون اللجوء إلى المشتق الثاني $f''(x)$، وذلك إذا **انعدم المشتق الأوّل** $f'(x)$ عند قيمة $x_0$ من $D_f$، **ولم يُغيّر إشارته**، فتكون النقطة ذات الفاصلة $x_0$ **نقطة انعطاف** لـ$(C_f)$؛ أي: $\boxed{E(x_0; f(x_0))}$.

- **ملاحظة**:

في بعض الحالات، يُفرض علينا سياق التمرين أن نُعيين **نقطة الانعطاف** بالكيفية التالية:

يُطلب منّا أن **ندرس وضعية المنحنى** $(C_f)$ **بالنسبة إلى المماس** عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$، فإذا وجدنا أنّ $(C_f)$ **غيّر وضعيته بالنسبة إلى المماس (قبل وبعد نقطة التماس)** نستنتج أنّ النقطة ذات الفاصلة $x_0$ **نقطة انعطاف** لـ$(C_f)$؛ أي: $\boxed{E(x_0; f(x_0))}$.

## 16 بعض التفسيرات الهندسية للاشتقاقية:

| النهاية | الاستنتاج | التفسير البياني (أو الهندسي) |
|---|---|---|
| $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$<br>**أو**<br>$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$ | الدّالة $f$ **قابلة للاشتقاق** عند $x_0$، وعددها المشتق هو $\boxed{f'(x_0)=l}$. | المنحنى $(C_f)$ **يقبل مماس** عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$، **معامل توجيهه (ميله)** $\boxed{f'(x_0)=l}$، و**معادلته:** $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$.<br><br> |
| $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$<br>**أو**<br>$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$ | الدّالة $f$ **قابلة للاشتقاق** عند $x_0$، وعددها المشتق هو $\boxed{f'(x_0)=0}$. | المنحنى $(C_f)$ **يقبل مماس (مُوازي لمحور الفواصل)** عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$، **معامل توجيهه (ميله)** $\boxed{f'(x_0)=0}$ و**معادلته:** $\boxed{y=f(x_0)}$.<br><br> |
| $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_1$<br>**أو**<br>$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_1$ | الدّالة $f$ **قابلة للاشتقاق** عند $x_0$، على اليسار وعددها المشتق هو $\boxed{f_g'(x_0)=l_1}$. | المنحنى $(C_f)$ **يقبل نصف مماس** عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$، **معادلته:** $\boxed{y=f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$.<br><br> |
| $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_2$<br>**أو**<br>$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_2$ | الدّالة $f$ **قابلة للاشتقاق** عند $x_0$، على اليمين وعددها المشتق هو $\boxed{f_d'(x_0)=l_2}$. | المنحنى $(C_f)$ **يقبل نصف مماس** عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$، **معادلته:** $\boxed{y=f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$.<br><br> |
| $l_1 \neq l_2$ | الدّالة $f$ **غير قابلة للاشتقاق** عند $x_0$. | المنحنى $(C_f)$ **يقبل نصفي مماسين** عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$، تسمى هذه النقطة: **نقطة زاوية للمنحنى** $(C_f)$.<br><br> |

# مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

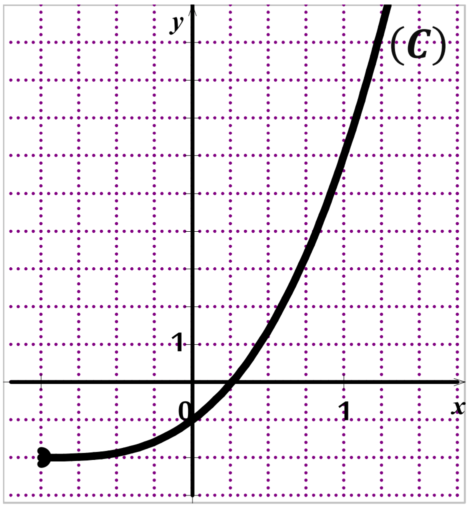
## التمارين// الشعبة: علوم تجريبية.

### التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: علوم تجريبية.

المنحنى $(C)$ المقابل هو التمثيل البياني للدّالة العددية $g$ المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي:

$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$.

1-أ) بقراءة بيانية شكّل جدول تغيّرات الدّالة $g$ وحدّد $g(0)$ وَإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.




ب) علّل وجود عدد حقيقي $\alpha$ من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يُحقق: $g(\alpha)=0$.

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2- $f$ هي الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي:

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

وليكن $(\Gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ) تحقّق أنّه من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

حيث $f'$ هي الدّالة المشتقة للدّالة $f$.

ب) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

ج) احسب: $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ وفسّر النتيجتين بيانيا.

د) شكّل جدول تغيرات الدّالة $f$.

3-نأخذ $\alpha\simeq 0{,}26$

أ) عين مُدور $f(\alpha)$ إلى $10^{-2}$.

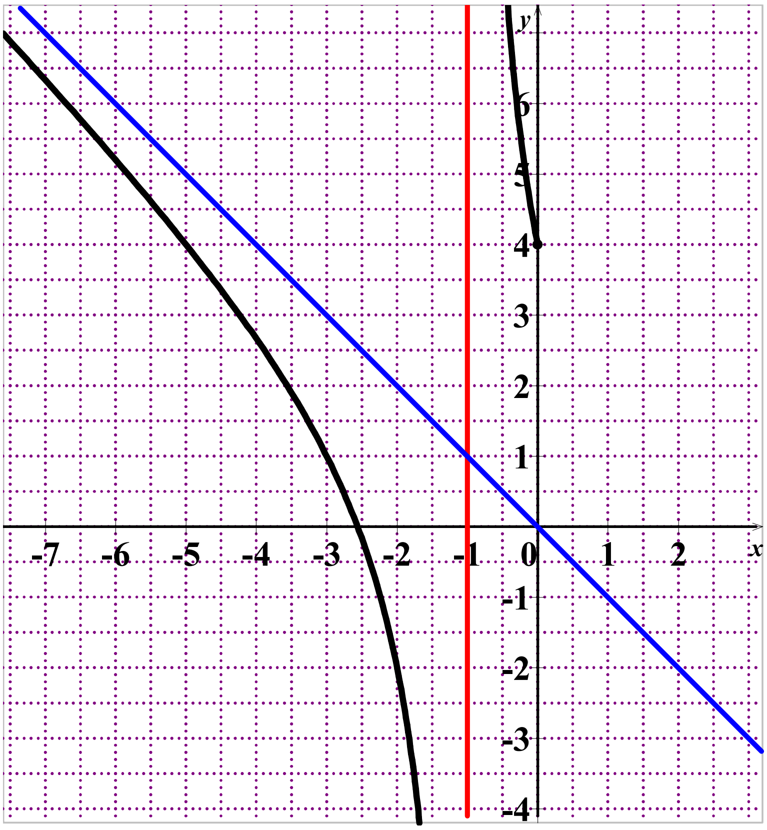
ب) أرسم المنحنى $(\Gamma)$.

4-أ) أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}$، حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان.

ب) عيّن $F$ الدّالة الأصلية للدّالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تُحقق: $F(1)=2$.

## التمرين 02: (07,5 نقطة) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: علوم تجريبية.

I) $f$ دّالة معرّفة على $I = ]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بِـ: $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$




$(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مُبين في الشكل.

1)أ) أُحسب نهايات $f$ عند الحدود المفتوحة لـ $I$.

ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات $f$ شكّل جدول تغيراتها.

2) $g$ دّالة معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي:

$.g(x) = x + \frac{4}{x+1}$

$(C_g)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

أ) أحسب نهاية $g$ عند $+\infty$.

ب) تحقّق من أنّ $(C_g)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ عند $+\infty$ يُطلب تعيين معادلة له.

جـ) أُدرس تغيرات $g$.

II) $k$ دّالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$$

1)أ) أُحسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{k(h)-k(0)}{h}$، $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}} \frac{k(h)-k(0)}{h}$ ماذا تستنتج؟

ب) أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.

2)أُكتب معادلتي المماسين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

3)أُرسم $(\Delta_1)$، $(\Delta_2)$ و $(C_k)$.

4)أحسب مساحة الحيز المستوي المُحدد بالمنحنى $(C_k)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$، $x = \frac{1}{2}$ وَ $x = -\frac{1}{2}$.

## التمرين 03: (07 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 02// الشعبة: علوم تجريبية.

I)-لتكن $g$ الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$.

1)أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $g$ على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2)أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث $0,7 < \alpha < 0,8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$.

II)-نعتبر الدّالة العددية $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$.

ب) استنتج أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يُطلب تعيين معادلة له.

جـ) ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ و $(\Delta)$.

3)أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ حيث $f'$ مشتقة الدّالة $f$.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم $x$ ثم شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$. (نأخذ $f(\alpha) \simeq -0{,}1$)

4)احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

5)أنشئ المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$.

6)لتكن $h$ الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = \frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$.

و $(C_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) تحقّق أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - 2$.

ب) استنتج أنّ $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه، ثم أنشئ $(C_h)$.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

الحلول // الشعبة: علوم تجريبية.

## حل التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: علوم تجريبية.

لدينا: المنحنى $(C)$ هو التمثيل البياني للدّالة العددية $g$ المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي،

$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$.

**1-أ) بقراءة بيانية:**

**تشكيل جدول تغيّرات الدّالة $g$؛ وتحديد $g(0)$ وَإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$:**

| $x$ | $-1$        $0$   $\alpha$   $\frac{1}{2}$        $+\infty$ |
|---|---|
| $g(x)$ | $-2$ ↗ (- - -) ○ (+ + +) ↗ $+\infty$ |

$\boxed{g(0)=-1}$ وَ $\boxed{g\left(\frac{1}{2}\right)>0}$.

**ب) تعليل وجود عدد حقيقي $\alpha$ من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يُحقق، $g(\alpha)=0$:**

- $g$ **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ (لأنّها **متزايدة تماما** على المجال $]-1;+\infty[$ )
- ولدينا: $\begin{cases} g(0)=-1 \\ g\left(\frac{1}{2}\right)>0 \end{cases}$، أي: $g(0)\times g\left(\frac{1}{2}\right)<0$

إذن: **حسب مبرهنة القيم المتوسطة،** يوجد عدد حقيقي $\alpha$ من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يُحقق، $g(\alpha)=0$.

**ج) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$ :**

نُلخص إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$ في الجدول التالي:

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |

2-لدينا: $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$؛ وَ $D_f=]-1;+\infty[$؛ $(\Gamma)$ التمثيل البياني لـ$f$ في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**أ) التحقق أنّه من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$ :**

$f$ **معرّفة وقابلة للاشتقاق** على المجال $]-1;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2-2(1)(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{[(x+1)^2]^2}$$

$$=\frac{(x+1)[(3x^2+6x+3)(x+1)-2(x^3+3x^2+3x+2)]}{(x+1)(x+1)^3}$$

$$=\frac{3x^3+6x^2+3x+3x^2+6x+3-2x^3-6x^2-6x-4}{(x+1)^3}=\frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3}=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

**ب) تعيين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وتفسير النتيجة بيانيا:**

لدينا: $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3}=\frac{0}{(\alpha+1)^3}=0$،

التفسير البياني: المنحنى $(\Gamma)$ يقبل عند النقطة ذات الفاصلة $\alpha$؛ **مماساً معامل توجهيه معدوم أي: يوازي حامل محور الفواصل.**

**ج) حساب، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ وتفسير النتيجتين بيانيا:**

- بمأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}(x^3+3x^2+3x+2)=1$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}(x+1)^2=0^+$ ، فإنّ: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=+\infty}$.

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x=-1}$ (المُوازي لمحور التراتيب) **مقارب** لـ$(\Gamma)$.

- لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^3+3x^2+3x+2)-(x+1)(x+1)^2}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}=0$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=x+1}$ **مقارب مائل** لـ$(\Gamma)$ عند $+\infty$.

**د) تشكيل جدول تغيرات الدّالة $f$ :**

لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$ ومنه: من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1;+\infty[$، فإنّ: $(x+1)^3>0$

إذن: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$؛ **ويكون:**

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

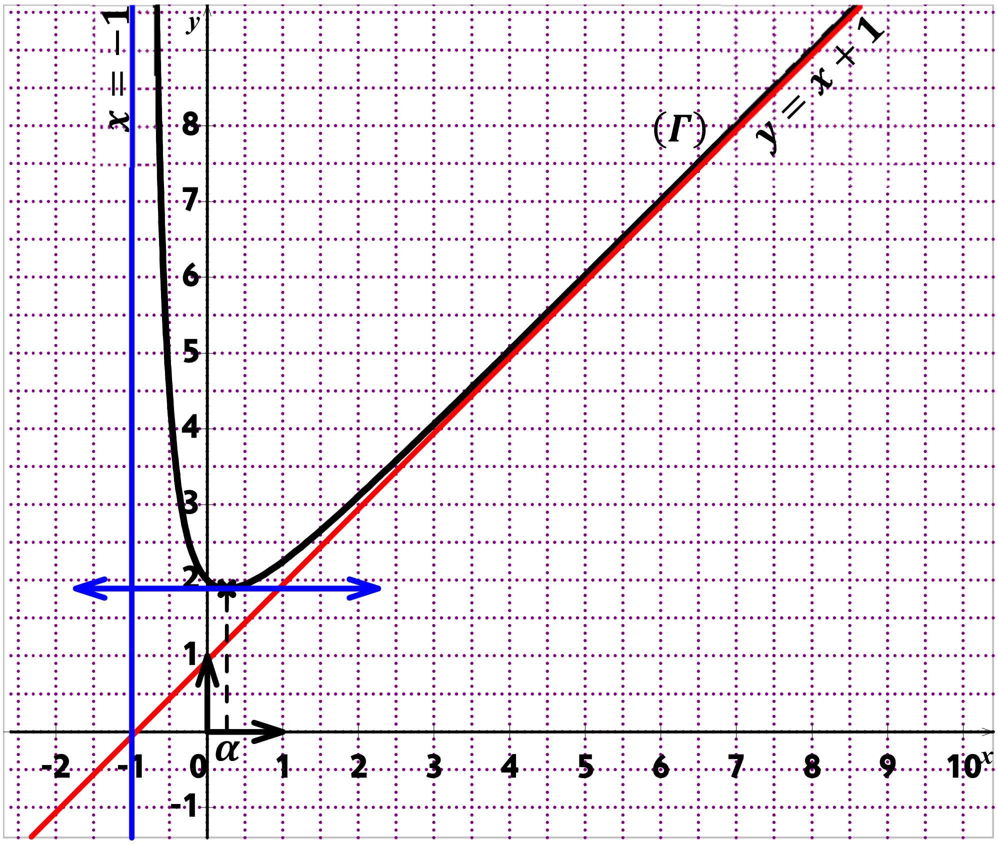
حيث: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

3-بأخذ: $\alpha\simeq0{,}26$

**أ) تعيين مُدور $f(\alpha)$ إلى $10^{-2}$:**

نلاحظ أنّ: $f(x)=\frac{g(x)+3}{(x+1)^2}$، إذن: $\boxed{f(\alpha)=\frac{g(\alpha)+3}{(\alpha+1)^2}=\frac{3}{(\alpha+1)^2}\simeq1{,}89}$.

**ب) رسم المنحنى $(\Gamma)$:**




**4-أ) كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}$، حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان:**

لدينا: $f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}=\frac{(x+a)(x+1)^2+b}{(x+1)^2}=\frac{(x+a)(x^2+2x+1)+b}{(x+1)^2}=\frac{x^3+(a+2)x^2+(2a+1)x+a+b}{(x+1)^2}$

ولدينا من جهة أخرى: $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$، بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a+2=3\\2a+1=3\\a+b=2\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

إذن: $\boxed{f(x)=x+1+\frac{1}{(x+1)^2}}$.

**ب) تعيين $F$ الدّالة الأصلية للدّالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تُحقق، $F(1)=2$:**

- لدينا: $f(x)=x+1+\frac{1}{(x+1)^2}$ ومنه: $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x+1}+c$ حيث $c$ عدد حقيقي ثابت؛
- $F(1)=2$ معناه: $\frac{1}{2}(1)^2+1-\frac{1}{1+1}+c=2$؛ وبالتالي: $c=1$

إذن: $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x+1}+1}$.

## حل التمرين 02: (07,5 نقطة) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: علوم تجريبية.

I) $f$ دالّة معرّفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$؛

**1)أ) حساب نهايات $f$ عند الحدود المفتوحة لـ $I$:**

- لدينا: $\boxed{\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=+\infty}$، لأنّ: $\lim_{\substack{x\to-1\\>}}(-x)=1$ وَ $\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{4}{x+1}=+\infty$.
- لدينا: $\boxed{\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=-\infty}$، لأنّ: $\lim_{\substack{x\to-1\\<}}(-x)=1$ وَ $\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\frac{4}{x+1}=-\infty$.
- لدينا: $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$، لأنّ: $\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ وَ $\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x+1}=0$.

**ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات $f$، تشكيل جدول تغيراتها:**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | ‖ | - | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $4$ |

$g$(2 دّالة معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$.

**أ) حساب نهاية $g$ عند $+\infty$:**

▪ **بمأنّ:** $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x+1}=0$ ، فإنّ: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty}$.

**ب) التحقق من أنّ $(C_g)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ عند $+\infty$ يُطلب تعيين معادلة له:**

▪ **بمأنّ:** $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x+1}=0$ ، أي: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-x]=0}$

**فإنّ:** المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $\boxed{y=x}$ (المنصف الأوّل) مقارب مائل للمنحنى $(C_g)$ عند $+\infty$.

**جـ) دراسة تغيرات $g$:**

$g$ **معرّفة وقابلة للاشتقاق** على المجال $]0;+\infty[$، ولدينا:

$$g'(x)=1-\frac{4(1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1+2)(x+1-2)}{(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

ومنه: إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x-1)$ على المجال $]0;+\infty[$؛ **لأنّ:** $\frac{(x+3)}{(x+1)^2}>0$ على $]0;+\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | - | $0$ | + | |

إذن: $g$ **متناقصة تماما** على المجال $]0;1]$، و**متزايدة تماما** على المجال $[1;+\infty[$؛

**ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | - | $0$ | + | |
| $g(x)$ | $4$ | ↘ | $3$ | ↗ | $+\infty$ |

$k$ $(II$ دّالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$.

**1)أ) حساب $\lim\limits_{\substack{h\to0\\>}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$، $\lim\limits_{\substack{h\to0\\<}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$:**

▪ $\lim\limits_{\substack{h\to0\\>}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\>}}\frac{h+\frac{4}{h+1}-4}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\>}}\frac{\frac{(h-4)(h+1)+4}{h+1}}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\>}}\frac{h^2+h-4h-4+4}{h(h+1)}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\>}}\frac{h-3}{h+1}=-3$

ومنه: الدّالة $k$ **قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين** وَعددها المشتق من اليمين عند 0 هو $\boxed{k'_d(0)=-3}$.

▪ $\lim\limits_{\substack{h\to0\\<}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\<}}\frac{-h+\frac{4}{h+1}-4}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\<}}\frac{\frac{-(h+4)(h+1)+4}{h+1}}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\<}}\frac{-h^2-h-4h-4+4}{h(h+1)}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\<}}\frac{-h-5}{h+1}=-5$

ومنه: الدّالة $k$ **قابلة للاشتقاق عند 0 من اليسار** وَعددها المشتق من اليسار عند 0 هو $\boxed{k'_g(0)=-5}$.

**الاستنتاج:**

بمأنّ: $\boxed{k'_g(0) \neq k'_d(0)}$، فإنّ: الدّالة $k$ **غير قابلة للاشتقاق عند 0**.

**ب) التفسير الهندسي:**

النقطة ذات الفاصلة 0 هي **نقطة زاوية**؛ والمنحنى $(C_k)$ يقبل **نصفي مماسين**.

**2)كتابة معادلتي المماسين $(\Delta_1)$ و$(\Delta_2)$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$:**

- معادلة $(\Delta_1)$ من الشكل $y = k'_g(0)(x-0) + k(0)$ ومنه: $\boxed{(\Delta_1): y = -5x + 4}$.
- معادلة $(\Delta_2)$ من الشكل $y = k'_d(0)(x-0) + k(0)$ ومنه: $\boxed{(\Delta_2): y = -3x + 4}$.

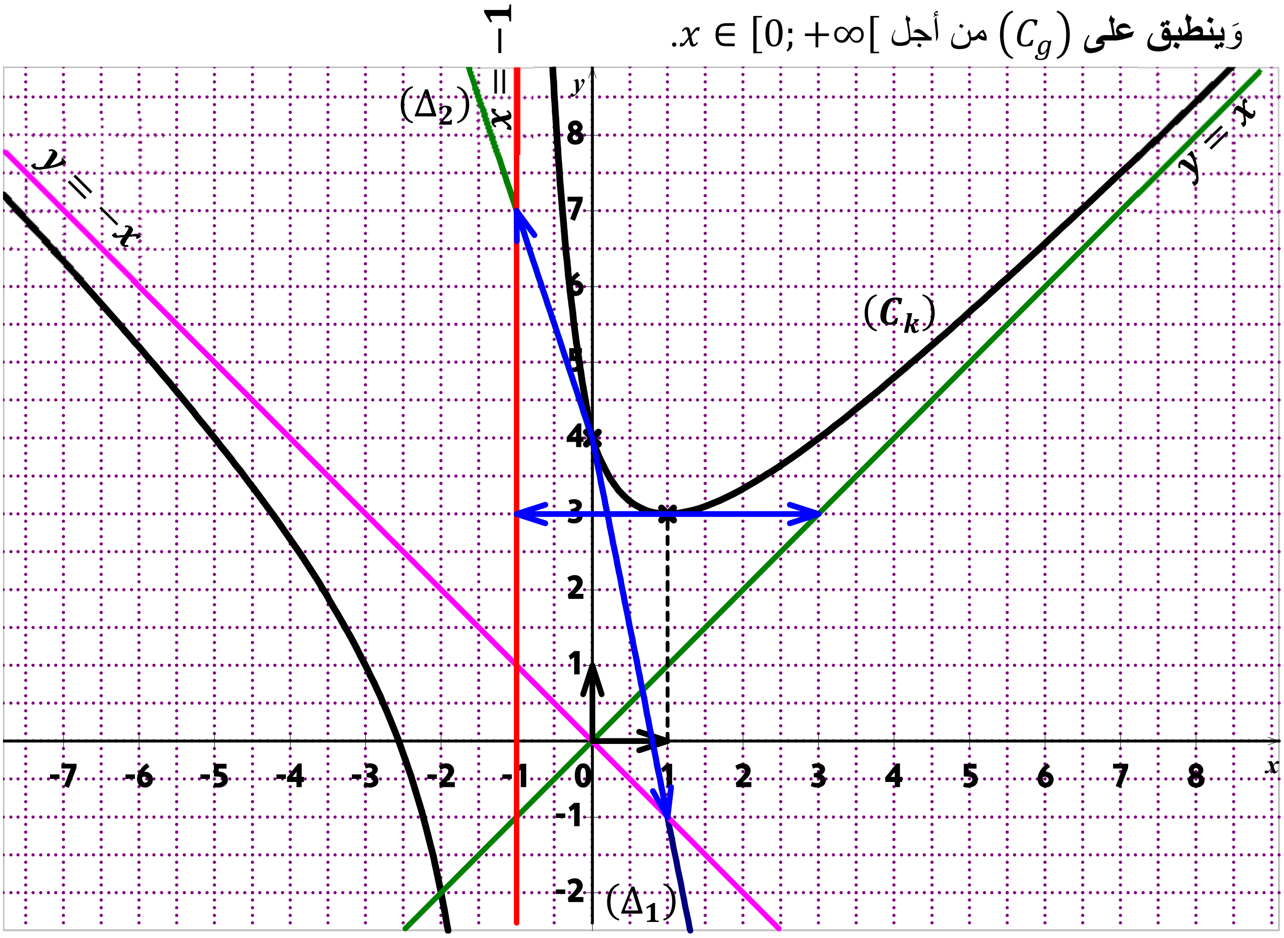
**3)رسم $(\Delta_1)$، $(\Delta_2)$ و$(C_k)$:**

لدينا: $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1} = \begin{cases} x + \frac{4}{x+1}; x \geq 0 \\ -x + \frac{4}{x+1}; x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0] \end{cases}$

أي: $k(x) = \begin{cases} g(x); x \in [0; +\infty[ \\ f(x); x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0] \end{cases}$

إذن: $(C_k)$ **ينطبق على** $(C_f)$ من أجل $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0]$؛

وَ**ينطبق على** $(C_g)$ من أجل $x \in [0; +\infty[$.




**4)حساب مساحة الحيز المستوي المُحدد بالمنحنى $(C_k)$ والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$، $x = \frac{1}{2}$ وَ $x = -\frac{1}{2}$:**

لدينا: $A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} g(x)dx$؛

ومنه: $A=\left[-\frac{x^2}{2}+4\ln(x+1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}+4\ln(x+1)\right]_{0}^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}+4\ln 3\right)ua$ .

## حل التمرين 03: (07 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 02// الشعبة: علوم تجريبية.

I)- لدينا: $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$ وَ $D_g=]-\infty;+\infty[$.

1) أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ :

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3)=+\infty$ .

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدّالة $g$ على $\mathbb{R}$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:

لدينا: $\boxed{g'(x)=6x^2-8x+7}$

ولدينا: $6x^2-8x+7>0$ (لأنّ مميزه سالب تماما $\Delta=(-8)^2-4(6)(7)=-104<0$)

وبالتالي: من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، $\boxed{g'(x)>0}$.

إذن: الدّالة $g$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$، ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ 0 | $+\infty$ |

2) أ) تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث $0,7<\alpha<0,8$:

- لدينا: $g$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0,7;0,8]$ (لأنّها متزايدة تماما على المجال $\mathbb{R}$)
- ولدينا: $\begin{cases} g(0,7)=-0,374 \\ g(0,8)=+0,064 \end{cases}$ أي: $g(0,7)\times g(0,8)<0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ في المجال $[0,7;0,8]$.

ب) استنتاج حسب قيم العدد الحقيقة $x$ إشارة $g(x)$:

من جدول التغيّرات وحسب السؤال 2)أ) نجد:

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | - | 0 | + |

II)- لدينا: $f(x)=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$، $D_f=]-\infty,+\infty[$.

و $(C_f)$ التمثيل البياني لـ $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x\right)=-\infty$ ؛
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x\right)=+\infty$ .

2) أ) تبيان أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$:

لدينا: $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}=\frac{x+1}{2}+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

ومنه:

$$\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}=\frac{(x+1)(2x^2-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)}+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$=\frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$=\frac{2x^3-2x^2+x+2x^2-2x+1+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$=\frac{2x^3-4x+2}{2(2x^2-2x+1)}=\frac{2(x^3-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)}=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}=f(x)$$

إذن: $\boxed{f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}}$.

**ب) استنتاج أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يُطلب تعيين معادلة له:**

لدينا: $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x}{4x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3}{4x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x}{4x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3}{4x}=0 \end{cases}$ ، إذن: المستقيم $\boxed{(\Delta): y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$ **مُقارب مائل لـ$(C_f)$** عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

**جـ) دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ و$(\Delta)$: (ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ )**

لدينا: $f(x)-y=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

ولدينا: $2x^2-2x+1>0$ (لأنّ مميزه سالب تماما $\Delta=(-2)^2-4(2)(1)=-4<0$)

وبالتالي: إشارة الفرق $f(x)-y$ من إشارة البسط $(1-3x)$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $1-3x$ | + | 0 | - |
| $f(x)-y$ | + | 0 | - |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ |

**3)أ) تبيان أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ :**

لدينا: $f(x)=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

ومنه:

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2)(2x^2-2x+1)-(4x-2)(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2}$$
$$=\frac{6x^4-6x^3+3x^2-4x^2+4x-2-4x^4+8x^2-4x+2x^3-4x+2}{(2x^2-2x+1)^2}$$
$$=\frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{(2x^2-2x+1)^2}=\frac{x(2x^3-4x^2+7x-4)}{(2x^2-2x+1)^2}=\frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

إذن: $\boxed{f'(x)=\frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}}$.

**ب) استنتاج إشارة $f'(x)$ حسب قيم $x$ ثم تشكيل جدول تغيّرات الدّالة $f$: ($f(\alpha)\simeq-0,1$)**

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $xg(x)$ **وهي ملخصة في الجدول التالي:**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | - | 0 | + | | | |
| $g(x)$ | | | | - | 0 | + | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

**<u>ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:</u>**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**4)<u>حساب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة</u> $f(x)=0$ :**

- <u>لدينا:</u> $f(1)=\frac{(1)^3-2(1)+1}{2(1)^2-2(1)+1}=\frac{0}{1}=0$؛
- $f(x)=0$ <u>معناه:</u> $\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{2x^2-2x+1}=0$

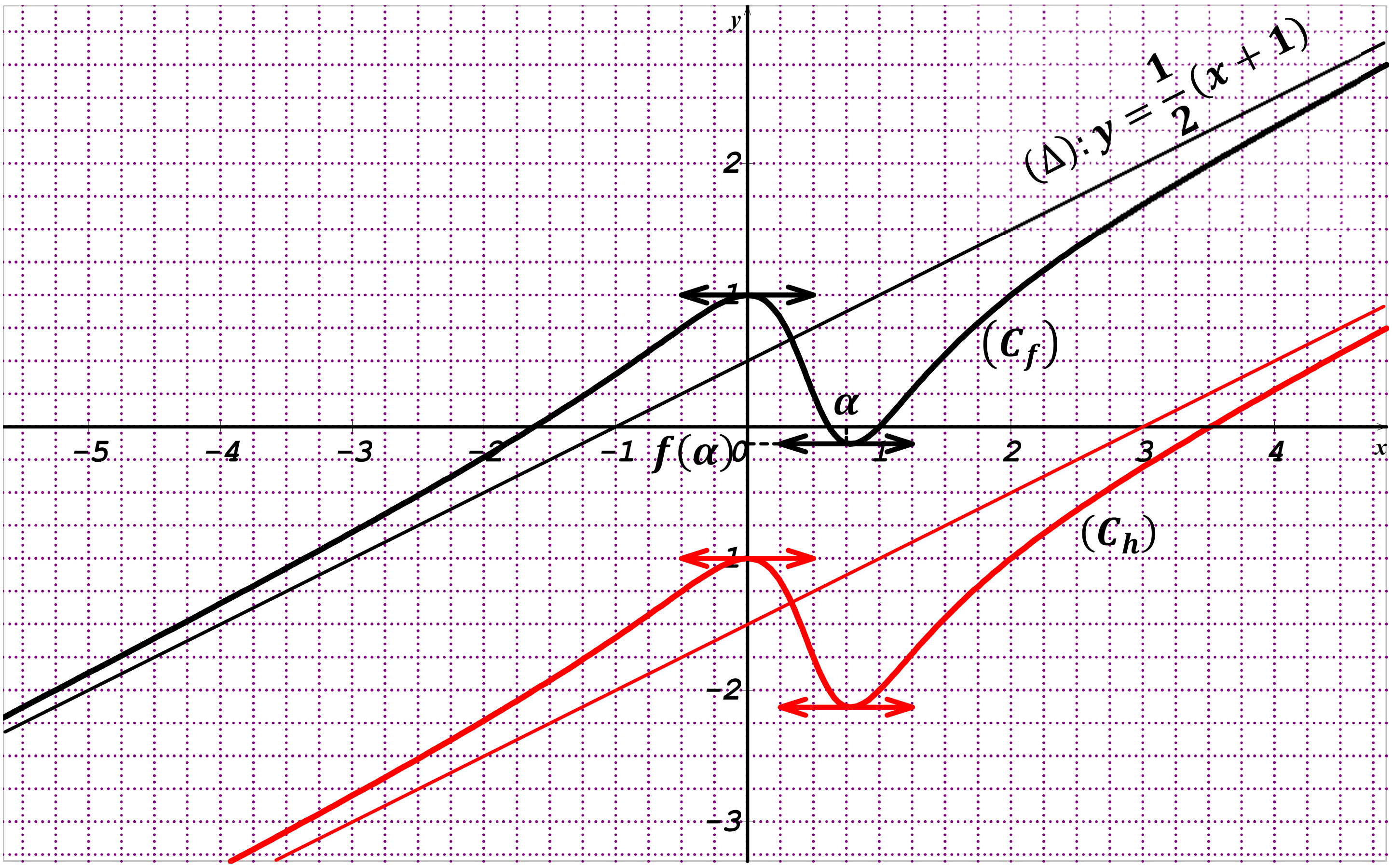
<u>ومنه:</u> $(x-1)(x^2+x-1)=0$

<u>وعليه:</u> $x-1=0$ أو $x^2+x-1=0$

<u>وبالتالي:</u> $x=1$ <u>أو</u> $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ <u>أو</u> $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

<u>إذن:</u> حلول المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$ هي: $x=1$؛ $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$؛ $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

**5)<u>إنشاء المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$ والمنحنى $(C_h)$</u>:**




6)لدينا: $h(x)=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$، $D_h=\mathbb{R}$؛ و $(C_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

**أ) التحقق أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، $h(x) = f(x) - 2$:**

لدينا:
$$f(x) - 2 = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1} - 2$$
$$= \frac{x^3-2x+1-2(2x^2-2x+1)}{2x^2-2x+1} = \frac{x^3-2x+1-4x^2+4x-2}{2x^2-2x+1} = \frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1} = h(x)$$

إذن: $\boxed{h(x) = f(x) - 2}$.

**ب) استنتاج أنّ $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه، ثم إنشاء $(C_h)$:**

بمأنّ $h(x) = f(x) - 2$ فــإنّ $(C_h)$ هو **صورة** $(C_f)$ بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{j}$.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

التمارين// الشعبة: تقني رياضي.

## التمرين 01: (06 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

$f$ الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)أ-أثبت أنّ الدّالة $f$ فردية.

ب-أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

جـ-ادرس تغيّرات الدّالة $f$.

2)أ-أكتب معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 0.

ب-أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(T)$ واستنتج أنّ $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها.

جـ-بيّن أنّ المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y = x + 1$ مُقارب للمنحنى $(C_f)$ في جوار $+\infty$، ثمّ استنتج معادلة $(d')$ المستقيم المقارب الآخر.

د-أرسم $(d)$؛ $(d')$ و $(C_f)$ في المعلم السابق.

3) $g$ الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

أ-بيّن أنّ الدّالة $g$ زوجية.

ب-انطلاقا من $(C_f)$ ارسم $(C_g)$ منحنى الدّالة $g$ في نفس المعلم السابق.

## التمرين 02: (07 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

$I$)نعتبر الدّالة العددية $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^3 + 6x + 12$.

1)ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $g$.

2)بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث $\alpha \in ]-1{,}48; -1;47[$، ثمّ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$.

$II$)نعتبر الدّالة العددية $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ .

ب) بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$.

ثمّ ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $f$ وشكّل جدول تغيّراتها.

2)أ) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.

ب) ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.

3) بيّن أنّ $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4)ارسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $\left(C_f\right)$.

5)نرمز بـ$S$ إلى مساحة الحيز المستوي المُحدد بالمنحنى $\left(C_f\right)$ والمستقيمات التي معادلاتها $x = \alpha$، $x = 0$ وَ$y = 0$.

أثبت أنّ: من أجل كل $x \in [\alpha; 0]$، $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ ثمّ بيّن أنّ: $\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha$.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

الحلول // الشعبة: تقني رياضي.

## حل التمرين 01: (06 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 02 // الشعبة: تقني رياضي.

لدينا: $f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ وَ $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$.

و $(C_f)$ التمثيل البياني لـ $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم **المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

**1) أ-اثبات أنّ الدّالة $f$ فردية:**

لدينا: $D_f=\mathbb{R}$ **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر**،

ولدينا: $f(-x)=(-x)\left(1+\frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}}\right)=-x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=-f(x)$، إذن: $f$ دالّة **فردية**.

**ب-اثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $f'(x)=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ :**

لدينا: $f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

ومنه: $f'(x)=1+\dfrac{1\times\sqrt{x^2+1}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\times x}{\sqrt{x^2+1}^{\,2}}$

$$=1+\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=1+\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}^{\,2}-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=1+\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

**جـ-دراسة تغيّرات الدّالة $f$ :**

- لدينا: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=+\infty$ لأنّ: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$ وَ $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$.

وبمأنّ $f$ دالّة **فردية** وَ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، فإنّ: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

- ولدينا من جهة أخرى: من أجل كل عدد حقيقي $x$، $\boxed{f'(x)>0}$.

إذن: الدّالة $f$ **متزايدة تماما** على $\mathbb{R}$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | + |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ |

**2) أ-كتابة معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 0:**

معادلة $(T)$ من الشكل $y=f'(0)(x-0)+f(0)$، وبمأنّ:
$$\begin{cases} f'(0)=1+\frac{1}{(0^2+1)\sqrt{0^2+1}}=2 \\ f(0)=0\left(1+\frac{1}{\sqrt{0^2+1}}\right)=0\end{cases}$$،

فإنّ: $\boxed{(T):y=2x}$.

**ب-دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(T)$ واستنتاج أنّ $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها:**

**(ندرس إشارة الفرق $f(x)-2x$ )**

لدينا: $f(x)-2x = x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-2x = x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-2\right) = x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)$

- من أجل كل عدد حقيقي $x$، $x^2 \geq 0$ ومنه: $x^2+1 \geq 1$

وعليه: $\sqrt{x^2+1} \geq 1$

وبالتالي: $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1$ إذن: $\boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1 \leq 0}$.

إذن: **إشارة الفرق** $f(x)-2x$ **عكس إشارة** $x$

| $x$ | $-\infty$        $0$        $+\infty$ |
|---|---|
| $x$ | -    0    + |
| $f(x)-2x$ | +    0    - |
| **الوضع النسبي** | $(C_f)$ يقع **فوق** $(T)$    $(C_f)$ **يقطع** $(T)$    $(C_f)$ يقع **تحت** $(T)$ |

**استنتاج أنّ $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها:**

نلاحظ أنّ $(C_f)$ **غيّر وضعيته بالنسبة إلى مماسه** $(T)$ في نقطة **التمّاس** وهي النقطة $O$، أي $(C_f)$ **يخترق** المماس $(T)$ في المبدأ $O$، **إذن:** المبدأ $O$ هو **نقطة انعطاف** لـ$(C_f)$.

**جـ-تبيان أنّ المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y=x+1$ مُقارب للمنحنى $(C_f)$ في جوار $+\infty$:**

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-(x+1)\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right) = 0$$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$

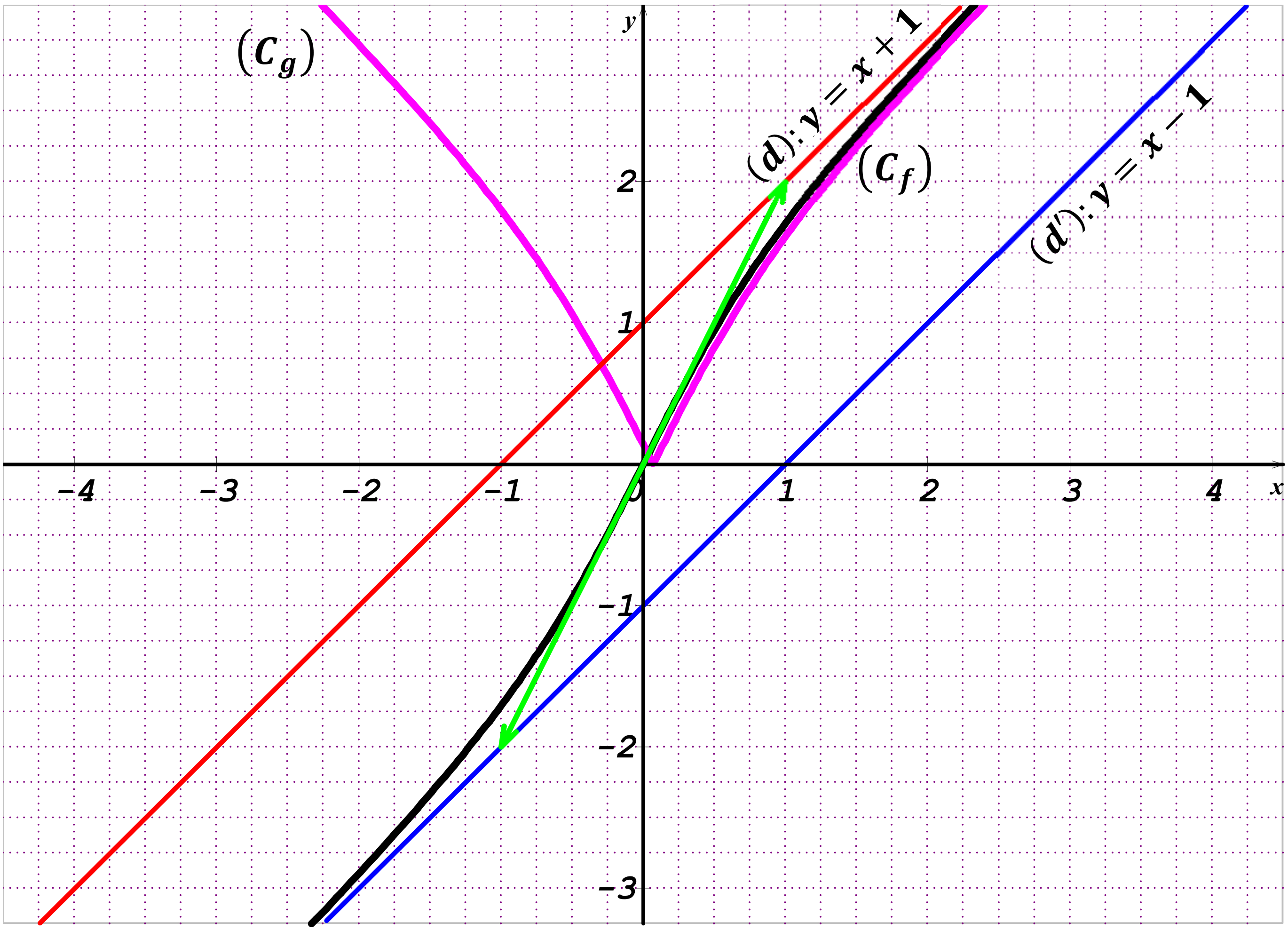
إذن: المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y=x+1$ مُقارب للمنحنى $(C_f)$ في جوار $+\infty$.

**استنتاج معادلة $(d')$ المستقيم المقارب الآخر:**

الدّالة $f$ **فردية**، فالمنحنى $(C_f)$ **متناظر بالنسبة للمبدأ** $O$؛ وبمأنّ $(C_f)$ يقبل $(d)$ كمستقيم مُقارب مائل بجوار $+\infty$ فإنّه يقبل مستقيم مُقارب مائل آخر $(d')$ بجوار $-\infty$ وهو **نظير** $(d)$ بالنسبة إلى المبدأ $O$.

لدينا: $(d): y=x+1$ وبالتالي: $(d'): -y=-x+1$ إذن: $\boxed{(d'): y=x-1}$.

**د-رسم $(d)$؛ $(d')$ و $(C_f)$ في المعلم السابق:**




**تذكير:** $|x| = |-x|$ وَ $|x|^2 = x^2$ وَ $\sqrt{x^2} = |x|$

3) لديـــنا: $g(x) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ وَ $D_g = \mathbb{R}$.

**أ-تبيان أنّ الدّالة $g$ زوجية:**

لدينا: $D_g = \mathbb{R}$ **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر**،

ولدينا: $g(-x) = |-x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{|-x|^2+1}}\right) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{|x|^2+1}}\right) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = g(x)$،

إذن: $g$ دّالة **زوجية.**

**ب-انطلاقا من $(C_f)$ رسم $(C_g)$ منحنى الدّالة $g$ في نفس المعلم السابق:**

نلاحظ أنّ: $g(x) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{|x|^2+1}}\right) = f(|x|)$

ومنه: من أجل $x \in [0; +\infty[$ يكون $g(x) = f(x)$ وعليه: $(C_g)$ **ينطبق** على $(C_f)$، وهو **متناظر إلى محور التراتيب** لأنّ $g$ دّالة **زوجية.**

## حل التمرين 02: (07 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: تقني ر.

*I*) لدينا: $g(x) = x^3 + 6x + 12$ وَ $D_g = \mathbb{R}$.

**1) دراسة اتجاه تغيّر الدّالة $g$**

لدينا: من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، $\boxed{g'(x) = 3x^2 + 6 > 0}$ ، إذن: الدّالة $g$ **متزايدة تماما** على $\mathbb{R}$ .

**2) تبيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيداً $\alpha$ حيث $\alpha \in ]-1,48; -1,47[$**

▪ لدينا: $g$ **مستمرة** و**متزايدة تماما** على المجال $[-1,48; -1,47]$ (لأنّها **متزايدة تماما** على $\mathbb{R}$ )

▪ ولدينا: $\begin{cases} g(-1{,}48) = -0{,}121792 \\ g(-1{,}47) = +0{,}003477 \end{cases}$ أي: $g(-1{,}48) \times g(-1{,}47) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة**، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث $\alpha \in ]-1{,}48; -1{,}47[$.

**استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$:**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | - | 0 | + | |

**II)** لدينا: $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$ وَ $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$.

و $(C_f)$ التمثيل البياني لـ $f$ في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد والمتجانس** $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

**1) أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ :**

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

**ب) تبيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$ :**

$f$ **قابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$، وَلدينا:

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2+2)-(2x)(x^3-6)}{(x^2+2)^2} = \frac{3x^4+6x^2-2x^4+6x}{(x^2+2)^2} = \frac{x^4+6x^2+6x}{(x^2+2)^2} = \frac{x(x^3+6x+6)}{(x^2+2)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

**دراسة اتجاه تغيّر الدّالّة $f$ وتشكيل جدول تغيّراتها:**

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $xg(x)$ **وهي ملخصة في الجدول التالي:**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | - | | - | 0 | + | |
| $g(x)$ | | - | 0 | + | | + | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

الدّالّة $f$ **متزايدة تماماً** على كل من المجالين $]-\infty; \alpha]$ وَ $[0; +\infty[$، و**متناقصة تماماً** على المجال $[\alpha; 0]$.

**ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $-3$ | ↗ | $+\infty$ |

**2) أ) تبيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$:**

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3-6}{x^2+2} - x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3-6-x(x^2+2)}{x^2+2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x-6}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2}{x} = 0$

وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-6}{x^2+2} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-6-x(x^2+2)}{x^2+2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x-6}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{x} = 0$

إذن: المستقيم $\boxed{(\Delta): y = x}$ **مُقارب مائل** لـ $(C_f)$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

**ب) دراسة وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$: (ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$ )**

لدينا: $f(x) - x = \frac{-2x-6}{x^2+2} = \frac{-2(x+3)}{x^2+2}$،

وبالتالي: إشارة الفرق $f(x) - x$ من إشارة البسط $-2(x+3)$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x+3$ | - | $0$ | + |
| $f(x)-y$ | + | $0$ | - |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ |

**3) تبيان أنّ $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$ :**

لدينا: $f(\alpha)=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}$،

ومنه: $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}-\frac{3}{2}\alpha=\frac{2(\alpha^3-6)-3\alpha(\alpha^2+2)}{2(\alpha^2+2)}=\frac{-\alpha^3-6\alpha-12}{2(\alpha^2+2)}=\frac{-g(\alpha)}{2(\alpha^2+2)}=0$

لأنّ: $g(\alpha)=0$.

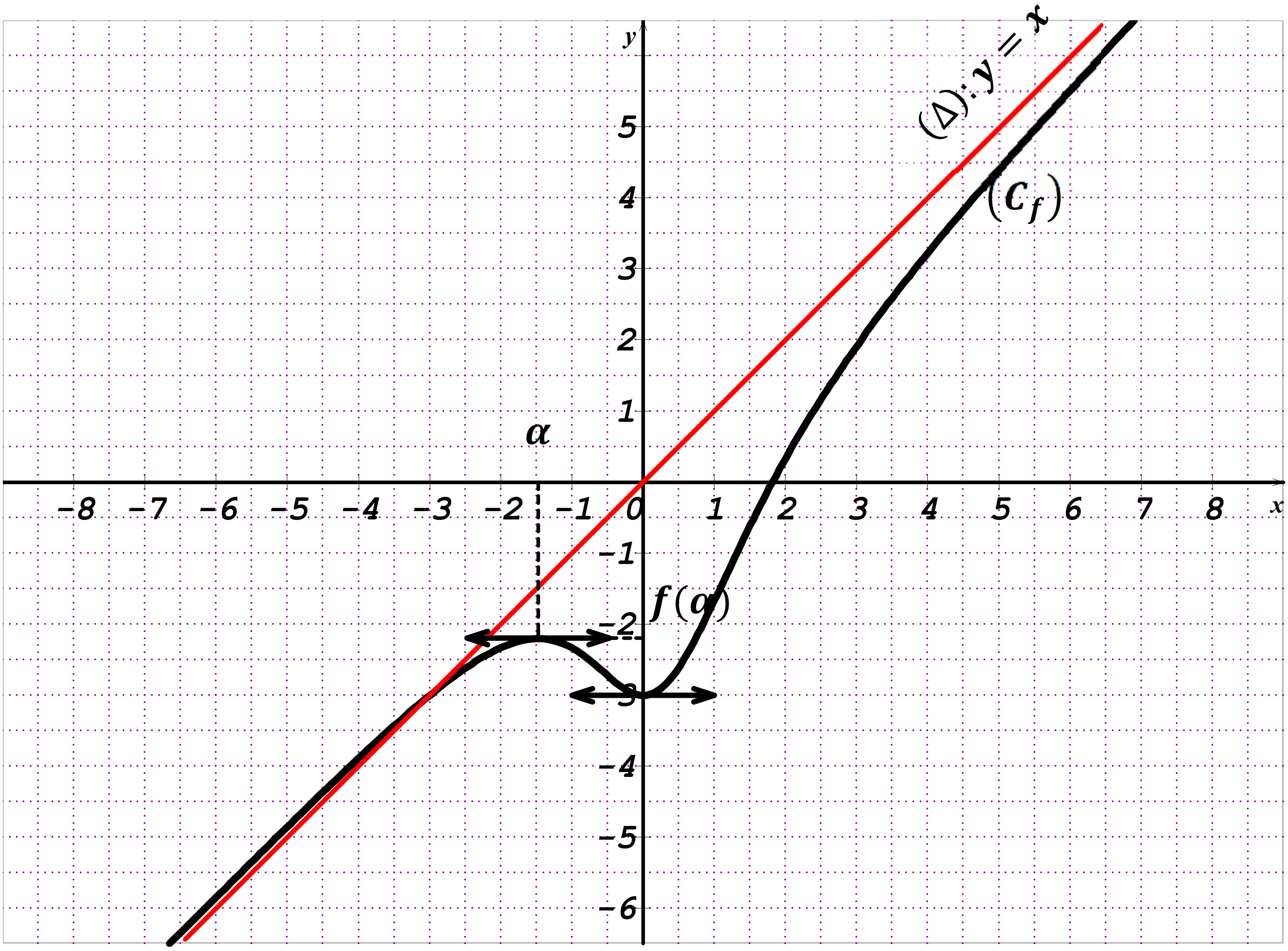
إذن: $\boxed{f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha}$.

**استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:**

لدينا: $-1{,}48<\alpha<-1{,}47$ وَ $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$، وبالتالي: $-1{,}48\times\frac{3}{2}<\frac{3}{2}\alpha<-1{,}47\times\frac{3}{2}$

إذن: $\boxed{-2{,}22<f(\alpha)<-2{,}205}$.

**4) رسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$:**




5) $S$ مساحة الحيز المستوي المُحدد بـ $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها $x=\alpha$، $x=0$ و $y=0$.

لدينا: $S=\int_{\alpha}^{0}-f(x)dx$ لأنّ $(C_f)$ يقع **تحت محور الفواصل** على المجال $[\alpha;0]$.

**اثبات أنّ: من أجل كل $x \in [\alpha; 0]$، $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ ثمّ تبيان أنّ: $\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha$:**

**من جدول تغيّرات الدّالة $f$**، إذا كان: $\alpha \leq x \leq 0$،

فإنّ: $f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha)$ (لأنّها **متناقصة تماماً** على المجال $[\alpha; 0]$)

وبالتالي: $\boxed{-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)}$.

ومنه: $-f(\alpha) \leq -f(x) \leq 3$ وعليه: $\int_\alpha^0 -f(\alpha)dx \leq \int_\alpha^0 -f(x)dx \leq \int_\alpha^0 3dx$

وبالتالي: $-\left[\frac{3}{2}\alpha x\right]_\alpha^0 \leq S \leq [3x]_\alpha^0$

إذن: $\boxed{\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha}$.

# مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

## التمارين// الشعبة: رياضيات.

## التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 02// الشعبة: رياضيات.

$f$ الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي: $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$.

$(C_f)$ منحنى الدّالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) ادرس تغيّرات الدّالة $f$.

2)أ-بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما $(D)$ معادلته: $y=x$.

ب-أدرس الوضعية النسبية للمنحنى $(C_f)$ و$(D)$.

3)أ-بيّن أنّ $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0$ حيث: $1{,}3<x_0<1{,}4$.

ب-عيّن معادلة $(\Delta)$ مماسا للمنحنى $(C_f)$ في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

جـ-أرسم $(\Delta)$ و$(C_f)$ في نفس المعلم.

4)أوجد الدّالة الأصلية للدّالة $f$ والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغيّر $x$.

5)$g$ الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=|f(x)|$.

$(C_g)$ منحنى الدّالة $g$ في المعلم السابق.

-بيّن كيف يمكن إنشاء $(C_g)$ انطلاقا من $(C_f)$، ثمّ ارسمه في نفس المعلم السّابق.

6)ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول $x$: $g(x)=m^2$.

## التمرين 05: (04 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

.

# مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

## الحلول // الشعبة: رياضيات.

## حل التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 02// الشعبة: رياضيات.

لدينا: $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ وَ $D_f = ]-1; +\infty[$.

$(C_f)$ منحنى الدّالة $f$ في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد والمتجانس** $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

**1) دراسة تغيّرات الدّالة $f$:**

- لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}\right) = +\infty$ لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1}} = 0$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

وَ $\lim\limits_{\substack{>\\x\to-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{>\\x\to-1}} \left(x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}\right) = -\infty$ ، لأنّ: $\lim\limits_{\substack{>\\x\to-1}} \frac{-2}{\sqrt{x+1}} = -\infty$ وَ $\lim\limits_{\substack{>\\x\to-1}} x = -1$.

- ولدينا: من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-1; +\infty[$،

$$\boxed{f'(x) = 1 - 2\left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}^2}\right) = 1 + \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} > 0}.$$

إذن: الدّالة $f$ **متزايدة تماما** على $]-1; +\infty[$، ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

| $x$ | $-1$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | + | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**2) أ-تبيان أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما $(D)$ معادلته $y = x$:**

بمأنّ $\boxed{\lim\limits_{\substack{>\\x\to-1}} f(x) = -\infty}$، فإنّ المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x = -1}$ **(المُوازي لمحور التراتيب)** مُقارب لـ$(C_f)$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1}} = 0$ ،

إذن: المستقيم $(D)$ ذو المعادلة $y = x$ مُقارب **مائل** لـ$(C_f)$ عند $+\infty$.

**ب-دراسة الوضعية النسبية للمنحنى $(C_f)$ و$(D)$: (ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$ )**

لدينا: $f(x) - x = \frac{-2}{\sqrt{x+1}} < 0$ إذن: من أجل كل $x$ من $]-1; +\infty[$، $(C_f)$ يقع **تحت** المستقيم $(D)$.

**3) أ-بيّن أنّ $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0$ حيث، $1,3 < x_0 < 1,4$:**

- لدينا: $f$ **مستمرة** و**متزايدة تماما** على المجال $]1,3; 1,4[$ (لأنّها **متزايدة تماما** على $]-1; +\infty[$)
- ولدينا: $\begin{cases} f(1,3) = -0,01 \\ f(1,4) = +0,10 \end{cases}$ أي: $f(1,3) \times f(1,4) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة**، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $x_0$ حيث: $1,3 < x_0 < 1,4$.

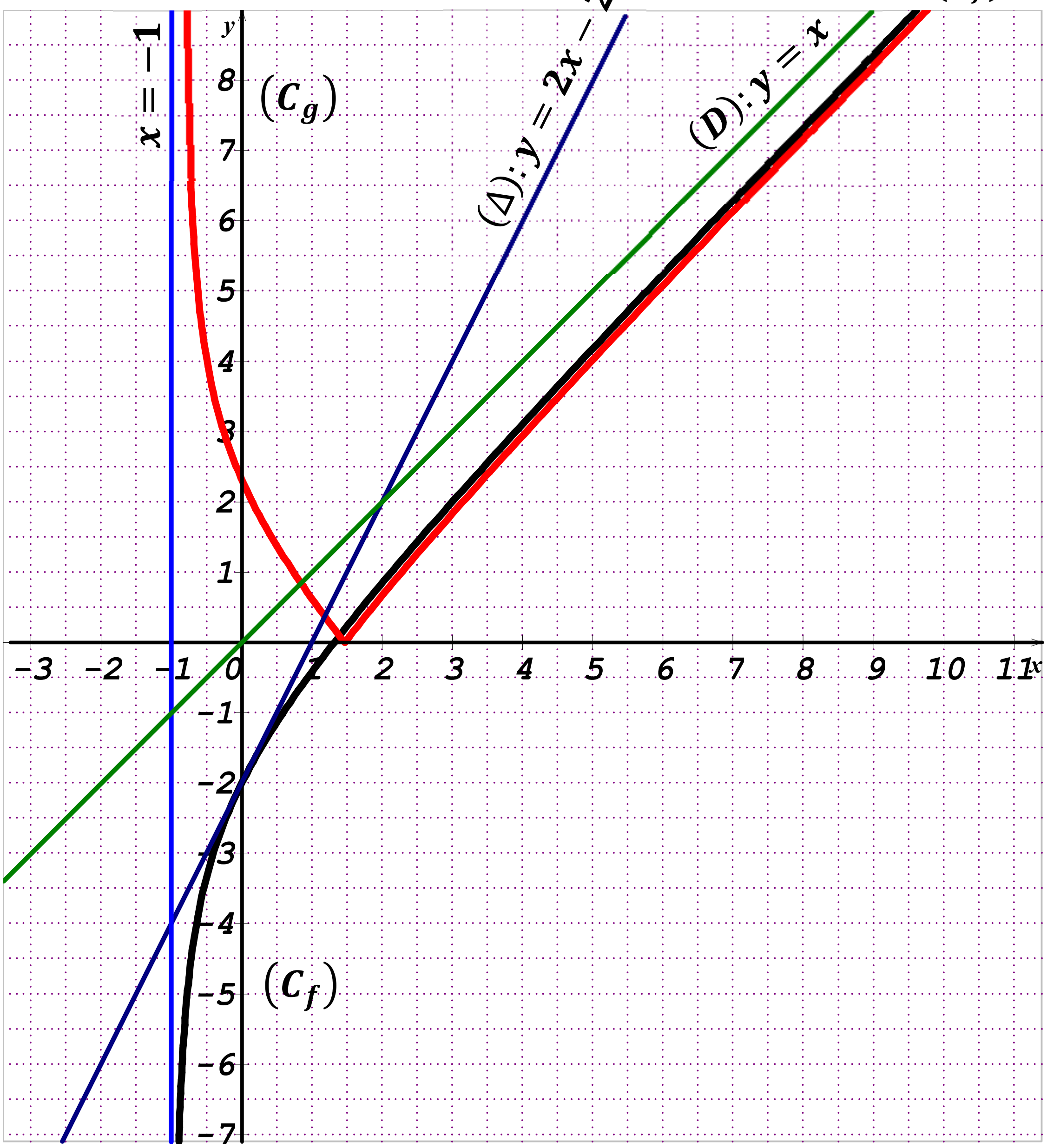
أي: $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0$ حيث: $1,3 < x_0 < 1,4$.

**ب-تعيّن معادلة $(\Delta)$ مماسا للمنحنى $(C_f)$ في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب:**

نقطة تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع محور التراتيب **فاصلتها 0** إذن: $(\Delta)$ مماس للمنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 0، معادلته من الشكل $y = f'(0)(x-0) + f(0)$، وبمأنّ: $\begin{cases} f'(0) = 1 + \frac{1}{(0+1)\sqrt{0+1}} = 2 \\ f(0) = 0 - \frac{2}{\sqrt{0+1}} = -2 \end{cases}$،

فإنّ: $\boxed{(\Delta): y = 2x - 2}$.

**جـ-رسم $(\Delta)$ و $(C_f)$ في نفس المعلم:**




**4)إيجاد الدّالة الأصلية للدّالة $f$ والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغيّر $x$:**

مجموعة الدّوال الأصلية للدّالة $f$ على المجال $]-1; +\infty[$ هي الدّوال:

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\sqrt{x+1} + c$، حيث $c$ ثابت حقيقي، ونعلم أنّ $F(0) = 0$ ومنه: $c = 4$

إذن: $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\sqrt{x+1} + 4}$.

5)لدينا: $g(x) = |f(x)|$ وَ $D_g = ]-1; +\infty[$، $(C_g)$ منحنى الدّالة $g$ في المعلم السابق.

**-تبيان كيف يُمكن إنشاء $(C_g)$ انطلاقا من $(C_f)$، ثمّ رسمه في نفس المعلم السّابق:**

لدينا: $g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; f(x) \leq 0 \end{cases}$، أي: $g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in [x_0; +\infty[ \\ -f(x) & ; x \in ]-1; x_0] \end{cases}$

إذن: من أجل $x \in [x_0; +\infty[$، فإنّ $g(x) = f(x)$ وبالتالي: $(C_g)$ **ينطبق** على $(C_f)$،

ومن أجل $x \in ]-1; x_0]$، فإنّ $g(x) = -f(x)$ وبالتالي: $(C_g)$ **نظير** $(C_f)$ بالنسبة لمحور الفواصل.

**6)مناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول $x$، $g(x) = m^2$:**

إذا كان $m^2 = 0$ أي: $\boxed{m = 0}$ فإنّ المعادلة **تقبل حلا واحدا موجبا.**

إذا كان $0 < m^2 < 2$ أي: $\boxed{m \in ]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[}$ فإنّ المعادلة **تقبل حلين موجبين.**

إذا كان $m^2 = 2$ أي: $\boxed{m = \sqrt{2} \text{ أو } m = -\sqrt{2}}$ فإنّ المعادلة **تقبل حلين أحدهما موجب والآخر معدوم.**

إذا كان $m^2 > 2$ أي: $\boxed{m \in ]-\infty; -\sqrt{2}[ \cup ]\sqrt{2}; +\infty[}$ فإنّ المعادلة **تقبل حلين مختلفين في الإشارة.**

## التمرين 05: (04 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

.