الباب
4

دالة اللوغاريتم النيبيري

لقد تمكنّا من تقدير عمر اللوحات والنقوش المكتشفة في كهف لاسكو بفرنسا بفضل التأريخ بالكربون 14 . عندما يموت كائن حي ، تقل نسبة الكربون 14 الذي يحتويه بالنسبة للمواد المحيطة بمرور الوقت: نقول أن الكربون يتبع **قانون التناقص الإشعاعي** . يتم حساب عمر فحم الخشب ، وبالتالي لوحات الكهوف ، باستخدام **اللوغاريتم النيبيري** ، نرمز له ب ln حيث: $t=-\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{A(t)}{A_0}\right)$ ، حيث t هو الزمن ، $A(t)$ عدد ذرات الكربون 14 المضمحلة بدلالة الزمن و A_0 و λ هما ثابتان موجبان تمامًا .

تجدون في هذا الملف

1. الدرس
2. تطبيقات محلولة
3. طرائق هامة لحل التمارين
4. مسائل محلولة من ★ إلى ★★★★★

+ لمزيد من الأعمال...

- قرص الجامع في الرياضيات
- قرص EXTRA BAC
- أولمبياد الرياضيات
- حوليات شهادة البكالوريا مع الحل
- فروض واختبارات محلولة لكل المستويات

الأستاذ: عبد الحفيظي عادل

1 تعريف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية:

تعريف: نسمي الدالة اللوغاريتمية النيبيرية الدالة التي نرمز لها بـ $\ln$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$ و نكتب $f(x)=\ln x$ [1]

خواص: من أجل كل عددان حقيقيان a و b من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا :

$\ln 1=0$ ، $\ln e=1$ ، $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$ ، $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$ ، $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$

- $\ln a^n=n\ln a$ ، $\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$ ، $e^{\ln a}=a$
- $\ln a=\ln b$ يعني $a=b$ ، $\ln a<\ln b$ يعني $a<b$ ، $\ln a\geq \ln b$ يعني $a\geq b$
- $\ln a>0$ يعني $a>1$ و $\ln a<0$ يعني $0<a<1$

تنبيه: من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $\ln x^2=2\ln|x|$ وبصفة عامة: $\ln x^n=\begin{cases} n\ln|x| & : \text{n زوجي} \\ n\ln x & : \text{n فردي}\end{cases}$

دراسة تغيرات الدالة اللوغاريتمية:

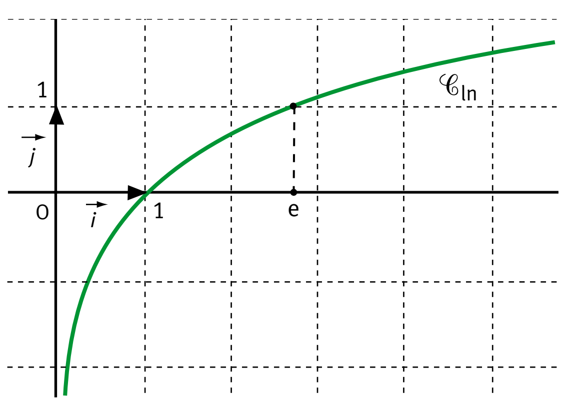
1 مجموعة التعريف: لدينا : $f(x)=\ln x$ و هي معرفة من أجل $x>0$ أي $D_f=]0;+\infty[$

2 النهايات: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

3 جدول التغيرات : [2]

x	0		1		e		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖			+			
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

4 التمثيل البياني :



تطبيق 01: **بسط العبارات التالية :** [3] [4] [5] الانتقال الى الحل

(1 $\ln 3+\ln\frac{1}{3}$ (2 $ln\sqrt{\sqrt{2}+1}+ln\sqrt{\sqrt{2}-1}$ (3 $\ln\sqrt{e^3}-\ln\frac{\sqrt{e}}{e^2}$ (4 $\ln(128)^2-\ln(16\times 32)$

الحل:

....

....

....

[1] : سلسلة تمارين حول الدوال اللوغاريتمية (بخدة أمين)
[2] : Cned – Académie en ligne ©
[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)
[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
[5] : الكتاب المدرسي السوري

2 مجموعة تعريف الدالة اللوغاريتمية:

مبرهنة: نضع $f(x)=\ln u(x)$ حيث u دالة عددية ، تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان: $u(x)>0$ [1]

تطبيق 02: عين مجموعة تعريف الدالة في كل حالة [4] [5]

الانتقال الى الحل

1) $\ln(x^2)$ 2) $\ln(1-x)$ 3) $\ln(x-3)$

4) $\frac{1}{x}\ln(1+x)$ 5) $\frac{1}{\ln x}$ 6) $\ln(x^2+4x)$

7) $\ln(-x)$ 8) $\ln|x+1|-\ln|x-1|$ 9) $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$

الحل:

3 حل المعادلات والمتراجحات :

طريقة:

◂ لحل معادلة من الشكل $ln[u(x)] = a$ (متراجحة من الشكل $ln[u(x)] < a$) [1] [5]

1) نعين D مجموعة تعريف المعادلة (المتراجحة).

2) نحل في D المعادلة $u(x) = e^a$ (المتراجحة $u(x) < e^a$).

ولا نحتفظ من هذه الحلول إلاّ بتلك التي تنتمي إلى المجموعة D.

◂ لحل معادلة من الشكل $ln[u(x)] = ln[v(x)]$ (متراجحة من الشكل $ln[u(x)] < ln[v(x)]$)

1) نعين D مجموعة تعريف المعادلة (المتراجحة).

2) نحل في D المعادلة $u(x) = v(x)$ (المتراجحة $u(x) < v(x)$).

ولا نحتفظ من هذه الحلول إلا بتلك التي تنتمي إلى المجموعة D.

تطبيق 03: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : [3] [4] [6]

الانتقال الـى الحـل

1) $2\ln x = \ln 9$ 2) $\ln x^2 = 4$ 3) $\ln x - \ln(x-2) = 1$ 4) $(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$

5) $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

الحل:

[5] : الكتاب المدرسي السوري

[1] : سلسلة تمارين حول الدوال اللوغاريتمية (بخدة أمين)

[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)

[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

[6] : قواعد أساسية في الدوال اللوغاريتمية (واضحي عبد الكريم)

تطبيق 04: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : [3] [4] [6] [5]

الانتقال الى الحل

1) $-1 \le \ln x \le 2$ 2) $\ln(x^2-1) \ge 0$ 3) $\ln|x| < 1$ 4) $(\ln x)^2 - 1 \le 0$

5) $(x^2-4x)\ln x \ge 0$ 6) $\ln x + \ln(x-1) > \ln 6$

الحل:

[5] : الكتاب المدرسي السوري

[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)

[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

[6] : قواعد أساسية في الدوال اللوغاريتمية (واضحي عبد الكريم)

4 مشتقة الدالة اللوغاريتمية:

مبرهنة: نضع : $f(x)=\ln u(x)$ حيث u دالة عددية و $u>0$

إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال I فإن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I [1]

و بالتالي : $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

ملاحظة : إذا كانت $f(x)=\ln|v(x)|$ فإن $f'(x)=\dfrac{v'(x)}{v(x)}$

تطبيق 05: **أحسب الدالة المشتقة في كل حالة** [3] [4] [5]

الانتقال الى الحل

1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln x$

3) $h(x)=ln\dfrac{x-1}{x+1}$

5) $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$

7) $k(x)=\dfrac{x}{1-ln x}$

2) $f(x)=\ln\left(e^{2x}-5e^x+6\right)$

4) $f(x)=x\ln|x|$

6) $f(x)=-\dfrac{x}{2}+1+2\ln x$

8) $f(x)=\dfrac{e}{\ln x}$

الحل:

....

....

....

[1] : سلسلة تمارين حول الدوال اللوغاريتمية (بخدة أمين)

[5] : الكتاب المدرسي السوري

[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)

[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

5 النهايات الشهيرة :

مبرهنة:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0^-$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$ ، $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ ، $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$ [1]

ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0^+$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^n \ln x = 0^-$

تطبيق 06: أحسب النهايات التالية : [2] [4] [5]

الانتقال الـى الحـل

1) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(x - \dfrac{\ln x}{x}\right)$

3) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{e^x}{x\ln x}$

5) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 - \ln x\right)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{\ln x}\right)$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

الحل:

[1] : سلسلة تمارين حول الدوال اللوغاريتمية (بخدة أمين)

[5] : الكتاب المدرسي السوري

[2] : © Cned – Académie en ligne

[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

6 دالة اللوغاريتم العشري :

تعريف:

نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز لها بالرمز log و المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ [1]

خواص:

- $\log 1 = 0$ ، $\log 10 = 1$
- إذا كان x عددا حقيقيا حيث : $10^n \le x \le 10^{n+1}$ فإن $n \le \log x \le n+1$
- كل الخواص الجبرية للدالة ln تبقى صحيحة من قبل الدالة log

تطبيق 07: [3] الانتقال الى الحل

- نعتبر العدد الطبيعي n حيث $n = 2^{1234}$

1) عين باستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log n$.

2) استنتج الحصر التالي: $10^{371} \le n < 10^{372}$.

3) ما هو عدد أرقام العدد 2^{1234}

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تطبيق 08: [4] [5] الانتقال الى الحل

1) لحسب $\log(1)$ و $\log(10)$ ، ثم $\log(100)$ و $\log(1000)$ و $\log(10000)$.

2) لحسب المجموع : $S = \log\frac{1}{2} + \log\frac{2}{3} + \log\frac{3}{4} + \ldots + \log\frac{98}{99} + \log\frac{99}{100}$

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية :

- $\log x + \log(x-1) = \log 6$
- $2(\log x)^2 + 5\log x - 3 = 0$
- $\log x > 3$
- $\log(x-6) > 2\log x$

الحل:

[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
[5] : الكتاب المدرسي السوري

7 بعض استعمالات اللوغاريتم العشري :

في علم الزلازل:

تطبيق 09: [5] الانتقال إلى الحل

- يشير المقدار I_0 إلى شدة قاعدية مرجعية، وعندها نقول إن درجة زلزال شدته I تساوي M .

◂ إذا كان $M = \log(I/I_0)$ ، فما درجة الزلزال الذي وقع في لوس أنجلس عام 1971 إذا علمت أنّ $I = 50.01\times10^{6}I_0$.

الحل:

....

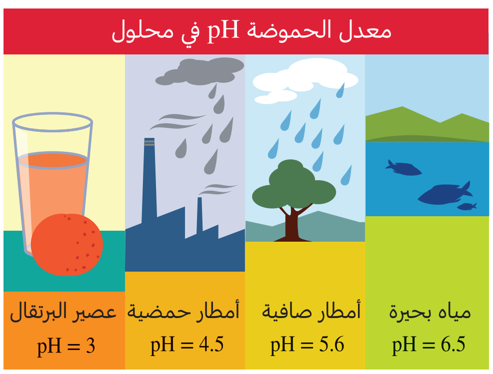
....

....

....

في الكيمياء:

تطبيق 10: [7] الانتقال إلى الحل



- **يُقاس التركيز المولي لأيونات الهيدروجين في محلول معيّن من خلال صيغة pH المعرّفة كما يلي: $\mathrm{pH} = log\,\frac{1}{[\mathrm{H}^+]}$.**

حيث $[\mathrm{H}^+]$ التركيز المولي لأيونات الهيدروجين بوحدة المول لكل ليتر (mol/L).

◂ **أوجد التركيز المولي لأيونات الهيدروجين في الأمطار الحمضية.**

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[7]: الكتاب المدرسي القطري
[5]: الكتاب المدرسي السوري

8 تحقق من فهمك الجيد للدرس :

الانتقال الـــى الحـــل

أجب ب "صح" أو " خطأ": [4] [6]

1. $e^{5\ln(2)} \times e^{7\ln(4)} = 2^{19}$ ☐

2. الدالة: $x \mapsto (\ln x)^2$ معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ ☐

3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم α فإن
$\ln 2^{\alpha} = \ln \alpha^2$ ☐

4. من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :
$\ln|x| > 0$ ☐

5. إذا كان $|x| < 1$ فإن : $\ln|x| < 0$ ☐

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$ ☐

7. $\mathop{Lim}\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(-x)\right] = +\infty$ ☐

8. $\ln(-2)^{1830} = 1830\ln 2$ ☐

9. $\dfrac{\ln 12}{\ln 3} = \ln\dfrac{12}{3} = \ln 4$ ☐

10. للمعادلة $x\ln(x) = 3\ln(x)$ في المجال $]0\,;+\infty[$
حلان مختلفان هما : 1 و 3 . ☐

11. من أجل كل عددان حقيقيان موجبان تماما :
$\ln(a+b) = \ln a + \ln b$ ☐

12. من أجل كل عددان حقيقيان موجبان تماما :
$\ln(a) \times \ln(b) = \ln(a \times b)$ ☐

13. $(\ln(a))^n = n\ln(a)$: $n \in \mathbb{N},\ a > 0$ ☐

14. x و y عددان حقيقيان غير معدومين :
إذا كان $\ln(x^2) = \ln(y^2)$ فإن $x = y$ ☐

وضّع إشارة كل عدد حقيقي مما يلي:

☐ $\ln(1{,}01)$ ☐ $\ln(0{,}5)$ ☐ $\ln(3)$

☐ $\ln(\sqrt{2})$ ☐ $\ln(e^{-1})$ ☐ $\ln(0{,}95)$

أتمم مايلي: [6]

a. $\ln(e^{-5}) = \ldots$

b. $e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \ldots$

c. $\ln(\ldots) = -1$

d. $\ln(e^{\cdots}) = \dfrac{1}{e}$

e. $e^{\ln(\ldots)} = \sqrt{2}$

f. $\ln(\ldots) = \dfrac{3}{7}$

أكمل بعلامة $=$ أو $\neq$ مايلي:

$\ln(6) + \ln(11)$ .... $\ln(17)$

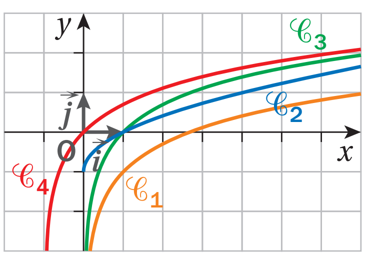
$\ln(8) - \ln(4)$ .... $\ln(2)$

$\ln(7) \times \ln(9)$ .... $\ln(63)$

$\ln[(\sqrt{2}-1)^{142}] + \ln[(\sqrt{2}+1)^{142}]$ 0

اختر الاجابة الصحيحة:

من بين المنحنيات المقابلة ، أي منها يمثل الدالة اللوغاريتمية النيبيرية؟



☐ $\mathscr{C}_1$ ☐ $\mathscr{C}_2$ ☐ $\mathscr{C}_3$ ☐ $\mathscr{C}_4$

أجزاء مفقودة:

وجد معاذ تمريناً في الرياضيات مع حله ، لكنه يتضمن أجزاء غير مقروءة بسبب ملامسته للحبر. ساعد معاذ على إيجاد الأجزاء التي خالطت بقع الحبر.

النص

أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا:

$\ln(1+e^{x}) = x + \ln(1+e^{-x}).$

الحـــل

من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا:

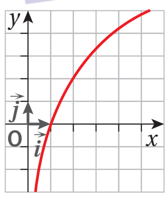
$$x + \ln(1+e^{-x}) = \ln(\ldots) + \ln(1+e^{-x})$$
$$= \ln(e^{x}(\ldots))$$
$$= \ln(\ldots + e^{x-x})$$
$$= \ln(e^{x} + \ldots)$$

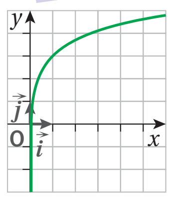
[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
[6] : MATH'x TS SPÉCIFIQUE

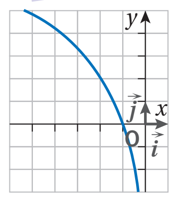
في أقل من دقــيقـة ! [6] الـــى الحـــل الانتقال

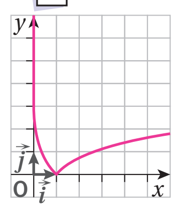
أرفق كل عبارة دالة بالتمثيل البياني الموافق لها:

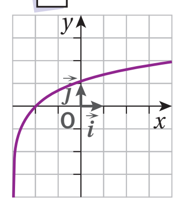
1. $f(x) = \ln(x) + 3$ **2.** $g(x) = |\ln(x)|$ **3.** $h(x) = 3\ln(-x)$ **4.** $k(x) = \sqrt{\ln(x)}$ **5.** $l(x) = \ln(x^3)$ **6.** $m(x) = \ln(x + 3)$

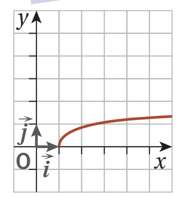
a. ☐


b. ☐


c. ☐


d. ☐


e. ☐


f. ☐


أسئلة الإختيار من متعدد: لكل سؤال من الأسئلة التالية ، ضع إطار حول الإجابة (أو الأجوبة) الصحيحة.

	A	B	C	D
01 $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ldots$	$-\ln(6)$	$\ln(6)$	$\ln\left(\frac{1}{6}\right)$	$\ln\left(\frac{5}{6}\right)$
02 $\ln(10e^2) = \ldots$	$2\ln(10) + 2$	$4{,}302\,585\,093$	$2\ln(10e)$	$\ln(10) + 2$
03 $e^{\ln(a) + \ln(b)} = \ldots$	ab	$a + b$	$\frac{a}{b}$	$a + \ln(b)$
04 $\ln(5a) - \ln(a) = \ldots$	$\ln(4a)$	$\ln(5)$	$4\ln(a)$	$\ln(5a - a)$
05 $\ln(e + e^2) = \ldots$	$\ln(e) + \ln(e^2)$	$\ln(e + 1) + 1$	$\ln(e^3)$	$\ln(3e)$
06 $\ln(64) = \ldots$	$2\ln(8)$	$\ln(2) \times \ln(32)$	$6\ln(2)$	$\ln(4) + \ln(16)$
07 الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{-x}$ **.1** صورة $\ln(2)$ بـ f هي:	$-2\ln(2)$	$\ln(2)$	$\frac{1}{2}\ln(2)$	$2\ln(2)$
.2 صورة $\ln(e^3)$ بـ f هي:	$3e^{-3}$	$\frac{3\ln(e)}{e^3}$	$-3e^{\ln(3)}$	$\frac{3}{e^3}$
08 $g(x) = \ln(\ln(x))$. $D_g =]1\ ;\ +\infty[$ $g'(x) = \ldots$	$\frac{1}{\ln(x)}$	$\frac{1}{x} \times \frac{1}{x}$	$\frac{1}{x\ln(x)}$	$\frac{1}{x}\ln(x)$

تطبيق 01: [3] [4] [5]

1 $\ln 3-\ln 3=0$

2 $ln\sqrt{\sqrt{2}+1}+ln\sqrt{\sqrt{2}-1}=ln\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)=ln\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=ln\sqrt{2-1}=ln1=0$

3 $\ln\sqrt{e^3}-\ln\frac{\sqrt{e}}{e^2}=\ln\left(e^3\right)^{\frac{1}{2}}-\ln e^{\frac{1}{2}}+\ln e^2=\ln e^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\ln e+2\ln e=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+2=3$

4 $\ln(128)^2-\ln(16\times 32)=\ln\left(2^7\right)^2-\ln\left(2^4\times 2^5\right)=\ln 2^{14}-\ln 2^9=14\ln 2-9\ln 2=5\ln 2$

تطبيق 02: [4] [5]

1 $\ln(x^2)$ معرف عندما $x^2>0$، أي $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2 $\ln(1-x)$ معرف عندما $1-x>0$، أي $x<1$، إذن $x\in\left]-\infty,1\right[$.

3 $\ln(x-3)$ معرف عندما $x-3>0$، أي $x>3$، إذن $x\in\left]3,+\infty\right[$.

4 $\frac{1}{x}\ln(1+x)$ معرف في حالة $(1+x>0$ و $x\neq 0)$ أي $(x>-1$ و $x\neq 0)$، إذن

$$x\in\left]-1,+\infty\right[\setminus\{0\}=\left]-1,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$$

5 $\frac{1}{\ln x}$ معرف في حالة $(x>0$ و $\ln x\neq 0)$ أي $(x>0$ و $x\neq 1)$، إذن

$$x\in\left]0,+\infty\right[\setminus\{1\}=\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$$

6 $\ln(x^2+4x)$ معرف عندما $x^2+4x>0$. x^2+4x ثلاثي حدود من الدرجة الثانية، جذراه 0 و -4، فتتحقق المتراجحة $x^2+4x>0$ خارج هذين الجذرين، بمعنى أنَّ $x\mapsto\ln(x^2+4x)$ معرف على $\left]-\infty,-4\right[\cup\left]0,+\infty\right[$.

7 $-x>0$ تكافئ: $x<0$ ومنه: $D=\left]-\infty;0\right[$

8 $\ln|x+1|-\ln|x-1|$ معرف في حالة $x+1\neq 0$ و $x-1\neq 0$ أي على $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$،

9 $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$ معرف عندما $\frac{x-3}{2-x}>0$. أي على المجال $\left]2,3\right[$.

[4]: الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
[5]: الكتاب المدرسي السوري
[3]: الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)

تطبيق 03: [3] [4] [6]

1 $2\ln x=\ln 9$ هذه المعادلة معرفة من أجل $x>0$ أي $D=]0,+\infty[$

$2\ln x=\ln 9$ تكافئ $2\ln x=2\ln 3$ ومنه $x=3$ وأخيرا $S=\{3\}$.

2 لدينا : $\ln x^2=4$ مجموعة التعريف : $D=\{x\in\mathbb{R}:x\neq 0\}$ ومنه : $D=\mathbb{R}^*$

وعليه المعادلة تكافئ : $\ln x^2=4\ln e$ أي : $\ln x^2=\ln e^4$ ومنه : $x^2=e^4$ أي : $x=e^2$ أو $x=-e^2$

إذن الحلول هي : e^2 , $-e^2$

3 لدينا : $\ln x-\ln(x-2)=1$ مجموعة التعريف : $D=\{x\in\mathbb{R}:x>0;x>2\}$

ومنه : $D=]2;+\infty[$ وعليه المعادلة تكافئ : $\ln\left(\dfrac{x}{x-2}\right)=\ln e$ أي أن : $\dfrac{x}{x-2}=e$ ومنه : $x=xe-2e$

إذن: $(1-e)x=-2e$ ومنه : $x=\dfrac{-2e}{1-e}$ مقبول (لأن $\dfrac{-2e}{1-e}>2$).

4 $(\ln x)^2-\ln x-6=0$ مجموعة التعريف : $x>0\Rightarrow D=]0;+\infty[\,;\ln x=X$

$$(\ln x)^2-\ln x-6=0\Rightarrow X^2-X-6=0\Rightarrow (X-3)(X+2)=0$$

$$\Rightarrow X=3 \text{ أو } X=-2\ \Rightarrow x=e^3 \text{ أو } x=e^{-2};\begin{cases}e^{-2}\in D\\ e^3\in D\end{cases}\Rightarrow \boxed{S=\{e^{-2};e^3\}}$$

5 $\ln|x+2|+\ln|x-2|=0$

المعادلة معرّفة على $I=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$. وهي تكافئ $|x-2||x+2|=1$ أو $|x^2-4|=1$. فإمّا

أن يكون $x^2=5$ أو يكون $x^2=3$. فمجموعة حلول المعادلة المعطاة هي $S=\{-\sqrt{5},-\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{5}\}$

تطبيق 04: [3] [4] [6] [5]

1 $-1\leq\ln x\leq 2$ المتراجحة $-1\leq\ln x\leq 2$ معرفة من أجل $x>0$ أي $D=]0,+\infty[$

$-1\leq\ln x\leq 2$ تكافئ $e^{-1}\leq x\leq e^2$ أي $S=\left[\dfrac{1}{e},e^2\right]$

2 المتراجحة $\ln(x^2-1)\geq 0$ معرفة من أجل $x^2-1>0$ أي $D=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$\ln(x^2-1)\geq 0$ تكافئ $(x^2-1)\geq 1$ أي $x^2\geq 2$ أي $x\geq\sqrt{2}$ أو $x\leq-\sqrt{2}$ إذن $S=\left]-\infty\ ,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2}\ ,+\infty\right[$

3 لدينا : $\ln|x|<1$ مجموعة التعريف : $D=\{x\in\mathbb{R}:x\neq 0\}$ و المتراجحة تكافئ : $\ln|x|<\ln e$

ومنه : $|x|<e$ إذن : $-e<x<e$ وعليه حلول المتراجحة هي المجموعة : $]-e;0[\cup]0;e[$.

4 $(\ln x)^2-1\leq 0\,;D=]0;+\infty[$

$$(\ln x)^2-1\leq 0\Rightarrow(\ln x-1)(\ln x+1)\leq 0\Rightarrow -1\leq\ln x\leq 1$$

$$\Rightarrow e^{-1}\leq x\leq e\Rightarrow\boxed{S=[e^{-1};e]}$$

つづく

[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)
[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
[6] : قواعد أساسية في الدوال اللوغاريتمية (واضحي عبد الكريم)
[5] : الكتاب المدرسي السوري

5 لدينا : $\left(x^2-4x\right)\ \ln x \geq 0$ مجموعة التعريف : $D=\left]0;+\infty\right[$

x	0		1		4		$+\infty$
x^2-4x		-	|	-	0	+	
$\ln x$		-	0	+	|	+	
$\left(x^2-4x\right)\ \ln x$		+	0	-	0	+	

مجموعة حلول المتراجحة : $\left]0\ ;\ 1\right]\cup\left[4\ ;\ +\infty\right[$.

6 لدينا : $\ln x+\ \ln\left(x-1\right)>\ \ln 6$ مجموعة التعريف : $D=\left\{x\in\mathbb{R}: x>0, x>1\right\}$ حيث : $D=\left]1;+\infty\right[$

و المتراجحة تكافئ : $\ln x\left(x-1\right)<\ \ln 6$ إذن : $x^2-x>6$

وعليه : $x^2-x-6>0$ ومنه : $\Delta=25$, $x_1=-2$, $x_2=3$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
x^2-x-6		+	0	-	0	+	

وعليه حلول المتراجحة هي المجموعة : $\left]-\infty;-2\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

لكن $D=\left]1;+\infty\right[$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي : $\left]3;+\infty\right[$

تطبيق 05: [3] [4] [5]

1 لدينا : $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln x$ الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\left]0;+\infty\right[$ حيث : $f'\left(x\right)=x-1+\frac{1}{x}=\frac{x^2-x+1}{x}$

2 الدالة f تقبل الاشتقاق على $\left]-\infty;\ln 2\right[\cup\left]\ln 3;+\infty\right[$ حيث : $f'\left(x\right)=\frac{2e^{2x}-5e^x}{e^{2x}-5e^x+6}$

3 $h(x)=ln\frac{x-1}{x+1}$. h معرفة على $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$.

$h(x)=ln\frac{x-1}{x+1}=ln|x-1|-ln|x+1|$ ومنه $h'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$.

4 الدالة f تقبل الاشتقاق على $\left]-\infty\ ;\ 0\right[\cup\left]0\ ;\ +\infty\right[$ حيث: $f'\left(x\right)=1\ln|x|+x\times\frac{1}{x}=\ln|x|+1$

つづく

[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)
[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
[6] : قواعد أساسية في الدوال اللوغاريتمية (واضحي عبد الكريم)
[5] : الكتاب المدرسي السوري

5 الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث: $f'(x)=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{x}\times(\ln x)=\frac{\ln x}{x}$

6 $f(x)=-\frac{x}{2}+1+2\ln x$. f معرفة على $D_f=]0,+\infty[$ و $f'(x)=\frac{4-x}{2x}$

7 $k(x)=\frac{x}{1-\ln x}$. k معرفة على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ و $k'(x)=\frac{1\times(1-\ln x)-\left(-\frac{1}{x}\right)x}{(1-\ln x)^2}=\frac{2-\ln x}{(1-\ln x)^2}$.

8 $f(x)=\frac{e}{\ln x}$. f معرفة على $D_f=]0,+\infty[$ و $f'(x)=-\frac{e}{x(\ln x)^2}$

تطبيق 06: [2] [4] [5]

1 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(x-\frac{\ln x}{x}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(x-\frac{1}{x}\ln x\right)=+\infty$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(x-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

3 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\frac{e^x}{x\ln x}=-\infty$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{1+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)=-\infty$

5 $\frac{\ln(x+1)}{x^2}=\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{1}{x}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ و $\lim\limits_{\substack{h\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{h\to0\\x<0}}\left(\frac{1}{x}\right)=-\infty$

وعليه : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right)=-\infty$

6 في جوار $+\infty$ لدينا $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{x}{\ln x}$. ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)=+\infty$ ،

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

7 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\substack{\tau\to0\\>}}\frac{\ln(1+\tau)}{\tau}=1$ (بوضع $\frac{1}{x}=\tau$) لما $x\longmapsto+\infty$ فإن : $\tau\overset{>}{\longmapsto}0$

つづく

8

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right]^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[2\ln\left(\sqrt{x}\right)\right]^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2=0$$

(بوضع $\sqrt{x}=t$) لما : $x\mapsto+\infty$ فإن : $t\mapsto+\infty$

تطبيق 07: [3]

1 $\log n=\log 2^{1234}=1234\log 2$ باستعمال الآلة الحاسبة نجد $\log n\simeq 371{,}47101....$

إذن الجزء الصحيح للعدد $\log n$ هو 371 .

2 بمأن الجزء الصحيح للعدد $\log n$ هو 371 فإن $371\le \log n<372$ ومنه $10^{371}\le 10^{\log n}<10^{372}$ ومنه $10^{371}\le n<10$.

3 لدينا $10^{371}\le 2^{1234}<10^{372}$ ومنه عدد أرقام العدد 2^{1234} هو إذن 372 رقما.

تطبيق 08: [4] [5]

1 نعلم أنّ $\log(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$، إذن $\log(10^n)=\dfrac{\ln 10^n}{\ln 10}=\dfrac{n\ln 10}{\ln 10}=n$ ومنه

$\log(1)=0$ و $\log(10)=1$ و $\log(100)=2$ و $\log(1000)=3$ و $\log(10000)=4$.

2 حساب S :

$$S=\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times.....\times\frac{88}{99}\times\frac{99}{1000}\right)=\log\left(\frac{1}{1000}\right)=-\log 1000=-\log 10^3=-3$$

3 حل كل المعادلات و المتراجحات :

- $\log 6=\log x+\log(x-1)$ تكون المعادلة معرفة من أجل : $x>0$ و $x-1>0$

و منه $x>1$ و عليه فالمعادلة معرفة على $]1;+\infty[$ و المعادلة (1) تكافئ : $\log x(x-1)=\log 6$ و هي تكافئ : $x(x-1)=6$

إذن : $x^2-x-6=0$ ومنه : $\Delta=25$; $x_1=-2$; $x_2=3$ و عليه للمعادلة حل وحيد $s=\{3\}$

- $2(\log x)^2+5\log x-3=0$ المعادلة معرفة من أجل $x>0$ بوضع $\log x=t$ نجد $2t^2+5t-3=0$ ومنه :

$\Delta=49$; $t_1=\dfrac{1}{2}$; $t_2=-3$ لما $t=\dfrac{1}{2}$: $\log x=\dfrac{1}{2}$ ومنه : $\dfrac{\ln x}{\ln 10}=\dfrac{1}{2}$ وعليه : $\ln x=\dfrac{1}{2}\ln 10$

ومنه : $\ln x=\ln\sqrt{10}$ وعليه : $x=\sqrt{10}$

لما $\tau=-3$: $\log x=-3$ وعليه : $\dfrac{\ln x}{\ln 10}=-3$ وعليه : $\ln x=\ln 10^{-3}$ و منه : $x=10^{-3}$

مجموعة حلول المعادلة هي : $s=\left\{\sqrt{10};10^{-3}\right\}$

つづく

- $log\,x > 3$ المتراجحة تكون معرفة من أجل $x > 0$ وهي تكافئ : $\frac{\ln x}{\ln 10} > 3$ أي : $\ln x > \ln 10^3$ وعليه : $x > 10^3$
مجموعة الحلول : $s = \left]10^3;+\infty\right[$
- $log(x-6) > 2logx$ تكون المتراجحة معرفة من أجل $x > 0$ و $x-6 > 0$ وعليه : $x > 6$ ومنه فهي معرفة على $\left]6;+\infty\right[$.
و المتراجحة تكافئ : $log(x-6) > logx^2$ وهي تكافئ : $x-6 > x^2$ إذن : $-x^2+x-6 < 0$ وعليه ليس للمتراجحة حلول .

تطبيق 09: [5]

- حساب درجة زلزال لوس انجلس : $M = \log(I/I_0) = log\,\frac{50.01\times 10^6 I_0}{I_0} = log\,\left(50.01\times 10^6\right) \approx 7.7$

تطبيق 10: [7]

- عوّض $pH = 4.5$ $4.5 = log\,\frac{1}{[H^+]}$

قاعدة القسمة $4.5 = log\,1 - log\,[H^+]$

أوجد قيمة $[H^+]$ $-4.5 = log\,[H^+]$

اكتب بالصيغة الأسيّة $10^{-4.5} = H^+$

إذن، التركيز المولي لأيونات الهيدروجين في الأمطار الحمضية هي $10^{-4.5}$ mol/L

[5] : الكتاب المدرسي السوري
[7] : الكتاب المدرسي القطري
[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

8 تحقق من فهمك الجيد للدرس :

أجب ب "صحّ" أو " خطأ": [4] [6]

1. $e^{5\ln(2)} \times e^{7\ln(4)} = 2^{19}$ ✓
2. الدالة: $x \mapsto (\ln x)^2$ معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ ✓
3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم α فإن
   $\ln 2^{\alpha} = \ln \alpha^2$ ✗
4. من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :
   $\ln|x| > 0$ ✗
5. إذا كان $|x| < 1$ فإن : $\ln|x| < 0$ ✓
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$ ✓
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} [\ln(-x)] = +\infty$ ✓
8. $\ln(-2)^{1830} = 1830\ln 2$ ✓
9. $\dfrac{\ln 12}{\ln 3} = \ln\dfrac{12}{3} = \ln 4$ ✗
10. للمعادلة $x\ln(x) = 3\ln(x)$ في المجال $]0\,;+\infty[$
    حلان مختلفان هما : 1 و 3 . ✓
11. من أجل كل عددان حقيقيان موجبان تماما :
    $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$ ✗
12. من أجل كل عددان حقيقيان موجبان تماما :
    $\ln(a) \times \ln(b) = \ln(a \times b)$ ✗
13. $(\ln(a))^n = n\ln(a)$: $n \in \mathbb{N},\ a > 0$ ✗
14. x و y عددان حقيقيان غير معدومين :
    إذا كان $\ln(x^2) = \ln(y^2)$ فإن $x = y$ ✗

وضّع إشارة كل عدد حقيقي مما يلي:

+ ln(1,01)	− ln(0,5)	+ ln(3)
+ $\ln(\sqrt{2})$	− $\ln(e^{-1})$	− ln(0,95)

أتمم مايلي: [6]

a. $\ln(e^{-5}) = -5$

b. $e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$

c. $\ln(e^{-1}) = -1$

d. $\ln\left(e^{\frac{1}{e}}\right) = \frac{1}{e}$

e. $e^{\ln(\sqrt{2})} = \sqrt{2}$

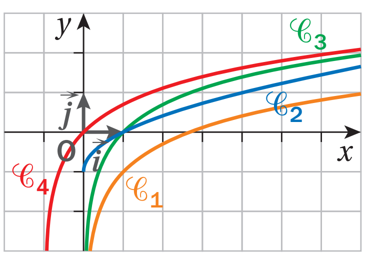
f. $\ln\left(e^{\frac{3}{7}}\right) = \frac{3}{7}$

أكمل بعلامة = أو ≠ مايلي:

ln(6) + ln(11)	≠	ln(17)
ln(8) − ln(4)	=	ln(2)
ln(7) × ln(9)	≠	ln(63)
$\ln[(\sqrt{2}-1)^{142}] + \ln[(\sqrt{2}+1)^{142}]$	=	0

اختر الإجابة الصحيحة:

من بين المنحنيات المقابلة ، أي منها يمثل الدالة اللوغاريتمية النيبيرية؟



☐ $\mathscr{C}_4$ ☑ $\mathscr{C}_3$ ☐ $\mathscr{C}_2$ ☐ $\mathscr{C}_1$

أجزاء مفقودة:

وجد معاذ تمريناً في الرياضيات مع حله ، لكنه يتضمن أجزاء غير مقروءة بسبب ملامسته للحبر. ساعد معاذ على إيجاد الأجزاء التي خالطت بقع الحبر.

النص

أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا:

$\ln(1+e^x) = x + \ln(1+e^{-x})$.

الحـــل

من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا:

$$
\begin{aligned}
x + \ln(1+e^{-x}) &= \ln(e^x) + \ln(1+e^{-x}) \\
&= \ln\left(e^x(1+e^{-x})\right) \\
&= \ln(e^x + e^{x-x}) \\
&= \ln(e^x + 1)
\end{aligned}
$$

[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

[6] : MATH'x TS SPÉCIFIQUE

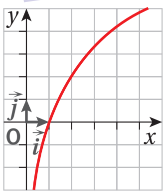
حل المراجعة السريعة

في أقل من دقيقة ! [6]

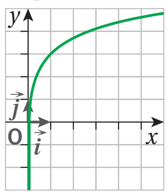
أرفق كل عبارة دالة بالتمثيل البياني الموافق لها:

1. $f(x)=\ln(x)+3$ **2.** $g(x)=|\ln(x)|$ **3.** $h(x)=3\ln(-x)$ **4.** $k(x)=\sqrt{\ln(x)}$ **5.** $l(x)=\ln(x^3)$ **6.** $m(x)=\ln(x+3)$

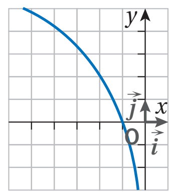
a. $\boxed{5}$



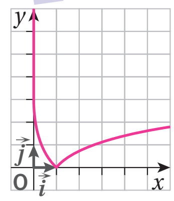
b. $\boxed{1}$



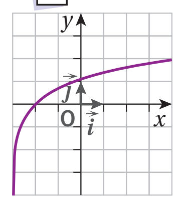
c. $\boxed{3}$



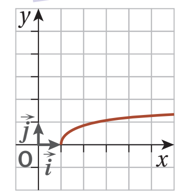
d. $\boxed{2}$



e. $\boxed{6}$



f. $\boxed{4}$



أسئلة الإختيار من متعدد:

لكل سؤال من الأسئلة التالية ، ضع إطار حول الإجابة (أو الأجوبة) الصحيحة.

	A	B	C	D
01 $\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{1}{3}\right)=\dots$	$\boxed{-\ln(6)}$	$\ln(6)$	$\boxed{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}$	$\ln\left(\frac{5}{6}\right)$
02 $\ln(10e^2)=\dots$	$2\ln(10)+2$	4,302 585 093	$2\ln(10e)$	$\boxed{\ln(10)+2}$
03 $e^{\ln(a)+\ln(b)}=\dots$	$\boxed{ab}$	$a+b$	$\frac{a}{b}$	$a+\ln(b)$
04 $\ln(5a)-\ln(a)=\dots$	$\ln(4a)$	$\boxed{\ln(5)}$	$4\ln(a)$	$\ln(5a-a)$
05 $\ln(e+e^2)=\dots$	$\ln(e)+\ln(e^2)$	$\boxed{\ln(e+1)+1}$	$\ln(e^3)$	$\ln(3e)$
06 $\ln(64)=\dots$	$\boxed{2\ln(8)}$	$\ln(2)\times\ln(32)$	$\boxed{6\ln(2)}$	$\boxed{\ln(4)+\ln(16)}$
07 الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{-x}$ **.1** صورة $\ln(2)$ بـ f هي :	$-2\ln(2)$	$\ln(2)$	$\boxed{\frac{1}{2}\ln(2)}$	$2\ln(2)$
.2 صورة $\ln(e^3)$ بـ f هي:	$\boxed{3e^{-3}}$	$\boxed{\frac{3\ln(e)}{e^3}}$	$-3e^{\ln(3)}$	$\boxed{\frac{3}{e^3}}$
08 $g(x)=\ln(\ln(x))$. $D_g=]1\,;+\infty[$ $g'(x)=\dots$	$\frac{1}{\ln(x)}$	$\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}$	$\boxed{\frac{1}{x\ln(x)}}$	$\frac{1}{x}\ln(x)$

1 تسيير واقتصاد 2010 الموضوع الأول (04 نقاط) ★

الانتقال إلى الحل

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=(\ln(x))^2+2\ln(x)-3$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس . ($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النبيري)

1 أ- حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $f(x)=0$ ثم فسِّر النتيجة هندسيا .

ب- حلل $f(x)$ إلى جداء عاملين .

جـ- حل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة : $2\ln(x)+2\geq 0$.

2 أحسب $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغيّر الدالة f .

3 بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

أحجية

01 ماهي المسافة القصوى التي يمكنك السفر بها مع دراجة بثلاثة إطارات جديدة. علماً أنّ كل إطار يجب استبداله بعد 6000 km ؟

2 الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد) ★

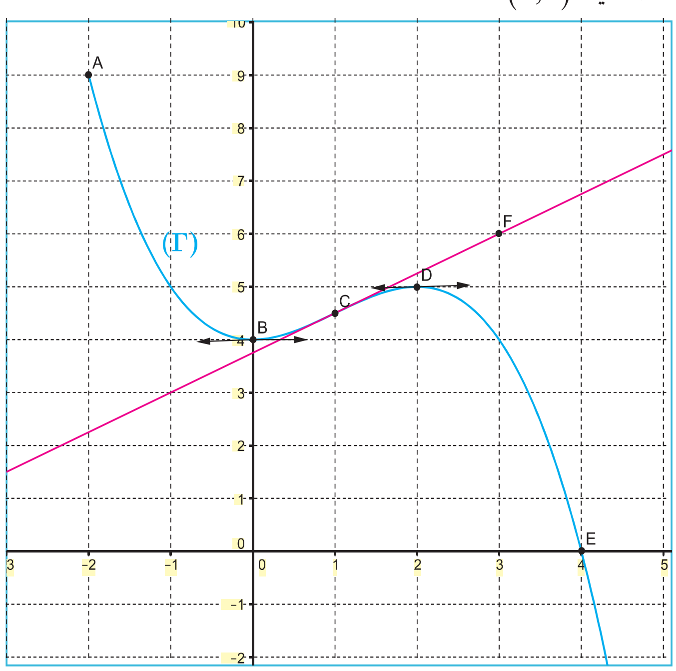
الانتقال إلى الحل

الدالة f المعرفة على المجال $[-2,5]$ و (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ والذي يشمل النقط

$A(-2,9)$,$B(0,4)$,$C\left(1,\frac{9}{2}\right)$,$D(2,5)$,$E(4,0)$.

في النقطتين B و D المماس للمنحنى (Γ) يوازي محور الفواصل.

المستقيم (CF) هو المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة C حيث $F(3,6)$



1 بقراءة بيانية :

أ) أدرس اتجاه تغيرات الدالة f حسب قيم x على المجال $[-2,5]$.

ب) أحسب $f'(2)$,$f'(1)$, $f(0)$.

ت) أدرس حسب قيم x من المجال $[-2,5]$ ، إشارة $f'(x)$.

ث) أدرس حسب قيم x من المجال $[-2,5]$ ، إشارة $f(x)$.

2 أوجد مجموعة تعريف الدالة g حيث g الدالة المعرفة بـ $g(x)=\ln(f(x))$.

3 أحسب $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$

4 عين $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} g(x)$

5 أحسب $g'(x)$ وانجز جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-2,4[$.

3 الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

الانتقال الـــ الحـــل

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي : $f(x)=-x^2+x+2\ln(x+1)$

(c) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1 – أدرس تغيرات الدالة f .

2 – هل توجد مماسات للمنحنى (c) معامل توجيهها 3 حيث يطلب كتابة معادلاتها في حالة وجودها .

3 – بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $2<x_0<\frac{5}{2}$

4 – أنشئ المماسات ذات معامل التوجيه 3 ثم أنشئ (c) .

5 – نعتبر الدالة g المعرفة بالعبارة: $g(x)=-x^2+|x|+2\ln(|x|+1)$

أ – أثبت أن g دالة زوجية .

ب – أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

ج – أنشئ التمثيل البياني (γ) للدالة g انطلاقا من (c).

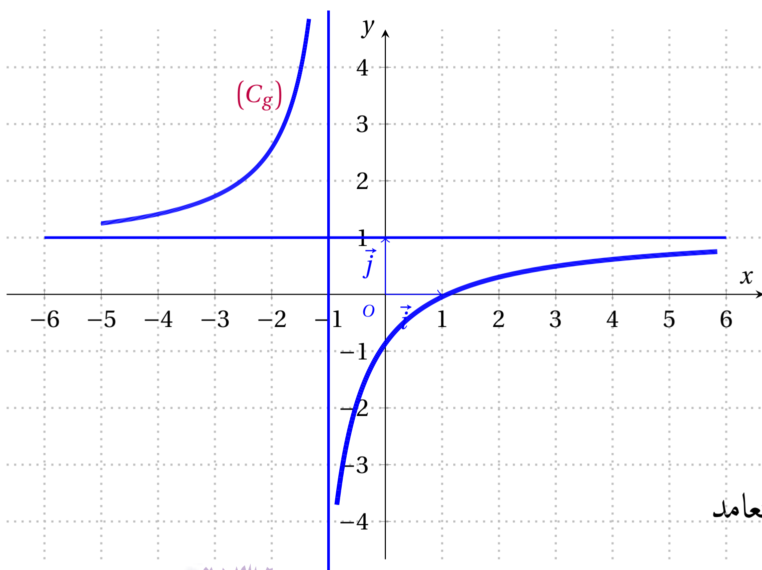
أحـجية

02 أحد قطعي الذهبية التسع مزيفة.
هي اكثر وزناً من الأخريات.
● كيف يمكن العثور عليها باستعمال ميزان ذو كفتين مرتين فقط.

4 BAC علوم تجريبية 2011 الموضوع الأول (07 نقاط)

الانتقال الـــ الحـــل

I - نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـِ: $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$
و(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (الشكل المقابل) بقراءة بيانية :



أ) شكّل جدول تغيرات الدالة g.

ب) حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$.

ج) عيّن بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$

II - لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـِ :
$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

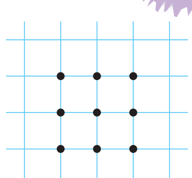
1 أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

2 أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$: $g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$.

ب) أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة f.

أحـجية

03 كيف نربط بين النقاط التسع برسم أربعة أضلاع و بدون رفع القلم؟



I - لتكن الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=-2x^2+2-\ln x$

1 أُدرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

2 احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II - f دالة عددية معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{-1+\ln x}{x}-2x+2e$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)$.

ب - بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-2x+2e$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

جـ - حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2 أ - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ب - استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

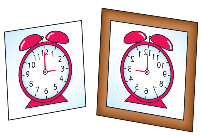
3 أ - أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]0,4;0,5[$.

ب - أنشئ (Δ) و (C_f).

أحـجية

04 منبه وينعكس في مرآة. نقرأ الساعة 03:00 عليه ، بينما تشير صورته إلى الساعة 09:00.

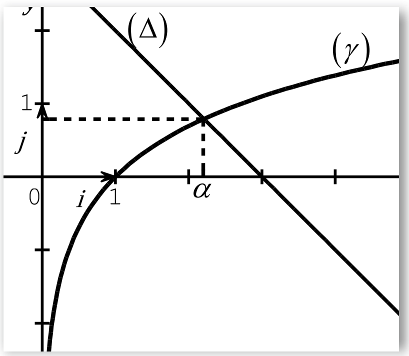
● جد توقيتاً على المنبه بحيث يكون فرق القراءة بين الإثنين هو 3 ساعات.



أولمبياد الرياضيات مقاطعة باريس

1 BAC علوم تجريبية 2015 الموضوع الأول (06.5 نقطة) ★★

الانتقال الـى الحـل



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$ ؛ α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ) .

1. بقراءة بيانية حدّد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0;+\infty[$.
2. g الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-3+\ln x$.
استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.
3. تحقّق أن: $2,2<\alpha<2,3$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1. احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. أثبت أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f .
3. بيّن أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ؛ ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
4. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ؛ ثمّ أنشئ (C_f) على المجال $]0\,;\,e^2]$.

III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقّق: $F(1)=-3$.

1. بيّن أنّ منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يُطلب تعيين فاصلتيهما.
2. بيّن أنّ $x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$ ؛ ثمّ استنتج عبارة الدالة F .

2 BAC علوم تجريبية 2012 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★

الانتقال الـى الحـل

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي: $f(x)=x+5+6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.
ب/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2. أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$: $f'(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x(x-1)}$
ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أ/ بين ان المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.
ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).
4. بين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $-3.5<\alpha<-3.4$ وَ $-1.1<\beta<-1$
5. أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

つづく

6 أ/ نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

بين أنّ $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

ب/ بين أنّ المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها.

7 لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي: $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$

- بين أنّ g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

3 BAC علوم تجريبية 2017 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★

الانتقال إلى الحل

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على D حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ،

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 بيّن أنّ الدالة f فردية ثم فسّر ذلك بيانيا.

2 احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب.

3 أ) بيّن أنّه من أجل كل x من D ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

أحجية

05 يتدرّب ثلاثة عدائين A,B و C للماراثون. في نفس الوقت B يتواجد بين A و C ، A يتواجد بين B و C ، و C يتواجد بين A و B.

● كيف يمكن أن يحدث هذا ؟

4 بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}8<\alpha<1{,}9$.

5 بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=\frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

6 أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

7 m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$.

4 BAC علوم تجريبية 2018 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★

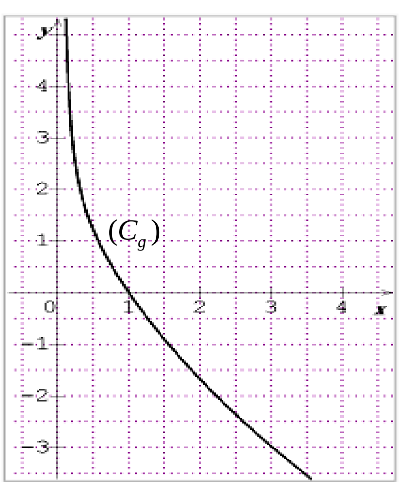
الانتقال إلى الحل

I) g الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$ و (C_g) المنحنى البياني الممثل لها

كما هو مبيّن في الشكل المقابل:

– احسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.



II) f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$

بـ: $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$ (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;i,j)$.

1 احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ثم فسّر النتيجتين بيانيا.

つづく

2 أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3 بيّن أنّ $y=\left(\dfrac{e^2}{e-1}\right)x-\dfrac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ(T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل، ثم ارسم المماس (T) و المنحنى (C_f).

4 عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلّين متمايزين.

III) n عدد طبيعي حيث $n>1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1 بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

2 ادرس اتجاه تغير المتتالية (I_n).

5 BAC علوم تجريبية 2009 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★

الانتقال إلى الحل

I) h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$

1 احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

2 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

واستنتج اتجاه تغير الدالة h، ثم أنجز جدول تغيراتها.

3 احسب $h(0)$ واستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x.

II) لتكن f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أ/ احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب/ باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، برهن أنّ $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$

ج/ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

د/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ه/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل .

2 بين أنه من أجل كل $x\in\ ]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

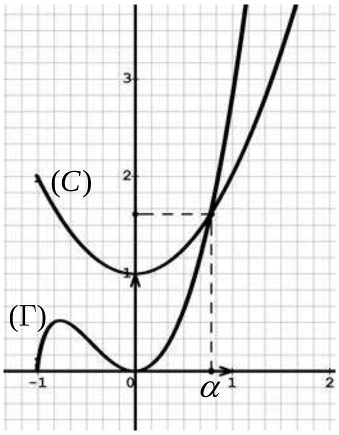
3 بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3.3 و 3.4

4 ارسم (C_f)

5 احسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$y=x-1$; $x=0$ و $x=1$

1 BAC رياضيات 2021 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★★ — الانتقال إلى الحل



I) المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس.

في الشّكل المقابل (C) و (Γ) هما على التّرتيب التّمثيلان البيانيان للدّالتين العدديتين المعرّفتين على المجال $]-1;+\infty[$ بـ:

$x\mapsto 1+x^2$ و $x\mapsto 2x(1+x)\ln(1+x)$

(C) و (Γ) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها α تُحقّق: $0{,}78<\alpha<0{,}79$

الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)$$

1 بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم x من المجال $]-1;+\infty[$ وضعية (C) بالنسبة إلى (Γ)

2 استنتج حسب قيم x من المجال $]-1;+\infty[$ إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة: $2cm$)

1 أ. احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)$ و بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ب. فسّر النّهايتين هندسيا.

2 أ. بيّن أنّه من أجل كلّ x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)(1+x^2)^2}$

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

جـ. بيّن أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ ثمّ استنتج حصرا لِـ $f(\alpha)$

د. اكتب معادلة لِـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند المبدأ O

3 ارسم (T) و (C_f) (نأخذ: $f(\alpha)\simeq 0{,}36$)

4 الدّالة العددية h معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=\dfrac{\ln(1+|x|)}{1+x^2}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

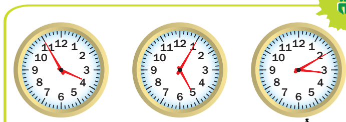
ب. بيّن أنّ الدّالة h غير قابلة للاشتقاق عند الصفر ثمّ فسّر ذلك بيانيا.

جـ. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثمّ ارسمه.

أحجية

06 إحدى هذه الساعات تتقدم في التوقيت بـ 45min والأخرى تتأخر بـ 1h و 10min، والأخيرة معطلة.

كم التوقيت الصحيح؟



2 BAC تقني رياضي 2013 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★★ — الانتقال إلى الحل

I) الدّالة g معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=(x+1)^2-2+\ln(x+1)$.

1 ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$.

2 بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0{,}31<\alpha<0{,}32$ وأنّ: $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$.

3 استنتج، حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

II) الدّالة f معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2$.

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

つづく

1 احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 أثبت أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x+1}$.

3 ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

4 بيّن أنّ: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5 مثّل المنحنى (C_f) على المجال $]-1;2]$.

III) (Γ) المنحنى الممثل للدّالة h المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

1 أثبت أنّ المسافة AM تعطى بالعبارة $AM=\sqrt{f(x)}$.

2 الدّالة k معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ - بيّن أنّ للدالتين k و f نفس اتجاه التغيّر على المجال $]-1;+\infty[$.

ب - عيّن إحداثيتي النقطة B من (Γ)، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

جـ - بيّن أنّ: $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$.

3 BAC رياضيات 2013 الموضوع الأول (06 نقاط) ★★★

الانتقال الـى الحـــل

I) 1 الدالة u معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $u(x)=e^x-3x+4-e$

ا) ادرس اتجاه تغير الدالة u.

ب) بين انه، من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $e^x-e>3x-4$

2 الدالة v معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $v(x)=-3x^3+4x^2-1+\ln x$

ا) بين ان : $v'(1)=0$. (يرمز v' الى الدالة المشتقة للدالة v)

ب) اثبت انه، من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $v(x)\le 0$

ج) استنتج، انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $\dfrac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$

3 اثبت انه، من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $e^x-e+\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0$

II) الدالة f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=e^x-ex+\dfrac{\ln x}{x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1 احسب : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

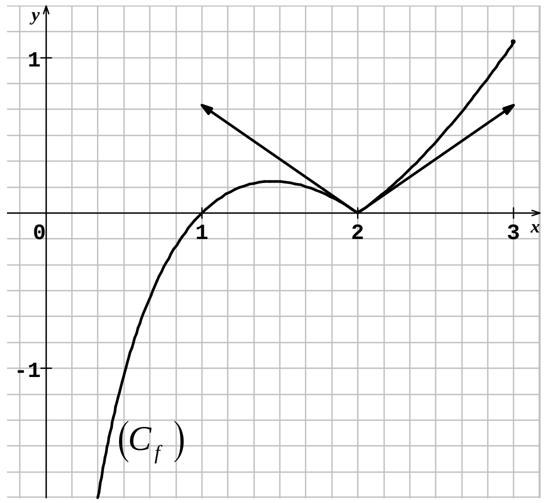
2 بين ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 احسب $f(1)$ ، ثم مثل المنحنى (C_f) على المجال $\left]0;\dfrac{5}{2}\right]$.

(ناخذ : $f(2)\approx 2.3$ ، $f(1.64)\approx 1$ و $f\left(\dfrac{5}{2}\right)\approx 5.75$).

4 احسب مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x=\dfrac{1}{2}$ و $x=2$

4 BAC تقني رياضي 2014 الموضوع الثاني (06 نقاط) ★★★ الانتقال الــى الحـــل



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

I) g الدالة المعرفة على المجال $]0;3]$ بـ: $g(x)=x\ln x+x$

1 أدرس تغيرات الدالة g

2 أ) بيّن أن المعادلة $g(x)=2$ تقبل حلا وحيدا ~ في $]0;3]$

ثم تحقق أن $1,45<\sim<1,46$

ب) استنتج إشارة $g(x)-2$

II) التمثيل البياني المقابل (C_f) هو للدالة f المعرفة على

المجال $]0;3]$ بـ: $f(x)=|x-2|\ln x$

1 باستعمال (C_f) ضع تخمينا حول قابلية اشتقاق الدالة f عند 2

2 أثبت صحة تخمينك.

3 أدرس تغيرات الدالة f

III) h الدالة المعرفة على $\left[0;\frac{®}{2}\right[$ كما يلي: $h(x)=(2-\cos x)\ln(\cos x)$

1 بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{®}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h)؛ حيث (C_h) هو التمثيل البياني للدالة h

2 أدرس اتجاه تغير الدالة h، ثم شكل جدول تغيراتها وارسم (Δ) و (C_h)

5 BAC شعبة علوم الطبيعة والحياة 2004 (النظام القديم) ★★★ الانتقال الــى الحـــل

لتكن f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=1-\frac{\ln x^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس تغيّرات الدالة f .
2. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $(\Delta): y=1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.
3. احسب $f(-x)+f(x)$ ، ماذا تستنتج ؟
4. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-0,71;-0,70[$
5. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمسّ المنحنى (C_f) في نقطتين يطلب حساب إحداثيات كل منهما، اكتب معادلة المماس (T).
6. أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f).
7. ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx+1$
8. h الدالة العددية للمتغيّر الحقيقي x حيث: $h(x)=1+\frac{\ln x^2}{|x|}$.

أ) بيّن أنّ h دالة زوجية.

ب) دون دراسة تغيّرات h ، أرسم (C_h)، علل ذلك.

أحــجية

07 تعيش زهور "زئبق الماء" في المسطحات المائية ، يحتاج "زئبق الماء" الذي تتضاعف مساحته يوميا 30 يوما لتغطية نصف البركة. كم عدد الأيام التي يستغرقها لتغطية البركة بأكملها؟

1 BAC رياضيات 2020 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★★★★

الانتقال الى الحل

الدالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)$.

ليكن (C_f) المنحنى البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ بيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$.

جـ. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2 نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=f(x)-x$.

أ. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $g'(x)=\dfrac{-9x^2+8}{\left(\sqrt{9x^2+1}\right)\left(3+\sqrt{9x^2+1}\right)}$

جـ. ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $[0;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها. (نأخذ $g\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\approx 0{,}8$)

3 أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left[\dfrac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right[$ ثمّ تحقّق أنّ: $2.83<\alpha<2.84$.

ب. استنتج إشارة $g(x)$ على $[0;+\infty[$.

جـ. حدّد الوضع النسبي للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ و المنحنى (C_f) على المجال $[0;+\infty[$.

4 نعتبر الدالة k المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $k(x)=\ln(6x)$ و ليكن (γ) منحنيها البياني في المعلم السابق.

أ. بيّن أنّ (γ) هو صورة منحنى الدالة: $x\mapsto \ln x$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه.

ب. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-k(x)\right]$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

5 أ. بيّن الدالة f فردية.

ب. انشئ كلا من (Δ) ، (γ) و (C_f) على المجال $[0;+\infty[$ ثمّ استنتج انشاء المنحنى (C_f) على $\mathbb{R}$.

أحجية

08 كيف يمكنك صنع 4 مثلثات متقايسة الأضلاع باستعمال 6 أعواد ثقاب فقط ؟

2 بكالوريا 1996 كاليدونيا الجديدة (فرنسا) ★★★★

الانتقال الى الحل

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=e^{\frac{x}{2}}-e^{x}$

1 حدّد نهاية g عند $-\infty$ ثم عند $+\infty$.

2 اوجد $g'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير g ، شكل جدول تغيرات $g(x)$.

3 احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية .

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $f(x)=\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|$

و نسمي $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

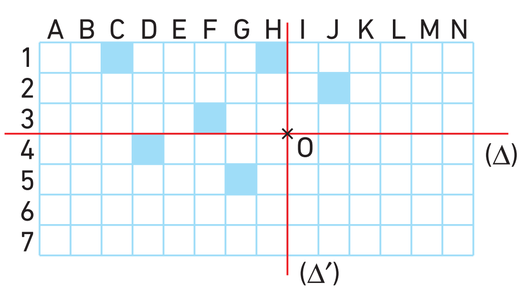
1 حدد نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ و عند 0 .

2 احسب $f'(x)$ ، ثم عين إشارتها باستعمال إشارة $g(x)$ و إشارة $g'(x)$.

أحجية

09 أكمل الشكل بتلوين الحد الأدنى من المربعات بحيث:

- تكون النقطة O مركز تناظر الشكل النهائي ،
- يكون المستقيمان (Δ) و (Δ') محورا تناظره.



つづく

3 استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها .

4 اوجد فاصلة نقطة تقاطع بيان $(\mathcal{C})$ f مع محور الفواصل .

5 أ)- بين أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ لدينا $f(x)-x=\ln\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)$.

ب)- استنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحني $(\mathcal{C})$ بجوار $(+\infty)$.

ج)- ثم ادرس وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمقارب (D) في المجال $]0;+\infty[$.

6 أ)- بين أنه من أجل كل $x \in]-\infty;0[$ لدينا $f(x)-\frac{x}{2}=\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$.

ب)- استنتج ان المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=\frac{x}{2}$ مقارب للمنحني $(\mathcal{C})$ بجوار $(-\infty)$.

ج)- ثم ادرس وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمقارب (Δ) في المجال $]-\infty;0[$.

7 ارسم $(\mathcal{C})$ ، (D) و (Δ) في المعلم السابق .

8 m عدد حقيقي نعتبر المعادلة (1) ذات المجهول الحقيقي x حيث $\ln\left|e^{x\left(\frac{1}{2}-m\right)}-e^{x(1-m)}\right|=0$

أ)- بين انه (1) تكافئ $f(x)=mx$.

ب)- استنتج بيانيا عدد واشارة حلول المعادلة (1) .

أحجية

10 ما قيس الزاوية التي يصنعها عقربا ساعة تشير إلى 12 h 05 ؟

3 كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق) ★★★★

الانتقال الــى الحــل

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرّفة على $]1;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=2-x-\ln(x-1)^2$.

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 عيّن نهايتي الدالة g عند 1 وَ عند $+\infty$.

2 أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

3 أحسب $g(2)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]1;+\infty[$.

4 بيّن أنّ المعادلة $|g(x)|=1$ تقبل على المجال $]1;+\infty[$ حلان α و β ،
حيث : $1,70<\alpha<1,71$ وَ $2,37<\beta<2,38$.

5 أ) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_g) عند النقطة ذات الترتيبة 1 ، ثم جد حصراً للعدد $\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}$.

ب) أنشئ كلاً من (Δ) و المنحنى (C_g) .

ج) m عدد حقيقي ، ناقش بيانيا و حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $2-2\ln(x-1)=\dfrac{-2}{\alpha-1}x+m$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرّفة على $]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\left[x-1+2\ln(x-1)\right]\left[x-3+2\ln(x-1)\right]$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$ يكون : $f(x)=\left[g(x)\right]^2-1$.

2 عيّن نهايتي الدالة f عند 1 وَ عند $+\infty$.

3 أ) أحسب $f'(x)$ و هذا من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$.

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

4 أ) جد إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل .

أحجية

11 قسم ، به 9 أولاد وَ 13 فتاة. نصف التلاميذ يعانون من نزلات البرد.

● ماهو الحد الأدنى لعدد الفتيات المصابات بنزلات البرد؟

a. 0 b. 1 c. 2 d. 3 e. 4

つづく

ب) أنشئ المنحنى (C_f) في المعلم السابق .

5 لتكن h هي الدالة المعرّفة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ بـ : $h(x)=(\cos x+2\ln(\cos x))(-2+\cos x+2\ln(\cos x))$

أ) بيّن أنّ : $h=f\circ u$ ، حيث u دالة يطلب تعيين عبارتها .

ب) عيّن نهاية الدالة h عند $\frac{\pi}{2}$ ، وَ فسّر النتيجة هندسياً ، ثمّ استنتج إتجاه تغيّر الدالة h .

ج) شكّل جدول تغيرات الدالة h ، ثمّ أنشئ (Γ) منحنى الدالة h .

4 استعد للبكالوريا مع توامي (توامي عمر) ★★★★★

الانتقال الحل

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=xe^x-1$

1 أدرس تغيرات الدالة g .

2 أثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,567<\alpha<0,568$.

3 استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بالعبارة : $f(x)=\left(e^x-\ln|x|\right)^2$

وَ ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=2\|\vec{j}\|$.

1 أثبت أنه من أجل كل $x>0$ فإن : $f(x)=x^2\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)^2$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2 أ- بين أن المعادلة $e^x-\ln(-x)=0$ تقبل حلاً وحيداً β حيث $\beta\in]-1,4\ ;\ -1,3[$.

ب- استنتج على $\mathbb{R}-\{0\}$ حلول المتراجحات : $e^x>\ln(x)$ ، $e^x<\ln(-x)$ وَ $e^x\geq\ln(-x)$.

3 أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{0\}$ فإن : $f'(x)=\frac{2}{x}\left(e^x-\ln|x|\right)g(x)$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f .

4 بين أن : $f(\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)^2$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$ سعته 10^{-2} .

5 شكل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم (C_f) على المجال $[-7;0[\cup]0;2]$.

6 ناقش حسب قيم الوسيط m $(m\in\mathbb{R}^+)$ ، عدد وَ إشارة حلول المعادلة : $e^x-\ln|x|-\sqrt{m}=0$.

5 BAC تقني رياضي 2013 الموضوع الثاني (07.5 نقطة) ★★★★★

الانتقال الحل

I) الدّالة g معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^x$.

1 ادرس تغيّرات الدالة g .

2 بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x: $1+(x-1)e^x\geq 0$.

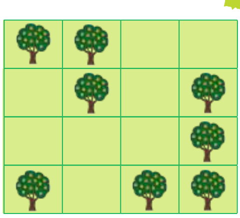
II) الدّالة f معرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{e^x-1}{x};x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

1 أ - بيّن أنّ f مستمرة على $[0;+\infty[$.

ب - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

أحجية

12 قسّم هذا البستان إلى أربع قطع من نفس المساحة ونفس الشكل بحيث يحتوي كل منها على نفس عدد أشجار البرتقال .



つづく

2 **أ -** تحقّق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1+(x-1)e^{x}}{x^{2}}$.

ب - استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

III) n عدد طبيعي حيث $n\geq 1$ ؛ f_n الدّالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f_n(x)=\dfrac{e^{x}-1}{x}+n\ln x$.

و (C_n) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 ادرس اتجاه تغيّر الدالة f_n على $]0;+\infty[$.

2 احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

3 ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}).

4 بيّن أنّ جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثيتيها .

5 **أ -** بيّن أنّه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$.

ب - بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ فإنّ: $f_n(\alpha_1)<0$ ، ثمّ برهن أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$.

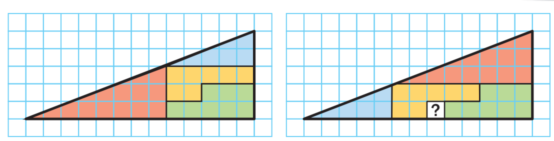
6 **أ -** بالاعتماد على الجزء **II -** ؛ بيّن أنّه، من أجل كل x من $]0;1]$: $\dfrac{e^{x}-1}{x}\leq e-1$.

ب - استنتج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$: $\ln(\alpha_n)\geq\dfrac{1-e}{n}$ ، ثمّ $\alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

جـ - جد نهاية المتتالية (α_n).

أحجية

13 من أين أتى المربع الأبيض؟



حل الأحجية

شاهد الحل عبر الرابط التالي:

1 أشبال الأمة 2016 (شعبة العلوم الدقيقة 2005) ★★★★★

الانتقال إلى الحل

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما α، نعتبر الدالة f_α المعرفة على المجال $\left]-\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ بـ: $f_\alpha(x)=\ln(\alpha x+1)-\alpha x$.

$(\mathcal{C}_\alpha)$ المنحنى الممثل للدالة f_α في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الجزء الأول :

1 ادرس اتجاه تغيّر الدالة f_α.

2 استنتج أنه من أجل كل عدد x موجب تماما يكون: $\ln(\alpha x+1)<\alpha x$.

3 بيّن أن كل المنحنيات $(\mathcal{C}_\alpha)$ تتقاطع في نقطة يُطلب تحديد إحداثييها.

الجزء الثاني:

1 باستعمال السؤال 2. من الجزء الأول، بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم β يكون: $\ln(1+\beta)-\ln\beta<\frac{1}{\beta}$.

2 استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

3 استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$.

4 أ- عيّن إحداثيي النقطة ω التي يكون عندها معامل توجيه المماس للمنحنى $(\mathcal{C}_1)$ يساوي 1.

ب- اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى $(\mathcal{C}_1)$ عند النقطة ω.

5 أ- احسب كلا من $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f_1(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$؛ ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f_1.

ب- أرسم (Δ) ثم المنحنى $(\mathcal{C}_1)$.

الجزء الثالث :

لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\ln(1+|x|)-|x|$. $(\mathcal{C}_g)$ منحنها الممثل في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 ادرس قابلية اشتقاق الدالة g عند الصفر.

2 بيّن كيف يمكن إنشاء $(\mathcal{C}_g)$ اعتمادا على $(\mathcal{C}_1)$؛ ثم أرسم $(\mathcal{C}_g)$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2 كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق) ★★★★★

الانتقال إلى الحل

ليكن m وسيط حقيقي ، نعتبر الدالة f_m المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f_m(x)=\frac{x^2-1}{2}-m\ln x$.

وليكن (C_m) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 أحسب نهاية الدالة f_m عند $+\infty$.

2 حسب قيم m ، أحسب نهاية الدالة f_m عند 0 .

3 أ) أحسب $f_m'(x)$ ، حيث : f_m' هي الدالة المشتقة للدالة f_m .

ب) ثم استنتج حسب قيم m جداول تغيرات الدالة f_m الممكنة .

つづく

4 لتكن $M_0(x_0;y_0)$ نقطة من المستوي ، حيث : $x_0>0$.

- بين أنه يوجد منحني وحيد (C_m) يشمل النقطة M_0 .

5 أثبت أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة A يطلب تعيين إحداثياها .

6 أنشئ كلا من : (C_0) و (C_4) ، (C_{-1}) في نفس المعلم .

3 مجلة Top Maths في الدوال الوسيطية والمدمجة ★★★★★ الانتقال الـــى الحـــل

نعتبر الدالة f_k المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f_k(x)=x(\ln x)^2+kx$ حيث : $(k\in\mathbb{R})$ و ليكن (C_k) هو المنحني الممثل للدالة f_k في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) نفرض فيما يلي : $k=0$ و لنعتبر (C_0) المنحني الممثل للدالة f_0 .

1 أحسب نهاية الدالة f_0 عند 0 و عند $+\infty$ (يمكن وضع : $X=\sqrt{x}$ عند حساب النهاية عند 0) .

2 أدرس إتجاه تغير الدالة f_0 و شكل جدول تغيراتها .

3 أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_0) عند النقطة ذات الفاصلة e .

4 أنشئ المماس (T) و المنحني (C_0) .

II) نفرض فيما يلي : k عدد حقيقي كيفي .

1 أحسب نهاية الدالة f_k عند كل من 0 و $+\infty$.

2 أحسب : $f'_k(x)$ ، ثم أدرس إشارتها و ذلك حسب قيم k .

3 نعتبر A_k هي النقطة من المنحني (C_k) التي فاصلتها 1 .

- بين أن المماس (T_k) عند النقطة A_k للمنحني (C_k) هو المستقيم (OA_k) .

4 بين أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ الوضع النسبي للمنحنيين (C_k) و $(C_{k'})$ يترتب على مقارنة العددين k و k' .

- إستنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_{-3}) و (C_{-2}) .

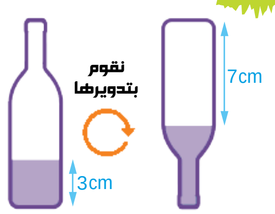
5 نعرف على المجال $[0;+\infty[$ الدالة g_k كما يلي : $\begin{cases} g_k(x)=f_k(x) \ ; \ x>0 \\ g_k(0)=0 \end{cases}$.

- أحسب : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g_k(x)-g_k(0)}{x}$. مـاذا تعني هذه النتيجة المحصل عليها ؟ .

أحـــجية

14 قارورة مكوّنة من أسطوانة وعنق سعتها 1,5 لتر.

● ما كمية السائل الموجودة في القارورة؟



4 كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق) ★★★★★

الانتقال إلى الحل

n عدد طبيعي غير معدوم. نعتبر الدالة f_n المعرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f_n(x)=x^n\ln(1+x)$.

و ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. و حدته: $2cm$.

1 نعتبر الدالة h_n المعرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $h_n(x)=n\ln(1+x)+\dfrac{x}{x+1}$.

أ) أدرس إتجاه تغيّر الدالة h_n.

ب) أحسب $h_n(0)$، ثمّ عيّن إشارة $h_n(x)$ من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$.

2 أ) تحقّق أنّه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ تكون: $f_1'(x)=h_1(x)$ وَ $f_n'(x)=x^{n-1}\times h_n(x)$.

ب) نفرض n فردي، بيّن أنّ: $f_n'(x)$ وَ $h_n(x)$ من نفس الإشارة.

❖ شكّل عندئذ جدول تغيّرات الدالة f_n في حالة n فردي، مع حساب النهايات عند -1 وَ $+\infty$.

ج) نفرض n زوجي، شكل جدول تغيرات الدالة f_n، مع حساب النهايات عند -1 وَ $+\infty$.

3 أ) حدّد وضعية المنحنيين (C_1) وَ (C_2).

ب) أنشئ كلاً من (C_1) وَ (C_2).

5 تمارين مهمة للأساتذة لتعميق المفاهيم (قليل مصطفى) ★★★★★

الانتقال إلى الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+x\ln x$ نرمز بـ(C) إلى التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الرسم المرفق)

الجزء الأول : الهدف من هذا الجزء هو حصر A مساحة الحيز المحدد بـ(C) ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتاهما : $x=1$ و $x=2$

نسمي M و N النقطتين من (C)فاصلتاهما 1 و 2 على الترتيب و P و Q مسقطاهما العموديان على محور الفواصل

1 أ) بين ان الدالة f موجبة على$[1;2]$

ب) بين ان معامل توجيه المستقيم (MN) هو $2\ln 2$

ج) لتكن E النقطة ذات الفاصلة $\frac{4}{e}$. بين انه على المجال $[1;2]$ النقطة E هي الوحيدة من (C) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (MN)

د) نسمي (T) المماس عند النقطة E . بين ان معادلة(T) هي : $y=(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1$

2 لتكن الدالة g المعرفة على $[1;2]$ بـ: $g(x)=f(x)-\left[(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1\right]$

أ) عين مشتقة الدالة g وبين ان $g'(x)=1+\ln\left(\frac{x}{4}\right)$

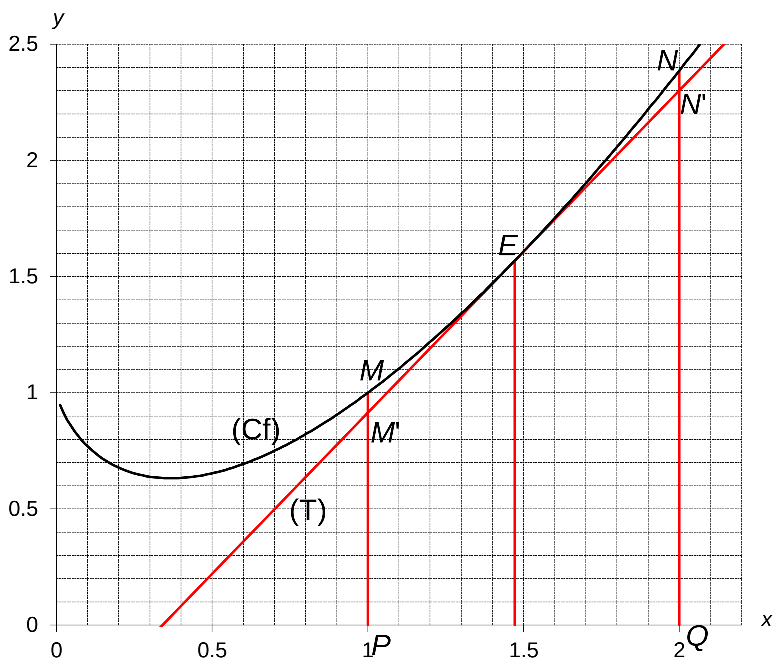
ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على$[1;2]$ ثم استنتج وضعية (C) بالنسبة الى (T)على هذا المجال

3 لتكن M' و N' النقطتين من(T) فاصلتاهما 1 و 2 على الترتيب . نقبل ان (C) يبقى تحت المستقيم (MN) على المجال $[1;2]$ وان النقطتين M' و N' ترتيباهما موجبان تماما

أ) احسب مساحة كلا من شبه المنحرف $MNQP$ و $M'N'QP$

ب) استنتج حصرا للمساحة A بتقريب 10^{-1}

つづく



الجزء الثاني: الهدف من هذا الجزء هو تعيين القيمة المضبوطة للمساحة A

1 باستعمال مكاملة بالتجزئة احسب $\int_1^2 x \ln x dx$

2 استنتج القيمة المضبوطة لـ A

أحـــجية

15 **من بين 100 شخص تم استجوابهم ، أجاب 96 بأن لديهم تلفازاً و أجاب 72 شخصاً بامتلاكهم جهاز لوحي رقمي.**

- **ما هو العدد الأدنى من الأشخاص الذين لديهم كلا الجهازين؟**


مسائل المستوى الأول ★

التمرين 01

مجلة العبقري في الرياضيات (بوعزة مصطفى)

لدينا: $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3$ و $D_f =]0; +\infty[$.

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس. (ln هو رمز اللوغاريتم النيبيري)

1)أ) حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة: $f(x) = 0$:

لدينا: $f(x) = 0$ يعني: $(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$

وبوضع: $\ln x = Y$ نجد: $Y^2 + 2Y - 3 = 0$ ...(1)

مميزها: $\Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 16 > 0$

المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين هما: $Y' = \frac{-2+\sqrt{16}}{2(1)} = 1$ و $Y'' = \frac{-2-\sqrt{16}}{2(1)} = -3$.

- من أجل $Y' = 1$ يكون $\ln x = 1$ ومنه: $\boxed{x = e}$.
- من أجل $Y'' = -3$ يكون $\ln x = -3$ ومنه: $\boxed{x = e^{-3}}$. إذن: $\boxed{S = \{e^{-3}; e\}}$.

تفسير النتيجة هندسيا: (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما، e و e^{-3}.

ب) تحليل $f(x)$ إلى جداء عاملين:

كثير الحدود $Y^2 + 2Y - 3$ يقبل جذرين متمايزين هما، $Y' = 1$ و $Y'' = -3$.

فيُكتب من الشكل: $Y^2 + 2Y - 3 = 1(Y - Y')(Y - Y'') = (Y - 1)(Y + 3)$

ومن أجل $\ln x = Y$ نجد: $\boxed{f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = (\ln x - 1)(\ln x + 3)}$.

جـ) حل في المجال $]0; +\infty[$ المتراجحة: $2\ln x + 2 \geq 0$:

$2\ln x + 2 \geq 0$ تكافئ $\ln x \geq -1$ ومنه: $x \geq e^{-1}$ أي: $x \geq \frac{1}{e}$ إذن: $\boxed{S = \left[\frac{1}{e}; +\infty\right[}$.

2) حساب $f'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة f:

f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$، ولدينا: $\boxed{f'(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x) + 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2\ln x+2}{x}}$.

ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(2\ln x + 2)$ على المجال $]0; +\infty[$.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$2\ln x + 2$		-	0	+	
$f'(x)$		-	0	+	

إذن: f متناقصة تماما على المجال $\left]0; \frac{1}{e}\right]$، ومتزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$.

3) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها:

لدينا: $f''(x) = \frac{2\left(\frac{1}{x}\right)\times x - 1\times(2\ln x+2)}{x^2} = \frac{2-(2\ln x+2)}{x^2} = \frac{-2\ln x}{x^2} = \frac{2(-\ln x)}{x^2}$.

ومنه: إشارة $f''(x)$ من إشارة $(-\ln x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		-	0	+	
$f''(x)$		+	0	-	

نلاحظ أن: $f''(x)$ تنعدم عند 1 مغيرة إشارتها، إذن: (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي: $I(1; f(1))$ أي: $\boxed{I(1; -3)}$.

مسائل المستوى الأول

التمرين 02

المتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)

.1

أ) دراسة اتجاه تغيرات الدالة f حسب قيم x على المجال $[-2\,,5]$:

- الدالة f متناقصة على كل من المجالين $[-2\,,0]$ و $[2\,,5]$.
- الدالة f متزايدة على المجال $[0\,,2]$.

ب) حساب $f(0)$ ، $f'(2)$ ، $f'(1)$.

حساب $f(0)$: المنحني يشمل النقطة $B(0\,,4)$ إذن $f(0)=4$.

حساب $f'(2)$: في النقطة $D(2\,,5)$ المماس للمنحني يوازي حامل محور الفواصل وبالتالي $f'(2)=0$.

حساب $f'(1)$: ليكن T هو المماس للمنحني في النقطة التي فاصلتها 1 أي في النقطة $C\left(1\,,\dfrac{9}{2}\right)$ ، إذن $f'(1)$ هو معامل توجيه المماس T . نختار نقطة ثانية من هذا المماس ولتكن $F(3\,,6)$.

$$f'(1)=\frac{y_F-y_C}{x_F-x_C}=\frac{6-\dfrac{9}{2}}{3-1}=\frac{3}{4}$$

ت) دراسة إشارة $f'(x)$ على المجال $[-2\,,5]$:

- بما أن الدالة f متناقصة على كل من المجالين $[-2\,,0]$ و $[2\,,5]$ فإن f' سالبة على هذين المجالين.
- بما أن الدالة f متزايدة على المجال $[0\,,2]$ فإن f' موجبة على هذا المجال .

ث) دراسة إشارة $f(x)$ المجال $[-2\,,5]$:

- المنحني يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $E(4\,,0)$ وبالتالي $f(x)$ تنعدم عند $x=4$.
- المنحني يقع فوق حامل محور الفواصل في المجال $[-2\,,4[$ وبالتالي $f(x)>0$ على هذا المجال.
- المنحني يقع تحت حامل محور الفواصل في المجال $]4\,,5]$ وبالتالي $f(x)<0$ على هذا المجال.

2) مجموعة تعريف الدالة g حيث $g(x)=\ln(f(x))$.

تكون الدالة g معرفة إذا وفقط إذا كانت $f(x)>0$ أي $D_g=[-2\,,4[$.

3) حساب $g(-2)$ ، $g(0)$ ، $g(2)$:

$g(-2)=\ln f(-2)=\ln 9=2\ln 3$ ، $g(0)=\ln f(0)=\ln 4=2\ln 2$ ، $g(2)=\ln f(2)=\ln 5$

つづく

مسائل المستوى الأول ★

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \ln f(x)=-\infty$ لأن $f(4)=0$.

5) g معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق على $D_g=[-2\,,4[$ ودالتها المشتقة g' حيث $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $f'(x)$ لأن $f(x)>0$ حسب مجموعة التعريف.

إذن $g'(x)>0$ على المجال $]0,2[$ وفي هذا المجال تكون الدالة g متزايدة.

$g'(x)<0$ على كل من $]-2\,,0[$ و $]2\,,4[$ وفي هذين المجالين تكون الدالة g متناقصة.

$g'(x)=0$ من أجل $f'(x)=0$ أي إذا كان $x=0$ أو $x=2$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	-2		0		2		4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$2\ln 3$	$\searrow$	$2\ln 2$	$\nearrow$	$\ln 5$	$\searrow$	$-\infty$

التمرين 03

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

1- دراسة تغيرات f :

لدينا : $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x+1>0\}$ **حيث :** $D_f=]-1;+\infty[$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\left(-x^2+x+2\ln(x+1)\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-x^2+x+2\ln(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{-x^2+x}{x+1}+\frac{2\ln(x+1)}{x+1}\right]=-\infty$$

- $$f'(x)=-2x+1+\frac{2}{x+1}=\frac{(-2x+1)(x+1)+2}{x+1}=\frac{-2x^2-2x+x+1+2}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{-2x^2-x+3}{x+1}$$

$f'(x)$ له نفس إشارة البسط .

ندرس إشارة $-2x^2-x+3$ **:** $\Delta=25$ $\quad x_1=1$ **,** $\quad x_2=-\dfrac{3}{2}$

つづく

x	-1		1		$+\infty$
$-2x^2-x+3$		+	0	-	

إذن f متناقصة تماما على $[1;+\infty[$ و متزايدة تماما على $]-1\ ;\ 1]$

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2.\ln 2$	↘	$-\infty$

$f(1)=2\ln 2$ بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=-\infty$ فإن : $x=-1$ معادلة مستقيم مقارب

2- إيجاد المماسات ذات معامل التوجيه 3 :

نحل المعادلة $f'(x)=3$ و عليه : $\dfrac{-2x^2-x+3}{x+1}=3$ إذن : $-2x^2-x+3=3x+3$

و عليه : $-2x^2-4x=0$ و عليه : $-2x(x+2)=0$ و منه : $x=0$ أو $x=-2$

إذن : $x=0$ (-2 قيمة مرفوضة)

إذن هناك مماس واحد عند النقطة ذات الفاصلة 0 ومعادلته $y=f'(0)\times(x-0)+f(0)$

حيث $f(0)=0$ و عليه : $y=3x$

3- نبين أن $f(x)=0$ تقبل حلا :

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{25}{4}+\frac{5}{2}+2\ \ln\frac{7}{2}=\frac{-15}{4}+2\ \ln\frac{7}{2}\simeq -1,24$$

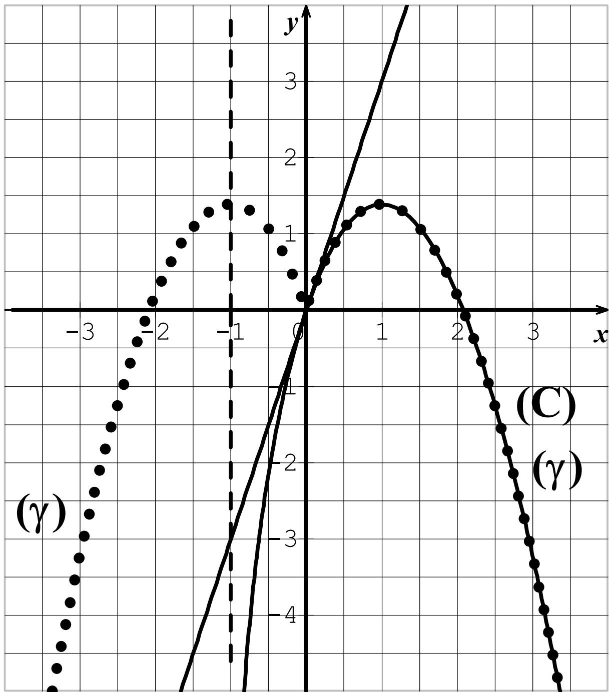
$$f(2)=-2+2\ \ln 3\ \simeq\ 0,19$$

وعليه الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left[2\ ;\ \frac{5}{2}\right]$ و لدينا : $f(2).f\left(\frac{5}{2}\right)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد x_0 بحيث : $f(x_0)=0\ ;\ 2<x_0<\frac{5}{2}$

つづく

مسائل المستوى الأول ★



4 - إنشاء المماس و (C):

5- أ) إثبات أن g زوجية :

لدينا: $D_g=\mathbb{R}$ و عليه من أجل كل عدد x من D_g :

$-x\in D_g$ و $g(-x)=g(x)$ و منه g زوجية .

ب) كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} g(x)=-x^2+x+2\ln(x+1) & ; \quad x>0 \\ g(x)=-x^2-x+2\ln(-x+1) & ; \quad x>0 \end{cases}$$

ج) إنشاء (γ) : (في الرسم السابق)

- من أجل $x>0$: $g(x)=f(x)$

و منه (γ) ينطبق على (c)

- من أجل $x<0$: الدالة g زوجية و عليه بيانها متناظر بالنسبة لمحور التراتيب .

التمرين 04

مجلة الخليل للرياضيات (قويسم ابراهيم الخليل)

I) أ/ تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	‖	$+$
$g(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

ب/ حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$.

لدينا من البيان $g(x)=0$ لما $x=1$

إذن: $g(x)>0$ لما $x\in\ ]-\infty;-1[\ \cup\ ]1;+\infty[$

ج/ تعيين بيانيا قيم x التي من أجلها $0<g(x)<1$.

من البيان نجد القيم التي من أجلها $0<g(x)<1$ هي لما $x\in\ ]1;+\infty[$

つづく

II) ❶ حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وتفسير النتيجتين هندسيا:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1}\left[\underbrace{\frac{x-1}{x+1}}_{0} + \ln\Bigg(\underbrace{\frac{x-1}{x+1}}_{0^+}\Bigg)\right] = -\infty$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\frac{x-1}{x+1}}_{1} + \ln\Bigg(\underbrace{\frac{x-1}{x+1}}_{1}\Bigg)\right] = 1$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1$

❷ أ/ تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$: $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$:

$$g'(x) = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب/ حساب $f'(x)$، ودراسة إشارتها:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} + \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$= \frac{2(x-1+x+1)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{2(2x)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$$

لدينا: $f'(x) > 0$ لما $x \in\ ]1;+\infty[$ ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f:

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 1$

التمرين 05

سلسلة تمارين محلولة في الدوال اللوغاريتمية (مصطفاي عبد العزيز)

I - لتكن الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = -2x^2 + 2 - \ln x$

1. دراسة تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = +\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} -2x^2 + 2 = 2$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(-2x + \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$$

つづく

الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=-4x-\frac{1}{x}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $-4x<0$ و $-\frac{1}{x}<0$ عندئذ $g'(x)<0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

2. حساب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

$g(1)=2(1)^2+2-\ln 1=0$

من أجل $x\in]0;1[$، $g(x)>0$

من أجل $x\in]1;+\infty[$، $g(x)<0$

II - f دالة عددية معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{-1+\ln x}{x}-2x+2e$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}+\frac{\ln x}{x}-2x+2e=-\infty$$

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{-1+\ln x}{x}=-\infty$ عندئذ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{-1+\ln x}{x}-2x+2e=-\infty$

ب - تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-2x+2e$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-2x+2e)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}+\frac{\ln x}{x}=0$ ومنه المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-2x+2e$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

جـ - تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$.

$f(x)-y=\frac{-1+\ln x}{x}$ لدينا $x>0$ ومنه إشارة $f(x)-y$ هي نفس إشارة $-1+\ln x$.

$f(x)-y=0$ يكافئ $-1+\ln x=0$ ويكافئ $\ln x=1$ أي $x=e$.

$f(x)-y>0$ يكافئ $-1+\ln x>0$ ويكافئ $\ln x>1$ أي $x>e$.

つづく

x	0		e		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(e;0)$	(C_f) فوق (Δ)	

2. أ - تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x-(-1+\ln x)}{x^2}-2=\frac{2-\ln x-2x^2}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

ب - استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f .

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

من أجل $]-\infty;1[$ $x\in$ ، $f'(x)>0$ ؛ ومن أجل $x\in]1;+\infty[$ ، $f'(x)<0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;1]$ ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$.

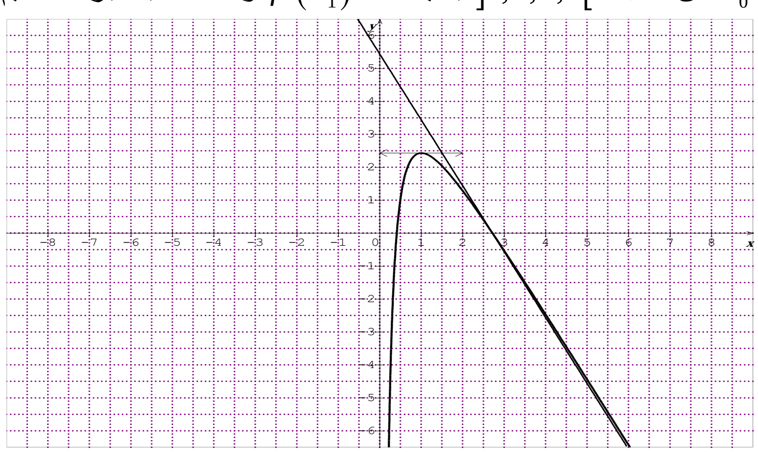
جدول تغيّرات الدالة f .

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2e-3$	↘	$-\infty$

3. أ - إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]0,4;0,5[$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1]$ وخاصة على المجال $[0,4;0,5]$ ولدينا $f(0,4)\approx-0,15$ و $f(0,5)\approx1,04$ إذن يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 من المجال $]0,4;0,5[$ بحيث $f(x_1)=0$ و هذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

ب - رسم (Δ) و (C_f) .



مسائل المستوى الثاني ★★

التمرين 01

سلسلة تمارين محلولة في الدوال اللوغاريتمية (مصطفاي عبد العزيز)

1) **بقراءة بيانية تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ).**

في المجال $]0;\alpha[$، (γ) يقع أسفل (Δ).

وفي المجال $]\alpha;+\infty[$، (γ) يقع فوق (Δ).

(γ) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(\alpha;\ln\alpha)$.

2) g الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-3+\ln x$.

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

لدينا حسب السؤال السابق من أجل كل $x\in]0;\alpha[$: $\ln x-(-x+3)<0$ أي $g(x)<0$.

ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$: $\ln x-(-x+3)>0$ أي $g(x)>0$.

ومن أجل $x=\alpha$: $\ln\alpha-(-\alpha+3)=0$ أي $g(\alpha)=0$.

3) **التحقق أنّ $2,2<\alpha<2,3$.**

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[2,2;2,3]$ ولدينا $g(2,2)\approx-0,01$ و $g(2,3)\approx0,13$ أي $g(2,3)\times g(2,3)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، $g(\alpha)=0$ حيث $2,2<\alpha<2,3$

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)$.

1) **حساب** $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln(x)-2=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)-2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)=+\infty$.

2) **إثبات أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$:** $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{\ln x-2}{x^2}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيّرات الدالة f.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

لدينا $\ln\alpha=-\alpha+3$

ومنه $f(\alpha)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha-2)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(-\alpha+3-2)=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-\alpha+1)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا $2,2<\alpha<2,3$ يكافئ $1,2<\alpha-1<1,3$ يكافئ $1,44<(\alpha-1)^2<1,69$ إذن $\frac{1,44}{2,3}<\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<\frac{1,69}{2,2}$

つづく

أي $0,77 > \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} > 0,62$ وعليه $-0,77 < f(\alpha) < -0,62$.

4) **دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.**

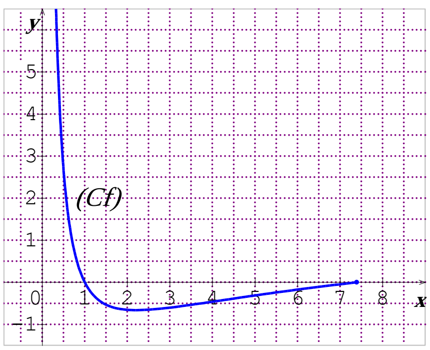
من أجل ذلك ندرس إشارة $f(x)$.

$$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)=\frac{1}{x}(x-1)(\ln x-2)$$

x	0		1		e^2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$		$-$		$+$	

(C_f) فوق محور الفواصل في المجالين $]0;1[$ و $]e^2;+\infty[$ و (C_f) تحت محور الفواصل في المجال $]1;e^2[$.

و (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و e^2.



الرسم

III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقق: $F(1)=-3$

1) **تبيين أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل.**

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=0$ تعني $f(x)=0$ ومنه $x=1$ أو $x=e^2$.

وبالتالي منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل عند النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و e^2.

2) **تبيين أنّ $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدّالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.**

نضع $h(x)=x\ln x-x$ ومنه $h'(x)=\ln x+\frac{1}{x}\times x-1=\ln x+1-1=\ln x$

وعليه الدالة h هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.

استنتاج عبارة F.

لدينا $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)=\ln x-2-\frac{1}{x}\ln x+2\frac{1}{x}$

ومنه $F(x)=x\ln x-x-2x-\frac{1}{2}(\ln x)^2+2\ln x+\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$

أي $F(x)=x\ln x-3x-\frac{1}{2}(\ln x)^2+2\ln x+\lambda$

بما أنّ $F(1)=-3$ فإن $-3+\lambda=-3$ أي $\lambda=0$ إذن $F(x)=x\ln x-3x-\frac{1}{2}(\ln x)^2+2\ln x$.

التمرين 02

إعداد (راهم ف.)

1. أ- حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$.

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)$ ، وبالتالي $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=-\infty$.

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب شاقولي معادلته $x=0$.

つづく

ب- حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)$ ، وبالتالي $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2. حساب المشتقة $f'(x)$.

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ لدينا : $f'(x)=1+6\dfrac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}=\dfrac{x(x-1)-6}{x(x-1)}$

ومنه $f'(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x(x-1)}=\dfrac{(x-3)(x+2)}{x(x-1)}$.

– استنتاج إتجاه تغير الدالة f .

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-(x+2)$.

ومنه : الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2[$

ومتناقصة تماما على المجال $]-2;0[$

وتبلغ قيمة حدية محلية كبرى $f(-2)=3+6\ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-2)$	↘	$-\infty$

3. أ- إثبات أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-x-5\right)$

وبالتالي : $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=\lim_{x\to-\infty}\left(6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)=0$.

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+5$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- دراسة وضع المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

لدينا : $f(x)-y=6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ لدينا $x>x-1$ وبالتالي : $\frac{x}{x-1}<1$.

إذن : $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)<0$ ، ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ المنحني (C_f) تحت المستقيم (Δ) .

4. إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β .

– الدالة f معرفة ومستمرة على المجال $[-3,5;-3,4]$ ومتزايدة تماما على المجال $]-3,5;-3,4[$.

ولدينا : $f(-3,5)=-0,01$ و $f(-3,4)=0,05$ ، أي : $f(-3,4)\times f(-3,5)<0$.

つづく

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد α وحيد حيث $-3,5<\alpha<-3,4$ حل للمعادلة $f(x)=0$.

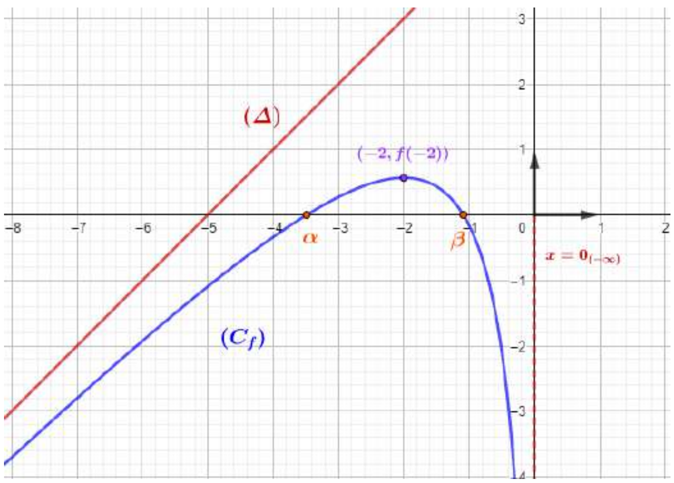
– الدالة f معرفة ومستمرة على المجال $[-1,1;-1,0]$ ومتزايدة تماما على المجال $]-1,1;-1,0[$.

ولدينا : $f(-1,0)=-0,16$ و $f(-1,1)=0,02$ ، أي : $f(-1,0)\times f(-1,1)<0$.

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد β وحيد حيث $-1,1<\beta<-1,0$ حل للمعادلة $f(x)=0$.

5. إنشاء المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

التمثيل بالشكل المقابل



6. أ– كتابة معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

لدينا : $\overrightarrow{AB}\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ ، نعتبر $M(x;y)\in(AB)$

وبالتالي : $\overrightarrow{AM}=t.\overrightarrow{AB}$.

إذن : $;t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x+1=-t \\ y-3-6\ln\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{2}t \end{cases}$ ، وبالتالي : $y-3-6\ln\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}(x+1)$.

ومنه المعادلة الديكارتية للمستقيم : $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

ب– إثبات أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها .

نضع : $f'(x)=\frac{1}{2}$ ، وبالتالي : $\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=\frac{1}{2}$ ، إذن : $2x^2-2x-12=x^2-x$ ، أي : $x^2-x-12=0$.

نحسب المميز : $\Delta=b^2-4.a.c=(-1)^2-4(1)(-12)=49=(7)^2$.

إذن : $x_1=\frac{1-7}{2}=-3$ (مقبول) ، و $x_2=\frac{1+7}{2}=4$ (مرفوض) .

ولدينا : $f(-3)=-3+5+6\ln\left(\frac{-3}{-3-1}\right)=2+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

نعوض $x=-3$ في معادلة المستقيم نجد : $y=\frac{1}{2}(-3)+\frac{7}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)=f(-3)$ ،

ومنه : المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 إحداثيتيها $\left(-3;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

つづく

مسائل المستوى الثاني ★★

7. إثبات أن الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

الدالة g معرفة وقابلة للإشتقاق على $]-\infty;0[$ و دالتها المشتقة هي : $g'(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-6x\frac{1}{x(x-1)}-\frac{6}{1-x}$.

إذن : $g'(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=f(x)$. ومنه الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

التمرين 03

مجموعة المتميز (جواليل أحمد أسامة)

1) إثبات ان f فردية : هي معرفة على مجال اتحاد مجالين متناظرين بالنسبة إلى O و

$f(-x)=-\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)=-\frac{2}{3}+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-\frac{2}{3}-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-f(-x)$ و منه f فردية و منه (C_f) يقبل مركز تناظر هو O .

2) حساب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{3}x\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{3}x\right]=+\infty$ لأن

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\ln(1)=0$

و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\left[-\frac{2}{3}+\ln\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}+\infty}\left[\frac{2}{3}+\ln\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]=-\infty$

و منه (C_f) يقبل مستقيمين موازيين لحامل محور التراتيب معادلاتهما هي $x=-1$; $x=1$.

3) لدينا $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

أ) ومنه $f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}$ و منه $f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}$ أي ان

$f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{2x^2-2+6}{3(x^2-1)}=\frac{2x^2+4}{3(x^2-1)}$ إذن $f'(x)=\frac{2(x^2+2)}{3(x^2-1)}$ و هو المطلوب .

ب) استنتاج اتجاه تغير f : من ما سبق $f'(x)=\frac{2(x^2+2)}{3(x^2-1)}$ اشارتها من إشارة x^2-1 و هي موجبة على المجالين $]1;+\infty[$ و $]-\infty;-1[$.

جدول تغيراتها

x	$-\infty$ $\quad$ -1	$\quad$	1 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

つづく

مسائل المستوى الثاني ★★

4) تبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}8<\alpha<1{,}9$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

و $f(1{,}8)=-0{,}05$; $f(1{,}9)=0{,}1$ و منه حسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا و حيدا α حيث $1{,}8<\alpha<1{,}9$.

5) إثبات أن $(\Delta): y=\frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) : لدينا $f(x)-\frac{2}{3}x=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ و منه

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{2}{3}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0 \text{ و } \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{2}{3}x\right]=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

$\left[f(x)-\frac{2}{3}x\right]=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ و منه $\left[f(x)-\frac{2}{3}x\right]>0$ يكافئ $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)>0$ و هذا يعني $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)>1$

لما $x\in]1;+\infty[$ فإن $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)>1$ يعني $x-1>x+1$ (الضرب في عدد موجب) و هذا يعني $-2>0$ و هذا

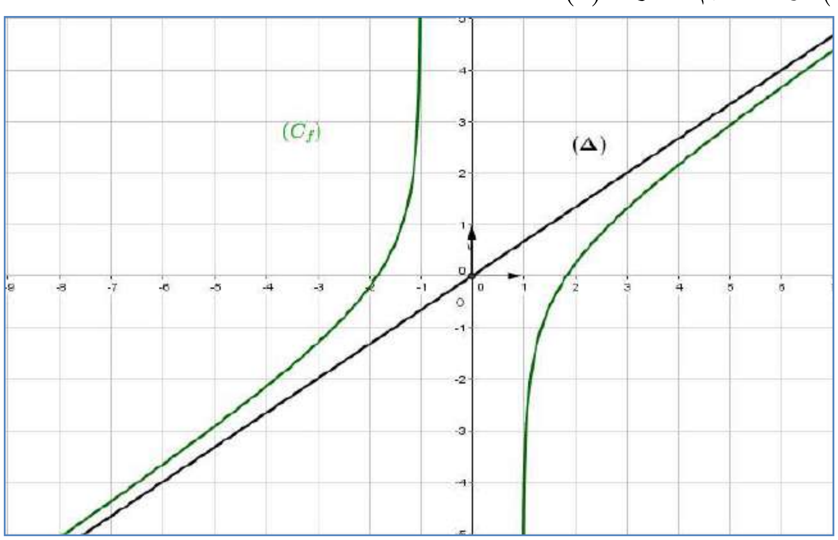
مستحيل و منه $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)<1$ على المجال $]1;+\infty[$ و منه (C_f) يقع تحت (Δ) على هذا المجال

لما $x\in]-\infty;-1[$ فإن $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)>1$ يعني $x-1<x+1$ (الضرب في عدد سالب) و هذا يعني $-2<0$ و

محققة أي ان

$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)>1$ على المجال $]-\infty;-1[$ و منه (C_f) يقع فوق (Δ) على هذا المجال

6) إنشاء المنحنى (C_f) و المستقيم المقارب (Δ)



つづく

مسائل المستوى الثاني ★★

7) المناقشة بيانيا : $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ يعني ان $\left(\frac{2}{3}-|m|\right)x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ و منه

$|m|x=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ يكافئ $|m|x=f(x)$ و حلها هو ايجاد فواصل تقاطع (C_f) و المستقيم (Δ_m) الذي معادلته $y=|m|x$

لما $|m|<\frac{2}{3}$ أي ان $-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$ نلاحظ ان (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة حلين متمايزان

لما $|m|\geq\frac{2}{3}$ أي ان $m\geq\frac{2}{3}$ او $m<-\frac{2}{3}$ نلاحظ ان (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان و منه المعادلة ليس لها حلول .

التمرين 04

كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

الجزء الأول: لدينا : $g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$.

- حساب : $g(1)$ و استنتاج إشارة $g(x)$:

بعد حساب $g(1)=0$ نجد جدول إشارة $g(x)$ بيانيا فيكون كما يلي : $g(x)>0$ لمّا: $0<x<1$ و $g(x)=0$ لمّا : $x=1$ و $g(x)<0$ لمّا: $x>1$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الجزء الثاني : لدينا $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$.

1) أ) حساب : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ وَ تبيان أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)=-\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 1+\ln x=-\infty$ وَ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(1+x\ln x)=1$.

و منه : $x=0$ مقارب للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}+\ln x}\right)=0$. و منه : $y=0$ مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

2) أ) بيان أنه من أجل كل : $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالته المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1+x\ln x)-(\ln x+1)(1+\ln x)}{(1+x\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}+\ln x-(1+\ln x)^2}{(1+x\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1}{(1+x\ln x)^2}$$ ،

و منه : $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$ ، **و هو المطلوب .**

つづく

مسائل المستوى الثاني ★★

ب) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة f وَ تشكيل جدول تغيّراتها :

نلاحظ أنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، أي : الدالة f متزايدة تماما على $]0;1]$ ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$.

جدول التغيّرات :

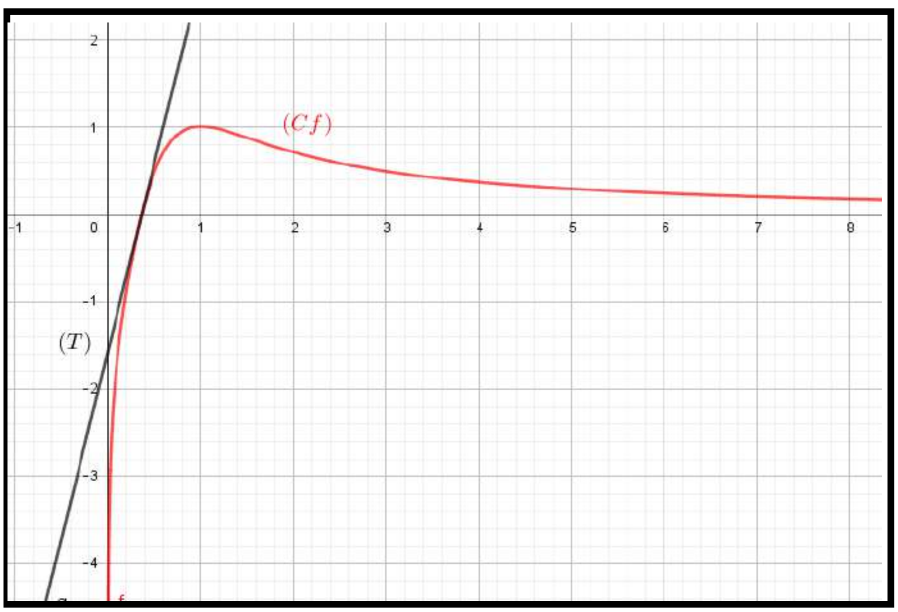
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) بيان أنّ : $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة (T) مماس (C_f) عند نقطة تقاطعه مع محور الفواصل:

لدينا : بعد حل المعادلة : $f(x)=0$ نجد : $(C_f)\cap(xx')=\{(e^{-1};0)\}$ ، أي : $f'(e^{-1})=\frac{e^2}{e-1}$ ، و منه معادلة المماس

تكون : $(T):y=f'(e^{-1})(x-e^{-1})+f(e^{-1})$ ، إذن : $(T):y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$.

رسم كلا من (T) المنحني (C) :



4) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m :

$(e-1)f(x)=e^2x-me$ ، أي : $f(x)=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}m$ ، أي : $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x+m'$ و بعد المقارنة مع ،

المماس (T) نجد $m=1$ ومنه : المعادلة تقبل حلّان لمّا : $m'\in\left]-\infty;-\frac{e}{e-1}\right[$ ، أي : $m\in]1;+\infty[$.

つづく

مسائل المستوى الثاني ★★

الجزء الثالث :

1) بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n **حيث** $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$

لدينا : $I_n=\int_1^n f(x)dx$ ، أي : $I_n=\int_1^n\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)dx$ ، نلاحظ أنّ : $I_n=\int_1^n\frac{u'(x)}{u(x)}dx$ ، و منه : $I_n=\left[\ln|u(x)|\right]_1^n$ ،

أي : $I_n=\ln(u(n))-\ln(u(1))$ ، أي : $I_n=\ln(1+n\ln n)-\ln(1)$ ، و منه : $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

2) دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (I_n) :

ندرس إشارة الفرق : $I_{n+1}-I_n$ ، لدينا : $I_{n+1}=\int_1^{n+1} f(x)dx$ ، أي : $I_{n+1}=\int_1^n f(x)dx+\int_n^{n+1} f(x)dx$ ، أي :

$I_{n+1}=I_n+\int_n^{n+1} f(x)dx$ ، و منه : $I_{n+1}-I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$ ، بما أنّ : $n>1$ فإنّ : $\int_n^{n+1} f(x)dx>0$ ،

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (I_n) متزايدة تماما .

التمرين 05

مجلة الخليل للرياضيات (قويسم ابراهيم الخليل)

I) ❶ حساب $\lim_{x\to -1^{>}} h(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x)$:

- $\lim_{x\to -1^{>}} h(x)=\lim_{x\to -1^{>}}(x^2+2x+\ln(x+1))=-\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+2x+\ln(x+1))=+\infty$

❷ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$:

$$h'(x)=2x+2+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة h:

لدينا: $\left(\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}\right)>0$ لما $x\in\ ]-1;+\infty[$، ومنه $h'(x)>0$

- جدول تغيرات الدالة h:

x	-1 $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

❸ حساب $h(0)$ واستنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم x:

$h(0)=0^2+2(0)+\ln(0+1)=0$ ومنه:

x	-1	0	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$

つづく

مسائل المستوى الثاني ★★

II) ❶ أ/ حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} h(x)$:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} h(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \left(x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = +\infty$$ لأنّ: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} (x+1) = 0^+$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \left(\frac{\ln(x+1)}{0^+}\right) = -\infty$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$

ب/ برهان أنّ $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$:

لدينا: $$\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{e^t}{t}\right) = +\infty \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{\ln e^t}{\ln t}\right) = +\infty \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t}{\ln t}\right) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{\left(\frac{t}{\ln t}\right)}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{\ln t}{t}\right) = 0$$

ج/ استنتاج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

نضع $x + 1 = t$ ومنه $x - 1 = t - 2$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = \lim\limits_{t \to +\infty} t$

ومنه: $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = \lim_{t \to +\infty} \left(t - 2 - \frac{\ln(t)}{t}\right) = +\infty$$

د/ حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)]$:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right] = 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = x - 1$

ه/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (d):

$$f(x) - (x-1) = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

لدينا $x + 1 > 0$ لما $x \in \;]-1; +\infty[$ ومنه:

$$-\ln(x+1) = 0 \Rightarrow x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$$

ومنه:

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y_{(d)}$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (d) لما $x \in \;]-1; 0[$
- (C_f) فوق (d) لما $x = 0$
- (C_f) تحت (d) لما $x \in \;]0; +\infty[$

つづく

مسائل المستوى الثاني ★★

❷ تبيين أنه من أجل كل $x \in \left]-1;+\infty\right[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

- جدول تغيرات الدالة f:

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

❸ تبيين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3.3 و 3.4:

نضع $f(x)=k$ حيث $k=2$ ونطبق نظرية القيم المتوسطة:

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال $\left]-1;+\infty\right[$

ولدينا: $f(3.3) \approx 1.96$ و $f(3.4) \approx 2.06$

إذن $k=2$ محصورة بين $1.96 < 2 < 2.06$

وعليه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد c حقيقي محصور بين $3.3 < c < 3.4$

❹ رسم (C_f) :

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x=-1$ بجوار $+\infty$
- نعين النقطة ذات الاحداثيات $(0;-1)$ نقطة تقاطع (C_f) مع (d)
- نرسم المستقيم المقارب المائل (d) ذو المعادلة $y=x-1$ بواسطة جدول القيم المساعدة.
- نعين نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم الأفقي $y=2$
- باستعمال جدول التغيرات نكمل رسم (C_f) مع الاستعانة بجدول الوضعية.

❺ حساب مساحة الحيز:

نضع: A مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=x-1$ و $x=0$ و $x=1$

لدينا:

$$A = \int_0^1 (y_d - f(x))dx = \int_0^1 \left(x-1-\left(x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx$$

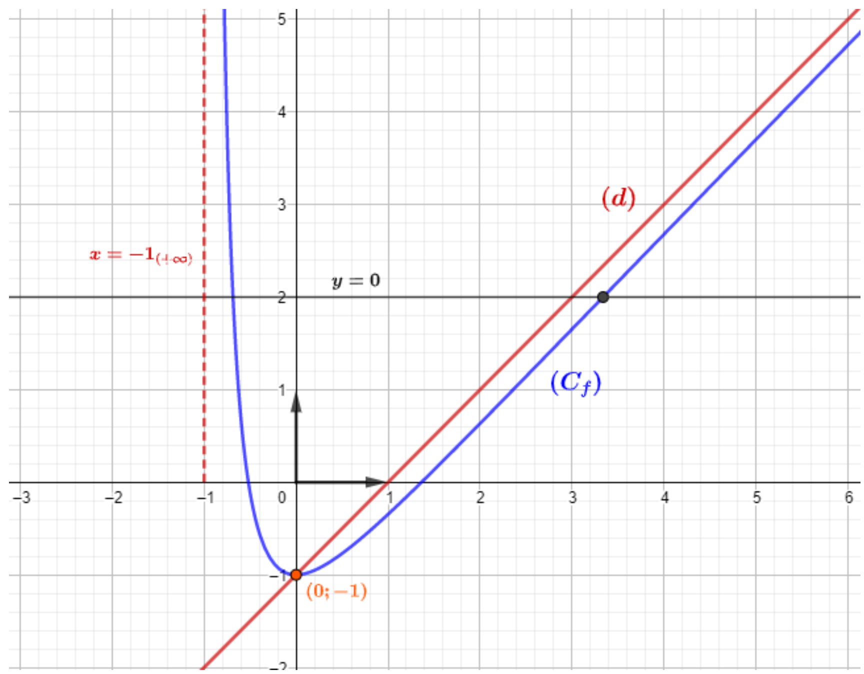
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}\ln(x+1)\right)dx = \left[\frac{\ln(x+1)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{(\ln 2)^2}{2}u.a$$

تذكير:

$$\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

つづく

مسائل المستوى الثاني ★★



مسائل المستوى الثالث ★★★

التمرين 01

مجموعة المتميز (جواليل أحمد أسامة)

I - الدالة العددية g المعرفة على $]-1;\infty[$ بـ $g(x)=1+x^2-2x.(1+x)\ln(1+x)$

1. تحديد الوضعية

x	-1	α	$+\infty$
الوضعية	(C) يقع فوق (Γ)	(C) و (Γ) يتقاطعان	(C) يقع تحت (Γ)

2. إشارة $g(x)$

x	-1	α	$+\infty$
إشارة $g(x)$	$+$	0	$-$

II - الدالة العددية f المعرفة على $]-1;\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

1. أ- حساب النهاية : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1}\ln(1+x)=-\infty$

إثبات النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x\left(\frac{1}{x}+1\right)\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}$ أي أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}$ أي أن

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$ بالتزايد المقارن .

ب-التفسير الهندسي للنهايتين هو أن المستقيمان اللذان معادلاتهما $x=-1$ و $y=0$ مستقيمان مقاربان للمنحنى (C_f).

2. أ- إثبات عبارة المشتقة : $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ أي أن $f'(x)=\dfrac{\frac{1+x^2}{1+x}-2x.\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}$ و منه

$f'(x)=\dfrac{1+x^2-2x(1+x).\ln(1+x)}{(1+x).(1+x^2)^2}$ إذن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1+x).(1+x^2)^2}$ محققة .

ب-إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$: ومنه الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-1;\alpha]$.

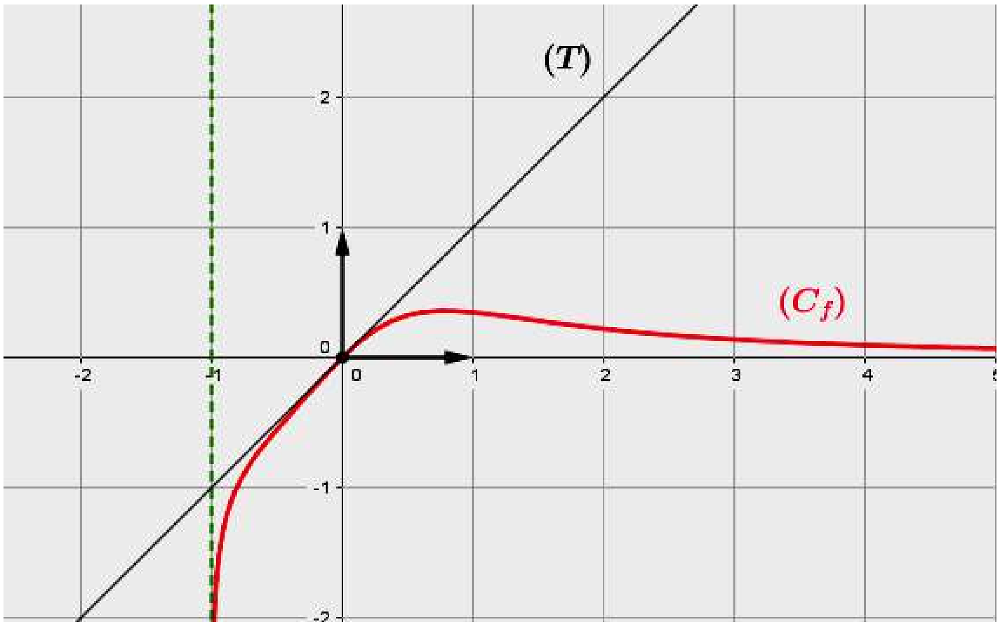
جدول تغيراتها

x	-1	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ 0

つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

3. رسم (T) و (C_f):



4. الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=\frac{\ln(1+|x|)}{1+x^2}$

أ - إثبات أن h دالة زوجية: $h(-x)=\frac{\ln(1+|-x|)}{1+(-x)^2}=\frac{\ln(1+|x|)}{1+x^2}$ إذن $h(-x)=h(x)$ و منه محققة

ب قابلية الاشتقاق للدالة h عند 0 :

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{\ln(1-x)}{x(1+x^2)}$ أي أن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{\ln(1-x)}{x}$ بوضع $t(x)=\ln(1-x)$ و منه $t(0)=0$ و

$t'(x)=\frac{-1}{1-x}$ و منه $t'(0)=-1$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{\ln(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{t(x)-t(0)}{x-0}=t'(0)=-1$ و منه $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{h(x)}{x}=-1$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{\ln(1+x)}{x(1+x^2)}$ أي أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ بوضع $m(x)=\ln(1+x)$ و منه $m(0)=0$

و $m'(x)=\frac{1}{1+x}$ و منه $m'(0)=1$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{m(x)-m(0)}{x-0}=m'(0)=1$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{m(x)-m(0)}{x-0}$ و منه $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{h(x)}{x}=1$

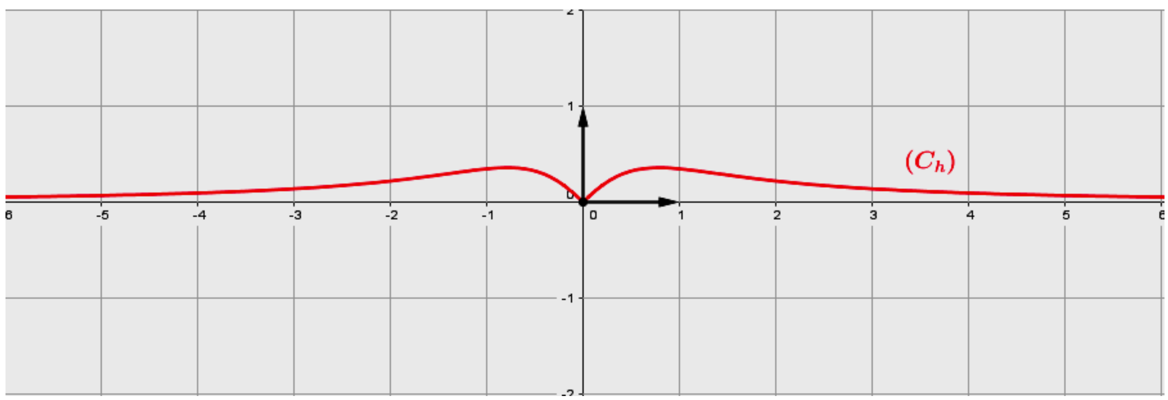
بما أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{h(x)}{x}\neq\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{h(x)}{x}$ و منه الدالة غير قابلة للاشتقاق عند 0.

つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

ج- من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$: $h(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}=f(x)$ و منه (C_f) و (C_h) منطبقان على المجال $[0;+\infty[$.

و بما أن h دالة زوجية فإن (C_h) متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب



التمرين 02

سلسلة تمارين محلولة في الدوال اللوغاريتمية (مصطفاي عبد العزيز)

I- الدّالة g معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=(x+1)^2-2+\ln(x+1)$.

1- دراسة اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$.

الدّالة g تقبل على الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

$$g'(x)=2(x+1)+\frac{1}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $x+1>0$ و $\frac{1}{x+1}>0$ ومنه $g'(x)>0$ إذن الدالة g متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

2-تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,31<\alpha<0,32$ وأنّ: $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$.

الدّالة g مستمرة على $]-1;+\infty[$ لأنها تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ وهي متزايدة تماما على هذا المجال و خاصة على المجال $[0,31;0,32]$ ولدينا $g(0,31)\approx -0,01$ ، $g(0,32)\approx 0,02$ أي $g(0,31)\times g(0,32)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,31;0,32[$ بحيث $g(\alpha)=0$

$g(\alpha)=0$ معناه $(\alpha+1)^2-2+\ln(\alpha+1)=0$ أي $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$.

3- استنتاج، حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

من أجل $x\in]-1;\alpha[$ لدينا $g(x)<g(\alpha)$ أي $g(x)<0$

ومن أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ لدينا $g(x)>g(\alpha)$ أي $g(x)>0$ و $g(\alpha)=0$.

つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

II- الدّالة f معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2$.

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-\ln(x+1))^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2=+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2=+\infty$.

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1}(2-\ln(x+1))^2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1}(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2=+\infty$.

2- إثبات أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x+1}$.

الدّالة f تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=2(x+1)+2\left(\frac{-1}{x+1}\right)(2-\ln(x+1))=2(x+1)-\frac{2(2-\ln(x+1))}{x+1}=\frac{2(x+1)^2-2(2-\ln(x+1))}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{2\left[(x+1)^2-2+\ln(x+1)\right]}{x+1}=\frac{2g(x)}{x+1}$$

3- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f .

من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $\dfrac{2}{x+1}>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$.

أي f' سالبة على $]-1;\alpha[$ وموجبة على $]\alpha;+\infty[$

نستنتج هكذا أنّ الدالة f متناقصة تماما على $]-1;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f .

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4- تبيين أنّ: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$

لدينا $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$ إذن $f(\alpha)=(\alpha+1)^2+(2-\ln(\alpha+1))^2=(\alpha+1)^2+\left(2-\left(2-(\alpha+1)^2\right)\right)^2$

$$f(\alpha)=(\alpha+1)^2+(\alpha+1)^4=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

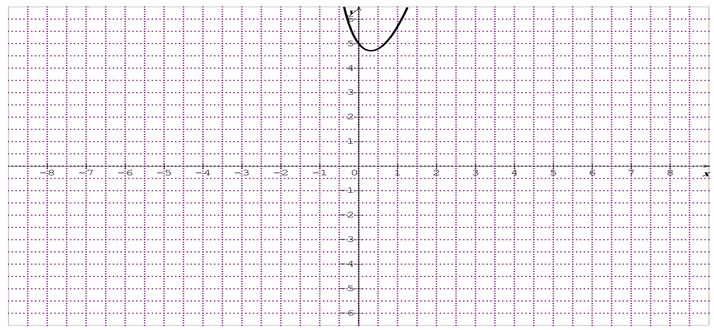
$0,31<\alpha<0,32$ معناه $1,31<\alpha+1<1,32$ يكافئ $1,7161<(\alpha+1)^2<1,7424$ ويكافئ

つづく

$2,7161 < 1+(\alpha+1)^2 < 2,7424$ ومنه $1,7161\times 2,7161 < (\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right) < 1,7424\times 2,7424$ أي

$4,6611 < f(\alpha) < 4,7789$.

5-تمثيل المنحنى (C_f) على المجال $]-1;2]$.



III- (Γ) المنحنى الممثل للدّالة h المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

1-إثبات أنّ المسافة AM تعطى بالعبارة $AM=\sqrt{f(x)}$.

لدينا $M\left(x;\ln(x+1)\right)$ ومنه

$$AM=\sqrt{(x+1)^2+\left(\ln(x+1)-2\right)^2}=\sqrt{(x+1)^2+\left(2-\ln(x+1)\right)^2}=\sqrt{f(x)}$$

2- الدّالة k معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ - تبيين أنّ للدالتين k و f نفس اتجاه التغيّر على المجال $]-1;+\infty[$.

الدالة f تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ و هي موجبة على هذا المجال إذن الدالة k تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$

ولدينا $k'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $2\sqrt{f(x)}>0$ ومنه إشارة $k'(x)$ هي نفس إشارة $f'(x)$ وبالتالي للدالتين k و f نفس اتجاه التغيّر على المجال $]-1;+\infty[$.

ملاحظة: يمكن إتباع طريقة اتجاه تغير مركب دالتين.

ب - تعيين إحداثيتي النقطة B من (Γ)، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

لدينا الدّالة k متناقصة تماما على $]-1;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ فهي تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]-1;+\infty[$ تبلغها من أجل $x=\alpha$ ومنه AM تكون أصغر ما يمكن من أجل $x=\alpha$ أي عند النقطة $B\left(\alpha;\ln(\alpha+1)\right)$

جـ - تبيين أنّ: $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$.

$$AB=k(\alpha)=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)}=(\alpha+1)\sqrt{1+(\alpha+1)^2}$$

مسائل المستوى الثالث ★★★

التمرين 03

رياضيات 2013 الموضوع الأول (06 نقاط)

$I-1$.أ- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $u'(x)=e^x-3$ وعليه إشارة $u'(x)$ هي :

x	0		$\ln 3$		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	

وعليه الدالة u متناقصة تماما على المجال $]0;\ln 3]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\ln 3;+\infty[$.

ب- للدالة u قيمة حدية صغرى هي $u(\ln 3)=e^{\ln 3}-3\ln 3+4-e=7-3\ln 3-e\simeq 0.986>0$

ومنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $u(x)>0$ أي $e^x-3x+4-e>0$ وعليه $\boxed{e^x-e>3x-4}$.

2.أ- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $v'(x)=-9x^2+8x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-9x^3+8x^2+1}{x}$

ومنه $v'(1)=-9\times 1^2+8\times 1+\dfrac{1}{1}=0$.

ب- العدد 1 جذر لـ $v'(x)$ وبتحليل $v'(x)$ نجد : $v'(x)=-\dfrac{(x-1)(9x^2+x+1)}{x}$

ولكون $9x^2+x+1>0$ (مميزه $\Delta=-35<0$ و $9>0$) فإن إشارة $v'(x)$ عكس إشارة $x-1$

أي أن $v'(x)>0$ على المجال $]0;1[$ و $v'(x)<0$ على المجال $]1;+\infty[$ أي أن الدالة v متزايدة تماما على المجال $]0;1]$

و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ ومنه للدالة v قيمة حدية كبرى هي $v(1)=-3\times 1^3+4\times 1^2-1+\ln 1=0$

أي أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $v(x)\leq 0$.

جـ- $v(x)\leq 0$ معناه $-3x^3+4x^2-1+\ln x\leq 0$ ومنه $-1+\ln x\leq 3x^3-4x^2$

وعليه $-1+\ln x\leq x^2(3x-4)$ ولكون $x\neq 0$ ينتج أن $\boxed{\dfrac{-1+\ln x}{x^2}\leq 3x-4}$.

3. من $e^x-e>3x-4$ و $\dfrac{-1+\ln x}{x^2}\leq 3x-4$ نستنتج أن $\dfrac{-1+\ln x}{x^2}\leq 3x-4<e^x-e$

أي أن $\dfrac{-1+\ln x}{x^2}<e^x-e$ ومنه $\boxed{e^x-e+\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0}$.

$II-1$. $\boxed{\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty}$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} e^x-ex=1$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{X}}{\frac{1}{X}}=\lim\limits_{X\to+\infty}-X\ln X=-\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x-ex=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{e^x}{x}-e\right)=+\infty$.

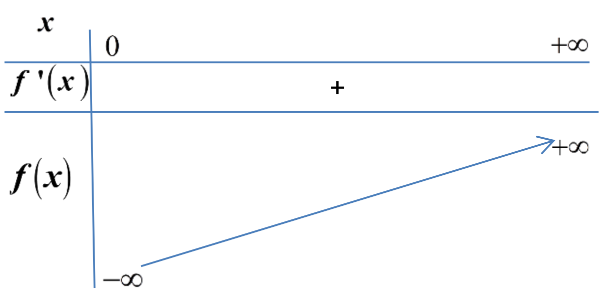
つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

2. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا

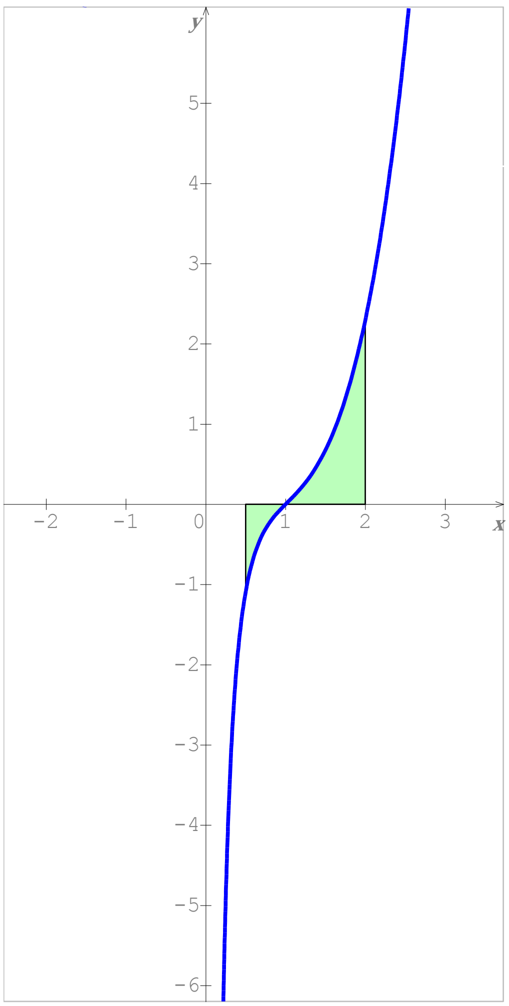
$f'(x)=e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0$ (من السؤال $I-3$.) ومنه

الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وجدول تغيراتها هو



3. لدينا $f(1)=e^1-e\times 1+\frac{\ln 1}{1}=\boxed{0}$.

تمثيل (C_f):



4. لتكن A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)

وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\frac{1}{2}$ و $x=2$

عندئذ: $A=\int_{\frac{1}{2}}^{1}-f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$

لدينا الدالة F المعرفة بـ $F(x)=e^x-\frac{e}{2}x^2+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

هي دالة أصلية لـ f على $]0;+\infty[$ ومنه:

$A=-[F(x)]_{\frac{1}{2}}^{1}+[F(x)]_{1}^{2}=-F(1)+F\left(\frac{1}{2}\right)+F(2)-F(1)=F(2)+F\left(\frac{1}{2}\right)-2F(1)$ أي

$A=e^2-\frac{e}{2}\times 2^2+\frac{1}{2}(\ln 2)^2+e^{\frac{1}{2}}-\frac{e}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}\right)^2-2\left(e^1-\frac{e}{2}\times 1+\frac{1}{2}(\ln 1)^2\right)=\boxed{e^2+e^{\frac{1}{2}}-\frac{25}{8}e+(\ln 2)^2}$ أي

$\boxed{A\approx 1.024}$

مسائل المستوى الثالث ★★★

التمرين 04

إعداد الأستاذ: شداني عبد المالك

I) $g(x)=x\ln x+x$ ، $D_g=]0;3]$

1) دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}(x\ln x+x)=0$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x=0$.

إتجاه التغير: لدينا من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;3]$: $g'(x)=\left(1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)+1$ ومنه $g'(x)=2+\ln x$

إشارة $g'(x)$: $g'(x)=0$ يكافئ $2+\ln x=0$ يكافئ $\ln x=-2$ أي $x=e^{-2}$.

$g'(x)>0$ يكافئ $2+\ln x>0$ يكافئ $\ln x>-2$ أي $x>e^{-2}$.

$g'(x)<0$ يكافئ $2+\ln x<0$ يكافئ $\ln x<-2$ أي $x<e^{-2}$.

الخلاصة: g دالة متزايدة تماما على $[e^{-2};3]$ و متناقصة تماما على $]0;e^{-2}[$.

جدول التغيرات:

x	0		e^{-2}		3
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ 0	↘	$-e^{-2}$	↗	$3+3\ln 3$

2) أ) تبيان أن المعادلة $g(x)=2$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;3]$:

♦ الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على $]0;e^{-2}]$ و لكن $2\notin]0;-e^{-2}]$ و بتالي المعادلة $g(x)=2$ لا تقبل حلول على المجال $]0;e^{-2}]$.

♦ الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $[e^{-2};3]$ و $2\in[-e^{-2};3+3\ln 3]$ و بتالي المعادلة $g(x)=2$ تقبل حل وحيد α على المجال $[e^{-2};3]$.

♦ بما أن $g(1,46)=2,01$ و $g(1,45)=1,99$ ، نلاحظ أن $g(1,45)<2<g(1,46)$ إذن : $1,45<\alpha<1,46$.

ب) إستنتاج إشـــارة $g(x)-2$:

x	0		α		3
$g(x)-2$	‖	$-$	0	$+$	

II) $f(x)=|x-2|\ln x$ ، $D_f=]0;3]$.

1) تخمين حول قابلية الإشتقاق للدالة f عند 2:

الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 2 لان المنحنى (C_f) لا يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 2

(المنحنى (C_f) يقبل نصفي مماسين)

2) إثبات صحة التخمين:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x \xrightarrow{>} 2}\frac{|x-2|\ln x}{x-2}=\lim_{x \xrightarrow{>} 2}\frac{\cancel{(x-2)}\ln x}{\cancel{x-2}}=\lim_{x \xrightarrow{>} 2}\ln x=\ln 2$$

العدد المشتق من يمين العدد 2 هو $\ell_1=\ln 2$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x \xrightarrow{<} 2}\frac{|x-2|\ln x}{x-2}=\lim_{x \xrightarrow{<} 2}\frac{-\cancel{(x-2)}\ln x}{\cancel{x-2}}=\lim_{x \xrightarrow{<} 2}-\ln x=-\ln 2$$

العدد المشتق من يسار العدد 2 هو $\ell_2=-\ln 2$

つづく

الخلاصة: نلاحظ أن $\ell_1\neq\ell_2$ و بتالي الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 2 .

3) دراسة تغيرات الدالة f :

النهايات: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} |x-2|\ln x = -\infty$

إتجاه التغير: من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;3]$ ، لدينا: $f(x) = \begin{cases} (x-2)\ln x & ; 3 \geq x > 2 \\ -(x-2)\ln x & ; 0 < x < 2 \end{cases}$

ومنه من اجل $x \in]2;3]$: $f'(x) = 1 \times \ln x + (x-2) \times \frac{1}{x} = \frac{x\ln x + x - 2}{x}$ أي $f'(x) = \frac{g(x)-2}{x}$

و من أجل $x \in]0;2[$: $f'(x) = -1 \times \ln x - (x-2) \times \frac{1}{x} = \frac{-x\ln x - x + 2}{x}$ أي $f'(x) = -\frac{g(x)-2}{x}$

الخلاصة:

x	0		α		2		3
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	|	$+$	

f دالة متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha[$ و على $]2;3[$ و متناقصة تماما على المجال $]\alpha;2[$.

جدول التغيرات:

x	0		α		2		3
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	|	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$\ln 3$

III) $h(x) = (2-\cos x)\ln(\cos x)$ ، $D_h = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

1) تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب لـ (C_h) :

لدينا، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} h(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (2-\cos x)\ln(\cos x) = -\infty$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب لـ (C_h).

2) دراسة إتجاه تغير الدالة h :

من اجل كل عدد حقيقي x من $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ ، $h(x) = f(\cos x)$ (h مركب الدالة $x \mapsto \cos x$ متبوعة بالدالة $(x \mapsto f(x))$

الدالة "cos" متناقصة تماما على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ و f متزايدة تماما $]0;1]$ ومنه h متناقصة تماما على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

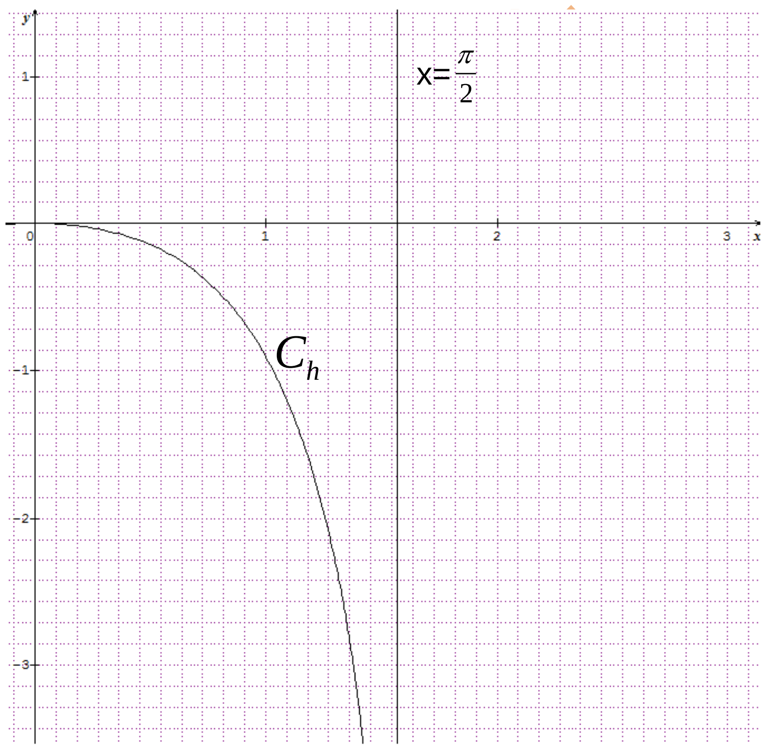
جدول تغيرات :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		-	||
$h(x)$	0	↘	$-\infty$ ||

つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

الرسم:



التمرين 05

سلسلة تمارين محلولة في الدوال اللوغاريتمية (مصطفاي عبد العزيز)

لتكن f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=1-\dfrac{\ln x^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.دراسة تغيّرات الدالة f .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 1-\frac{2\ln-x}{x}=\lim_{t\to+\infty} 1+\frac{2\ln t}{t}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2\ln x}{x}=1$$

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} \ln x^2=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} \dfrac{\ln x^2}{x}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} 1-\dfrac{\ln x^2}{x}=-\infty$

و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln x^2=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \dfrac{\ln x^2}{x}=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 1-\dfrac{\ln x^2}{x}=+\infty$.

$$f'(x)=-\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x-\ln x^2}{x^2}=\frac{\ln x^2-2}{x^2}$$

つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $\ln x^2-2$.

$f'(x)=0$ معناه $\ln x^2-2=0$ ويكافئ $\ln x^2=2$ ويكافئ $x^2=e^2$ أي $x=e$ أو $x=-e$

$f'(x)>0$ معناه $\ln x^2-2>0$ ويكافئ $\ln x^2>2$ ويكافئ $x^2>e^2$ أي $x>e$ أو $x<-e$

إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

الدّالة f متزايدة على كل من $]-\infty;-e]$ و $[e;+\infty[$ ومتناقصة على كل من $[-e;0[$ و $]0;e]$.

جدول تغيّرات الدّالة f.

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{e+2}{e}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{e-2}{e}$	↗	1

2. **إثبات أنّ المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $(\Delta): y=1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.**

$f(x)=1$ معناه $1-\frac{\ln x^2}{x}=1$ يكافئ $\ln x^2=0$ ويكافئ $x^2=1$ أي $x=1$ أو $x=-1$

إذن $(C_f)\cap(\Delta)=\{A(1;1),B(-1;1)\}$

3. **حساب** $f(-x)+f(x)$.

$$f(-x)+f(x)=1-\frac{\ln(-x)^2}{-x}+1-\frac{\ln x^2}{x}=2+\frac{\ln x^2}{x}-\frac{\ln x^2}{x}=2$$

من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $-x\in\mathbb{R}^*$ ولدينا $f(-x)+f(x)=2$ وعليه النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

4. **تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-0,71;-0,70[$**

الدّالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-0,71;-0,70]$ ولدينا $f(-0,71)\approx 0,04$ ، $f(-0,70)\approx -0,02$ أي $f(-0,71)\times f(-0,70)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $]-0,71;-0,70[$ بحيث $f(\alpha)=0$.

5. **إثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمسّ المنحنى (C_f) في نقطتين.**

لدينا معادلة المماس (T) من الشكل: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$A(0;1)\in(T)$ معناه $1=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$ وتكافئ $-x_0\left(\frac{\ln x_0^2-2}{x_0^2}\right)+1-\frac{\ln x_0^2}{x_0}=1$

وتكافئ $\left(\frac{-\ln x_0^2+2}{x_0}\right)-\frac{\ln x_0^2}{x_0}=0$ وتكافئ $\frac{-2\ln x_0^2+2}{x_0}=0$ وتكافئ $\ln x_0^2=1$ ومنه $x_0^2=e$

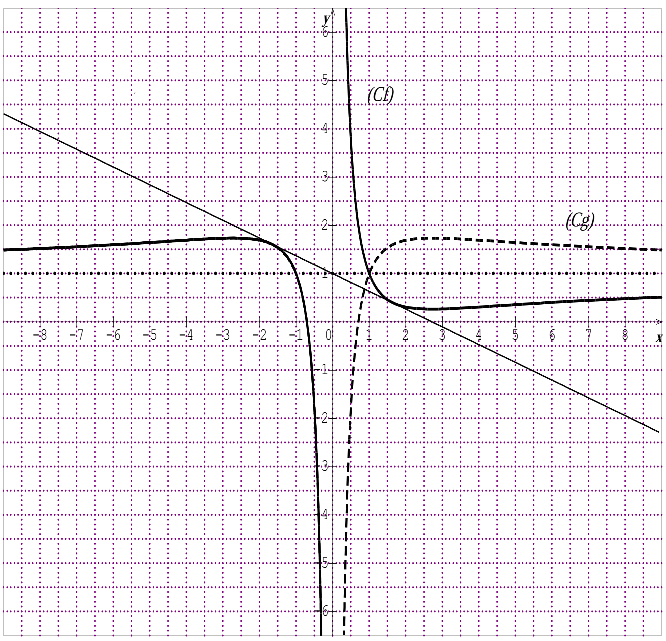
つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

أي $x_0=\sqrt{e}$ أو $x_0=-\sqrt{e}$. إذن (C_f) يقبل مماسين يشملان النقطة $A(0;1)$ عند النقطتين اللتين فاصلتيهما $\sqrt{e}$ و $-\sqrt{e}$ ولدينا $f'(\sqrt{e})=-\frac{1}{e}$ و $f'(-\sqrt{e})=-\frac{1}{e}$ إذن المماسان متوازيان وبالتالي هما متطابقان أي أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمسّ المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين إحداثيتيهما $(\sqrt{e};f(\sqrt{e}))$ و $(-\sqrt{e};f(-\sqrt{e}))$.

كتابة معادلةالمماس (T).

$y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})$ ومنه $y=\frac{-1}{e}x+1$.



6.**رسم المماس (T) والمنحنى (C_f).**

7.**المناقشة بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx+1$**

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y=mx+1$.

إذا كان $m<-\frac{1}{e}$ فإنّ المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان $m=-\frac{1}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين مضاعفين.

إذا كان $-\frac{1}{e}<m<0$ فإن المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان $m\geq 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلين.

8. h الدالة العددية للمتغيّر الحقيقي x حيث: $h(x)=1+\frac{\ln x^2}{|x|}$.

أ) تبيين أنّ h دالة زوجية.

من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $-x\in\mathbb{R}^*$.

ولدينا $h(-x)=1+\frac{\ln(-x)^2}{|-x|}=1+\frac{\ln x^2}{|x|}=h(x)$

$$\begin{cases} h(x)=1+\frac{\ln x^2}{x};x>0 \\ h(x)=1+\frac{\ln x^2}{-x};x<0 \end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases} h(x)=f(-x);x>0 \\ h(x)=f(x);x<0 \end{cases}$$

إذن (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $]-\infty;0[$ وبما أنّ h زوجية فإنّ (C_h) متناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب.

مسائل المستوى الرابع ★★★★

التمرين 01

مجموعة المتميز (جواليل أحمد أسامة)

لدينا $f(x)=\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)$.

1. حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(6x)=+\infty$

و النهاية الثانية نضرب في المرافق داخل اللوغاريتم النيبري لانها حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+1}-3x}\right)=-\infty$ لأن

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+1}-3x}\right)=0\ ;\ \lim\limits_{t\xrightarrow{>}0}\ln t=-\infty$.

ب.حساب المشتقة $f'(x)=\dfrac{\dfrac{18x}{2\sqrt{9x^2+1}}+3}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$ أي $f'(x)=\dfrac{\dfrac{9x}{\sqrt{9x^2+1}}+3}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$ أي $f'(x)=\dfrac{\dfrac{3.\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)}{\sqrt{9x^2+1}}}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$ أي

$f'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$ و هو المطلوب .

ج. f متزايدة على $\mathbb{R}$ لأن المشتقة موجبة

جدول تغيرات

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2. لدينا $g(x)=f(x)-x$.

أ- إثبات النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\dfrac{\ln(6x)}{x}-1\right]=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln(6x)}{x}\right]=0$

ب.إثبات عبارة المشتقة $g'(x)=f'(x)-1=\dfrac{3}{\sqrt{9x^2+1}}-1$ أي $g'(x)=\dfrac{3-\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt{9x^2+1}}$ ومنه $g'(x)=\dfrac{9-\left(9x^2+1\right)}{\left(3+\sqrt{9x^2+1}\right)\sqrt{9x^2+1}}$

أي أن $g'(x)=\dfrac{8-9x^2}{\left(3+\sqrt{9x^2+1}\right)\sqrt{9x^2+1}}$ و هو المطلوب .

ج. إشارة المشتقة من إشارة البسط $8-9x^2$ و التي تنعدم عند $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{8}}{3}$ و هي موجبة على المجال $\left[0\,;\,\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right]$ و سالبة على المجال $\left]\dfrac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right[$ و منه g متزايدة على المجال $\left[0\,;\,\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\dfrac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right[$

x	0		$\frac{2\sqrt{2}}{3}$		$+\infty$
$g(x)$	0	↗	$0,8$	↘	$-\infty$

3. أ. إثبات أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2,83<\alpha<2,84$

حساب $g(2,83)=0,005$ و $g(2,84)=-0,001$ بما أن الدالة مستمرة و متناقصة على المجال $]2,83;2,84[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة للمعادلة حل وحيد α

ب-استنتاج إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	

つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★

ج-تحديد وضعية (C_f) بالنسبة للمنصف الأول (Δ) : من إشارة $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان	(C_f) يقع تحت (Δ)

4. نعتبر $k(x)=\ln(6x)$ و (γ) التمثيل البياني للدالة k

أ. إثبات أن (γ) صورة للمنحنى للدالة $x\mapsto \ln(x)$ بتحويل نقطي بسيط $k(x)=\ln(6x)$ يعني أن $k(x)=\ln 6+\ln(x)$ أي أن (γ) صورة المنحنى الدالة $x\mapsto \ln(x)$ بتحويل نقطي عبارته التحليلية $\begin{cases} x'=x \\ y'=y+\ln 6 \end{cases}$ و هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;\ \ln(6))$.

ب. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-k(x)]$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-k(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)-\ln(6x)\right]$ أي.

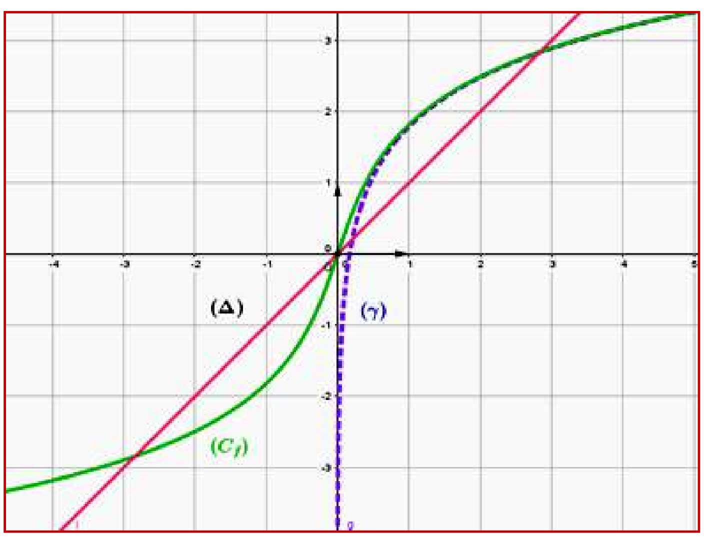
$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-k(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{9x^2+1}+3x}{6x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{6x}{6x}\right)=0$ التفسير البياني أن المنحنى (γ) مقارب للمنحنى (C_f) جهة $+\infty$.

5. أ. إثبات أن f دالة فردية : مجموعة تعريفها متناظرة بالنسبة الى 0 و

$f(-x)=\ln\left(\sqrt{9(-x)^2+1}+3(-x)\right)=\ln\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$ أي $f(-x)=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}\right)=-\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)$ إذن

$f(-x)=-f(x)$ و منه الدالة فردية محققة .

ب. إنشاء المنحنى من ما سبق نستنتج أن (C_f) متناظر بالنسبة للمبدأ O



التمرين 02

تمارين مقترحة (إبراهيم وعلي حسين)

1. تحديد نهاية g عند $-\infty$ ثم عند $+\infty$:

- لدينا $g(x)=e^{\frac{x}{2}}-e^{x}=e^{\frac{x}{2}}\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$ و $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{2}}=0^+ \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)=1 \end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0^+$.

つづく

- لدينا $g(x)=e^{\frac{x}{2}}-e^{x}=e^{x}\left(e^{-\frac{x}{2}}-1\right)$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-\frac{x}{2}}-1\right)=-1\end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

2. ايجاد $g'(x)$:

- لدينا $g(x)=e^{\frac{x}{2}}-e^{x}$ ومنه $g'(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'-\left(e^{x}\right)'=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}-\left(e^{x}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(1-2e^{\frac{x}{2}}\right)$ وذلك من اجل كل $x\in\mathbb{R}$.

- دراسة اتجاه تغير g :

- ندرس إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$

وبما ان $g'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(1-2e^{\frac{x}{2}}\right)$ فان اشارتها من إشارة $\left(1-2e^{\frac{x}{2}}\right)$ على $\mathbb{R}$

- لدينا $1-2e^{\frac{x}{2}}=0$ من اجل $e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}$ ومنه $\frac{x}{2}=-\ln 2$ ومنه $x=-2\ln 2$

وبذلك متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2\ln 2]$

و متناقصة تماما على المجال $[-2\ln 2;+\infty[$

x	$-\infty$	$-2\ln 2$	$+\infty$
$1-e^{\frac{x}{2}}$	$+$	0	$-$

- تشكيل جدول تغيرات $g(x)$:

$$g(-2\ln 2)=e^{-\ln 2}-e^{-2\ln 2}=e^{\ln\frac{1}{2}}-e^{\ln\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

x	$-\infty$		$-2\ln 2$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$	0^+	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3. احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية :

$g(0)=e^{0}-e^{0}=1-1=0$ و من جدول تغيرات g نستنتج إشارة $g(x)$

لدينا

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

إذا $\begin{cases} g(x)>0 & / x<0 \\ g(x)=0 & / x=0 \\ g(x)<0 & / x>0 \end{cases}$

<u>الجزء الثاني :</u>

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$ حيث $f(x)=\ln|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}|$ و $(\mathcal{C})$تمثيلها البياني .

1. تحديد نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ و عند 0 :

- لدينا $f(x)=\ln|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}|$ ومنه $f(x)=\ln|g(x)|$ من اجل كل $x\in\mathbb{R}^*$

- لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0^+$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}|g(x)|=0^+$ وبذلك $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln|g(x)|=-\infty$.

つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

- لدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}|g(x)|=+\infty$ وبذلك $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln|g(x)|=-\infty$.

- لدينا $\lim_{x\to0} g(x)=0$ ومنه $\lim_{x\to0}|g(x)|=0^+$ وبذلك $\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\ln|g(x)|=-\infty$.

2. حساب $f'(x)$:

لدينا من اجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ فان $f(x)=\ln|g(x)|$ ومنه $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

- إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		$-2\ln2$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	|	$+$	
$g(x)$		$-$	|	$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	

اذا $\begin{cases} f'(x)>0 & / x\in]-\infty;-2\ln2[\cup]0;+\infty[\\ f'(x)=0 & / x=-2\ln2 \\ f'(x)<0 & / x\in]-2\ln2;0[\end{cases}$

3. استنتج اتجاه تغير f :

من إشارة $f'(x)$ نستنتج ان f متناقصة تماما على المجال $[-2\ln2;0[$
ومتزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-2\ln2]$ و $]0;+\infty[$.

- تشكيل جدول تغيرات f :

- $f(-2\ln2)=\ln g(-2\ln2)=\ln\frac{1}{4}=-2\ln2$

x	$-\infty$		$-2\ln2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2\ln2$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. إيجاد فاصلة تقاطع $(\mathcal{C})$ مع محور الفواصل :

- نحل المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}^*$

$f(x)=0$ تكافئ $\ln|e^{\frac{x}{2}}-e^x|=0$ ومنه $|e^{\frac{x}{2}}-e^x|=1$ ومنه $\begin{cases} e^{\frac{x}{2}}-e^x=-1 / x\in]0;+\infty[\\ e^{\frac{x}{2}}-e^x=1 \quad / x\in]-\infty;0[\end{cases}$

- $-\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2+e^{\frac{x}{2}}-1=0 \quad / x\in]-\infty;0[$ ومنه $\begin{cases} -t^2+t-1=0 & / t\in\mathbb{R}_+^* \\ t=e^{\frac{x}{2}} / x\in]-\infty;0[\end{cases}$

$\Delta=1^2-4(-1)(-1)=-3$ ومنه المعادلة لا تقبل حلول في المجال $]-\infty;0[$

- $-\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2+e^{\frac{x}{2}}+1=0 / x\in]0;+\infty[$ ومنه $\begin{cases} -t^2+t+1=0 & / t\in\mathbb{R}_+^* \\ t=e^{\frac{x}{2}} / x\in]0;+\infty[\end{cases}$

つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

- $\Delta=1^2-4(-1)(1)=5$ ومنه $\begin{cases} t_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ t=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\notin\mathbb{R}_+^* \end{cases}$ ومنه $e^{\frac{x}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ومنه $x=2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

وبذلك $(\mathcal{C})$ يقطع محور الفواصل في النقطة $\left(2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);0\right)$.

5. أ)- التحقق أنه من أجل كل $x\in\left]0;+\infty\right[$ لدينا $f(x)-x=\ln\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)$:

- من اجل كل $x\in\left]0;+\infty\right[$ فان $e^{\frac{x}{2}}-e^x<0$ ومنه $\left|e^{\frac{x}{2}}-e^x\right|=e^x-e^{\frac{x}{2}}=e^x\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)$

ومنه $f(x)=\ln\left[e^x\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)\right]=\ln e^x+\ln\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)=x+\ln\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)$

وبذلك $f(x)-x=\ln\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)$.

ب)- استنتاج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحني $(\mathcal{C})$ بجوار $(+\infty)$:

- بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty}1-e^{-\frac{x}{2}}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)=0$ وبذلك $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=0$

ومنه المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحني $(\mathcal{C})$ بجوار $(+\infty)$

جـ)- دراسة وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمقارب (D) :

- ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-x\right]$ على $\mathbb{R}^*$

لدينا $f(x)-x=\ln|e^{\frac{x}{2}}-e^x|-x=\ln|e^{\frac{x}{2}}-e^x|-\ln\left(e^x\right)=\ln\frac{|e^{\frac{x}{2}}-e^x|}{e^x}=\ln|e^{-\frac{x}{2}}-1|$

ومنه إشارة الفرق $\left[f(x)-x\right]$ من إشارة $\left[|e^{-\frac{x}{2}}-1|-1\right]$ على $\mathbb{R}^*$.

لدينا $\left[e^{-\frac{x}{2}}-2\right]\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{|e^{-\frac{x}{2}}-1|+1}=\frac{\left(e^{-\frac{x}{2}}-1\right)^2-1}{|e^{-\frac{x}{2}}-1|+1}=|e^{-\frac{x}{2}}-1|-1$ و بما ان $\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{|e^{-\frac{x}{2}}-1|+1}>0$ مهما كان $x\in\mathbb{R}^*$

وبذلك إشارة الفرق $\left[f(x)-x\right]$ من إشارة $\left[e^{-\frac{x}{2}}-2\right]$ على $\mathbb{R}^*$.

لدينا $e^{-\frac{x}{2}}-2=0$ من اجل $e^{-\frac{x}{2}}=2$ ومنه $-\frac{x}{2}=\ln 2$ وبذلك $x=-2\ln 2$

ومنه $(\mathcal{C})$ يقع فوق (D) في المجال $\left]-\infty;-2\ln 2\right[$

つづく

x	$-\infty$	$-2\ln 2$	0	$+\infty$
$e^{-\frac{x}{2}}-2$	$+$	0	$-$ ‖	$-$

و اسفله في المجال $]-2\ln 2;0[\cup]0;+\infty[$

ويتقاطعان في النقطة $(-2\ln 2;-2\ln 2)$

6. أ)- التحقق أنه من أجل كل $x\in]-\infty;0[$ لدينا $f(x)-\dfrac{x}{2}=\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$:

- من اجل كل $x\in]-\infty;0[$ فان $e^{\frac{x}{2}}-e^x>0$ و منه $\left|e^{\frac{x}{2}}-e^x\right|=e^{\frac{x}{2}}-e^x=e^{\frac{x}{2}}\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$

ومنه $f(x)=\ln\left[e^{\frac{x}{2}}\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)\right]=\ln\left(e^{\frac{x}{2}}\right)+\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)=\dfrac{x}{2}+\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$

وبذلك $f(x)-\dfrac{x}{2}=\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$.

ب)- استنتج ان المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=\dfrac{x}{2}$ مقارب للمنحني بجوار $(-\infty)$:

- بما ان $\lim\limits_{x\to-\infty}1-e^{\frac{x}{2}}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)=0$ وبذلك $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-\dfrac{x}{2}=0$

ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=\dfrac{x}{2}$ مقارب للمنحني بجوار $(-\infty)$.

جـ)- ثم ادرس وضعية بالنسبة للمقارب (Δ) :

- ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-\dfrac{x}{2}\right]$ على $\mathbb{R}^*$

لدينا $f(x)-\dfrac{x}{2}=\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-e^x\right|-\dfrac{x}{2}=\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-e^x\right|-\ln\left(e^{\frac{x}{2}}\right)=\ln\dfrac{\left|e^{\frac{x}{2}}-e^x\right|}{e^{\frac{x}{2}}}=\ln\left|1-e^{\frac{x}{2}}\right|$

ومنه إشارة الفرق $\left[f(x)-\dfrac{x}{2}\right]$ من إشارة $\left[\left|1-e^{\frac{x}{2}}\right|-1\right]$ على $\mathbb{R}^*$.

لدينا $\left|1-e^{\frac{x}{2}}\right|-1=\dfrac{\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)^2-1}{\left|1-e^{\frac{x}{2}}\right|+1}=\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\left|1-e^{\frac{x}{2}}\right|+1}\left[e^{\frac{x}{2}}-2\right]$

و بما ان $\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\left|1-e^{\frac{x}{2}}\right|+1}>0$ مهما كان $x\in\mathbb{R}^*$

つづく

وبذلك إشارة الفرق $\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]$ من إشارة $\left[e^{\frac{x}{2}}-2\right]$ على $\mathbb{R}^*$.

لدينا $e^{\frac{x}{2}}-2=0$ من اجل $e^{\frac{x}{2}}=2$ ومنه $\frac{x}{2}=\ln 2$ وبذلك $x=2\ln 2$

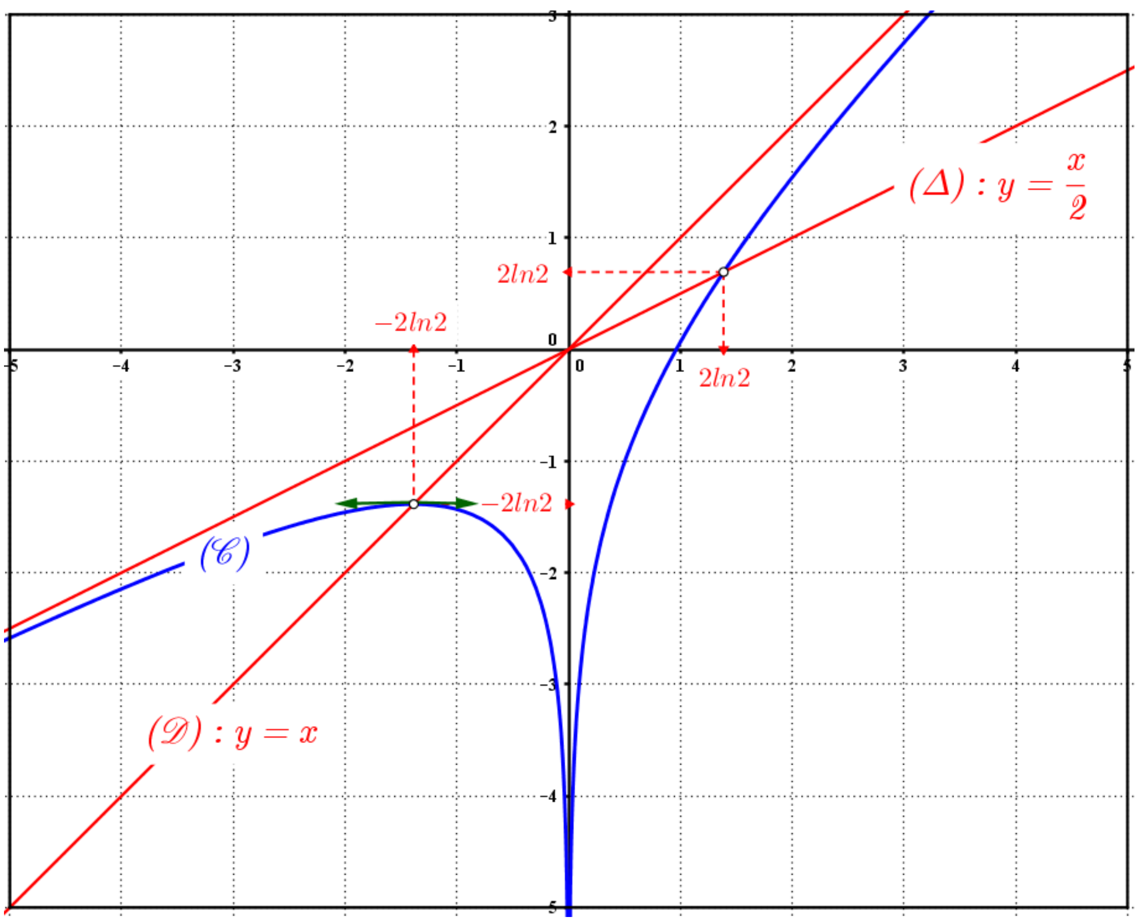
ومنه يقع اسفل (Δ) في المجال $]-\infty;0[\cup]0;2\ln 2[$

x	$-\infty$		0		$2\ln 2$		$+\infty$
$e^{\frac{x}{2}}-2$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

و فوقه في المجال $]2\ln 2;+\infty[$

ويتقاطعان في النقطة $(2\ln 2;2\ln 2)$

7. رسم $(\mathcal{C})$، (D) و (Δ) في المعلم السابق :



8.أ)- التحقق ان المعادلة (1) تكافئ $f(x)=mx$:

لدينا $\ln\left|e^{x\left(\frac{1}{2}-m\right)}-e^{x(1-m)}\right|=0$ تكافئ $\ln\left|e^{\frac{1}{2}x-xm}-e^{x-xm}\right|=0$ تكافئ $\ln\left(e^{-mx}\right)\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|=0$

تكافئ $\ln\left(e^{-mx}\right)+\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|=0$ تكافئ $-mx+\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|=0$ تكافئ $\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|=mx$ تكافئ $f(x)=mx$.

つづく

ب)- استنتاج بيانيا عدد واشارة حلول المعادلة (1) :

لدينا (1) تكافئ $f(x)=mx$ تكافئ $\begin{cases} y=f(x) \\ y=mx \end{cases}$ ومنه حلول (1) هي فواصل نقط تقاطع $(\mathcal{C})$ والمستقيم $y=mx$

من البيان نستنتج : عندما $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ فان المعادلة (1) تقبل حلا موجبا .

عندما $x\in\left]\frac{1}{2};1\right[$ فان المعادلة (1) تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

عندما $x\in\left[1;+\infty\right[$ فان المعادلة (1) تقبل حلا سالبا .

التمرين 03

كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

الجزء الأوّل : $g(x)=2-x-\ln(x-1)^2$

1) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} g(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1}(2-x)=1 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} -\ln(x-1)^2=+\infty \end{cases}$.

المستقيم ذو المعادلة : $x=1$ مقارب موازي لحامل محور التراتيب لـلمنحنى (C_g) بجوار $+\infty$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\ln(x-1)^2=-\infty \end{cases}$.

2) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

❖) الدالة المشتقة : $g'(x)=-1-\dfrac{2}{x-1}$ ، أي : $g'(x)=\dfrac{-x-1}{x-1}$.

نلاحظ أنّه من أجل كل $x>1$ تكون : $g'(x)<0$ ، و منه : الدالة g متناقصة تماما على $\left]1;+\infty\right[$.

❖) جدول التغيرات :

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖ $-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$ ↘	$-\infty$

3) حساب $g(2)$:

$g(2)=0$ ، سنلخص إشارة $g(x)$ في الجدول التالي :

x	1		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

4) لدينا : $\left|g(x)\right|=1$ تكافئ : $g(x)=1$ ، أو $g(x)=-1$.

❖ على المجال $]1;2]$ ، الدالة g مستمرة و رتيبة ، و صورة هذا المجال هي $[0;+\infty[$ ، وَ $1\in[0;+\infty[$ ،
إذن المعادلة : $g(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1;2[$ ، (حسب مبرهنة القيم المتوسطة) .

❖ على المجال $[2;+\infty[$: الدالة g مستمرة و رتيبة ، و صورة هذا المجال هي $]-\infty;0]$ ، وَ $-1\in]-\infty;0]$ ،
إذن المعادلة $g(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا β من المجال $]2;+\infty[$ ، (حسب مبرهنة القيم المتوسطة) .

❖ نحسب : $\begin{cases} g(1,70)=.... \\ g(1,71)=.... \end{cases}$ و منه : $1,70<\alpha<1,71$ ، $\begin{cases} g(2,37)=.... \\ g(2,38)=.... \end{cases}$ و منه : $2,37<\beta<2,38$.

5) كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الترتيبة 1 ، أي عند النقطة $A(\alpha;1)$:

$(\Delta):y=g'(\alpha)(x-\alpha)+g(\alpha)$ ، أي : $(\Delta):y=\dfrac{-\alpha-1}{\alpha-1}(x-\alpha)+1$ ،

و منه : $(\Delta):y=\dfrac{-\alpha-1}{\alpha-1}x+\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1$

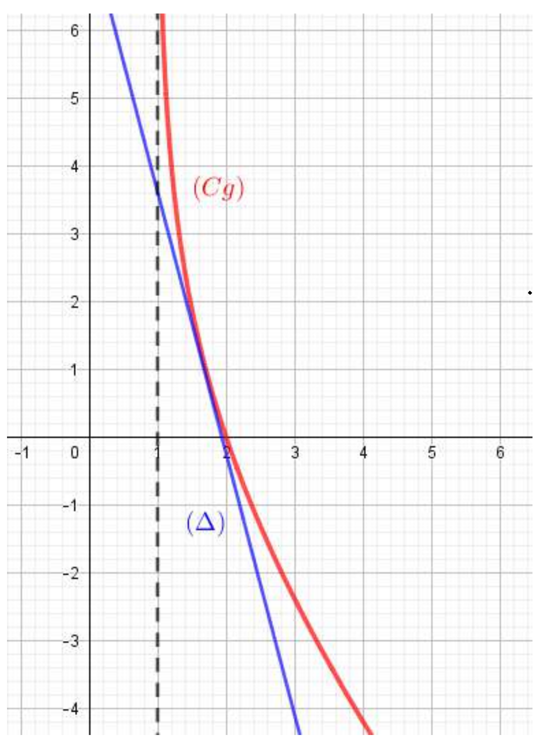
❖ حصر العدد $\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}$:

لدينا : $1,70<\alpha<1,71$ ، أي : $2,89<\alpha^2<2,92$ ، أي : $4,59<\alpha^2+\alpha<4,63.....(1)$.

لدينا : $1,70<\alpha<1,71$ ، أي : $0,70<\alpha-1<0,71$ ، أي : $\dfrac{1}{0,71}<\dfrac{1}{\alpha-1}<\dfrac{1}{0,70}.....(2)$.

بضرب (1) في (2) نجد : $\dfrac{4,59}{0,71}<\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}<\dfrac{4,63}{0,70}$ ، و منه : $6,46<\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}<6,61$.

ب) إنشاء (Δ) و المنحنى (C_g) :



ج) المناقشة البيانية :

لدينا من أجل كل $x>1$: $2-2\ln(x-1)=\dfrac{-2}{\alpha-1}x+m$ ،

أي : $2-x-2\ln(x-1)=\dfrac{-2}{\alpha-1}x-x+m$

أي : $g(x)=(\dfrac{-2}{\alpha-1}-1)x+m$ ، و منه : $g(x)=(\dfrac{-\alpha-1}{\alpha-1})x+m$.

و لدينا : $(\Delta):y=\dfrac{-\alpha-1}{\alpha-1}x+\underbrace{\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1}_{m}$

، و منه المناقشة تكون كالتالي :

❖ إذا كان : $m>\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1$ فإنّ المعادلة تقبل حلين متمايزين .

❖ إذا كان : $m=\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1$ فإنّ المعادلة تقبل حل وحيد .

❖ إذا كان : $m<\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلول .

つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★

الجزء الثاني : $f(x)=\left[x-1+2\ln(x-1)\right]\left[x-3+2\ln(x-1)\right]$.

1) نعلم أنّ :

$\left[g(x)\right]^2-1=\left[g(x)-1\right]\left[g(x)+1\right]=\left[2-x-\ln(x-1)^2-1\right]\left[2-x-\ln(x-1)^2+1\right]$ ،

و منه من أجل كل عدد حقيقي $x>1$ فإنّ : $\left[g(x)\right]^2-1=\left[1-x-2\ln(x-1)\right]\left[3-x-2\ln(x-1)\right]$

و بحكم : $(-a)\times(-b)=a\times b$ ، أي : $\left[g(x)\right]^2-1=\left[x-1+2\ln(x-1)\right]\left[x-3+2\ln(x-1)\right]$.

و عليه : $f(x)=\left[g(x)\right]^2-1$.

2) حساب النهايات : (نستعمل الشكل : $f(x)=\left[g(x)\right]^2-1$) .

❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\left[g(x)\right]^2-1=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=$ لأنّ : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}g(x)=+\infty$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)\right]^2-1=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=$ لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

3) أ) حساب $f'(x)$ من أجل كل عددي حقيقي من $]1;+\infty[$: (نستعمل الشكل : $f(x)=\left[g(x)\right]^2-1$)

$f'(x)=2\times g(x)\times g'(x)$ ، و منه : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)\times g'(x)$.

x	1		2		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	
$g(x)\times g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ب) الدالة f متناقصة على المجال $]1;2]$ ، و متزايدة على المجال $[2;+\infty[$.

❖) جدول التغيرات :

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

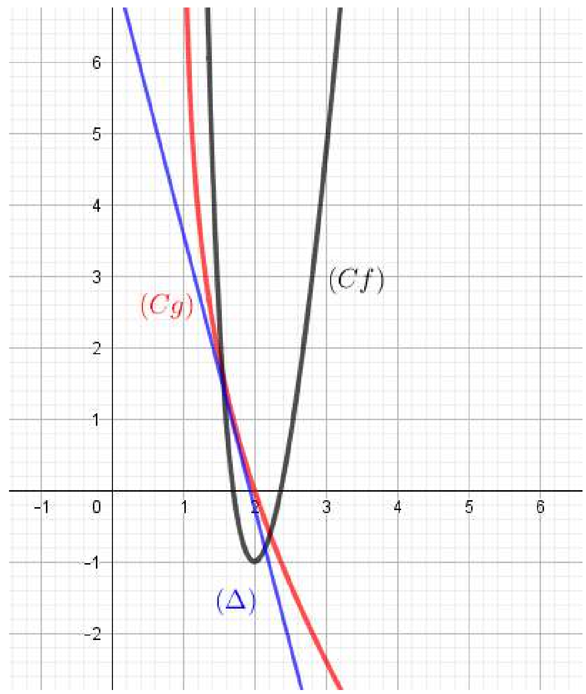
4) نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل :

❖) نحل المعادلة $f(x)=0$ ، أي : $\left[g(x)\right]^2-1=0$ ، أي : $\left[g(x)\right]^2=1$ ، و منه : $\begin{cases}g(x)=1\\g(x)=-1\end{cases}$

و عليه : $x=\alpha$ ، أو $x=\beta$. إذن : (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين : $A(\alpha;0)$ وَ $B(\beta;0)$.

つづく

❖) الإنشـاء :



5) لدينا : $h(x) = (\cos x + 2\ln\cos x)(-2 + \cos x + 2\ln\cos x)$.

أ) نلاحظ أنّ : $h(x) = f(1+\cos x)$ ، و منه : $h = f \circ u$ ، حيث : $u(x) = 1 + \cos x$.

ب)

❖) حساب النهاية : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} h(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} f(1+\cos x) = +\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} (1+\cos x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty \end{cases}$.

❖) التفسير الهندسي : المنحنى (Γ) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور التراتيب معادلته : $x = \dfrac{\pi}{2}$.

❖) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة h : لدينا : $h(x) = f(1+\cos x)$.

– من أجل كل $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ ، يكون : $0 < \cos x \le 1$ ، أي : $1 < 1 + \cos x \le 2$ ، ومنه : $1 + \cos x \in \left]1;2\right]$

و الدالة f متناقصة على $\left]1;2\right]$.

– و من جهة أخرى لدينا الدالة $x \mapsto 1 + \cos x$ متناقصة على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

و منه : الدالة h متزايدة على المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ ، و ذلك حسب مبرهنة إتجاه تغيّر دالة مركبة .

ج) جدول التغيرات للدالة h :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$h(x)$	-1 ↗	$+\infty$ ‖

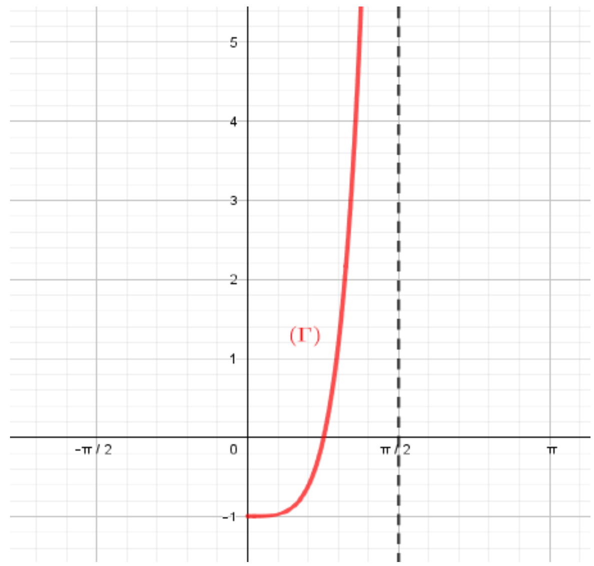
❖) $h(0) = f(1+\cos(0))$ ، أي :

$$h(0) = f(2) = -1$$

つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★

❖) الإنشـاء :



التمرين 04

استعد للبكالوريا مع توامي (توامي عمر)

I- 1/ دراسة تغيرات الدالة g:

① مجموعة التعريف: لدينا $D_g =]-\infty;+\infty[$.

② حساب النـهايات: $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(xe^x - 1) = 0 - 1 = -1$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(xe^x - 1) = +\infty - 1 = +\infty$

③ اتجاه التغير: الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $g'(x) = e^x(x+1)$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x+1)$ لأن e^x دوما موجب إذن:

- إذا كان: $x \in]-\infty;-1[$ فإن: $g'(x) < 0$ أي الدالة g متناقصة تماماً .
- إذا كان: $x \in [-1;+\infty[$ فإن: $g'(x) \geq 0$ أي الدالة g متزايدة تماماً .

④ جدول التغيرات: $g(-1) = -\frac{1}{e} - 1 \approx -1,37$

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
$g(x)$	-1	↘	$g(-1)$	↗	0	↗	$+\infty$

2/ لنبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α:

لدينا: $g(0,567) \approx -0,22$ و $g(0,568) \approx 0,0006$ منه: $g(0,567) \times g(0,568) < 0$

وَ g دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0,567;0,568]$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,567 < \alpha < 0,568$.

3/ استنتاج إشارة $g(x)$:

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج:

- إذا كان: $x \in]-\infty;\alpha[$ فإن: $g(x) < 0$
- إذا كان: $x \in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x) > 0$.

つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

II- 1/ إثبات أنه من أجل $x>0$ يكون لدينا : $f(x)=x^2\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)^2$

نعلم أنه إذا كان: $x>0$ فإن: $|x|=x$ منه: $f(x)=\left(e^x-\ln x\right)^2=\left(x\times\frac{e^x-\ln x}{x}\right)^2$ إذن: $f(x)=x^2\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)^2$.

- استنتاج: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)^2=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

2/ أ- لنبين أن المعادلة $e^x-\ln(-x)=0$ تقبل حلاً وحيداً β:

نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي: $h(x)=e^x-\ln(-x)$

منه: $h'(x)=e^x-\frac{1}{x}>0$ أي الدالة h مستمرة و رتيبة تماماً على المجال $]-\infty;0[$

وَ $h(-1,3)\approx 0,01$ ، $h(-1,4)\approx -0,08$ أي: $h(-1,4)\times h(-1,3)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيداً β حيث $\beta\in]-1,4;-1,3[$.

ب- استنتاج حلول المتراجحتين:

- لدينا من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ، $e^x>\ln(x)$ إذن مجموعة حلول المتراجحة هي: $S_1=]0;+\infty[$
- وَ من أجل كل x من المجال $]-\infty;0[$ ، h دالة متزايدة تماماً وَ $h(\beta)=0$ وعليه مجموعة حلول المتراجحة $e^x<\ln(-x)$ هي: $S_2=]-\infty;\beta[$ وَ مجموعة حلول المتراجحة $e^x\geq\ln(-x)$ هي: $S_3=[\beta;0[$.

3/ أ- لنبين أن: $f'(x)=\frac{2}{x}\left(e^x-\ln|x|\right)g(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$ حيث: $f'(x)=2\left(e^x-\ln|x|\right)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)=2\left(e^x-\ln|x|\right)\left(\frac{xe^x-1}{x}\right)$

منه: $f'(x)=\frac{2}{x}\left(e^x-\ln|x|\right)g(x)$.

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

الجدول المقابل يوضح إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$		β		0		α		$+\infty$
$\frac{2}{x}$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$e^x-\ln\lvert x\rvert$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

- إذا كان: $x\in]-\infty;\beta]\cup]0;\alpha]$ فإن: $f'(x)\leq 0$ أي الدالة f متناقصة .
- إذا كان: $x\in[\beta,0[\cup[\alpha;+\infty[$ فإن: $f'(x)\geq 0$ أي الدالة f متزايدة .

4/ لنبين أن: $f(\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)^2$

لدينا: $f(x)=\left(e^x-\ln|x|\right)^2$ منه: $f(\alpha)=\left(e^\alpha-\ln\alpha\right)^2$ ...(1)

وَ حسب الجزء الأول لدينا: $g(\alpha)=0$ معناه: $\alpha e^\alpha-1=0$ تكافئ: ($e^\alpha=\frac{1}{\alpha}$ و $\alpha=-\ln\alpha$) ...(2)

نعوض (2) في (1) نجد: $f(\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)^2$.

つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

- تعيين حصراً للعدد $f(\alpha)$ سعته 10^{-2}:

لدينا: $0,567 < \alpha < 0,568$ منه: $\frac{1}{0,567} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0,568}$ و منه: $1,761 < \frac{1}{\alpha} < 1,764$

و منه: $1,761 + 0,567 < \frac{1}{\alpha} + \alpha < 1,764 + 0,568$ أي: $2,328 < \frac{1}{\alpha} + \alpha < 2,331$ بالتربيع نجد: $5,42 < f(\alpha) < 5,43$.

5/ جدول تغيرات الدالة f:

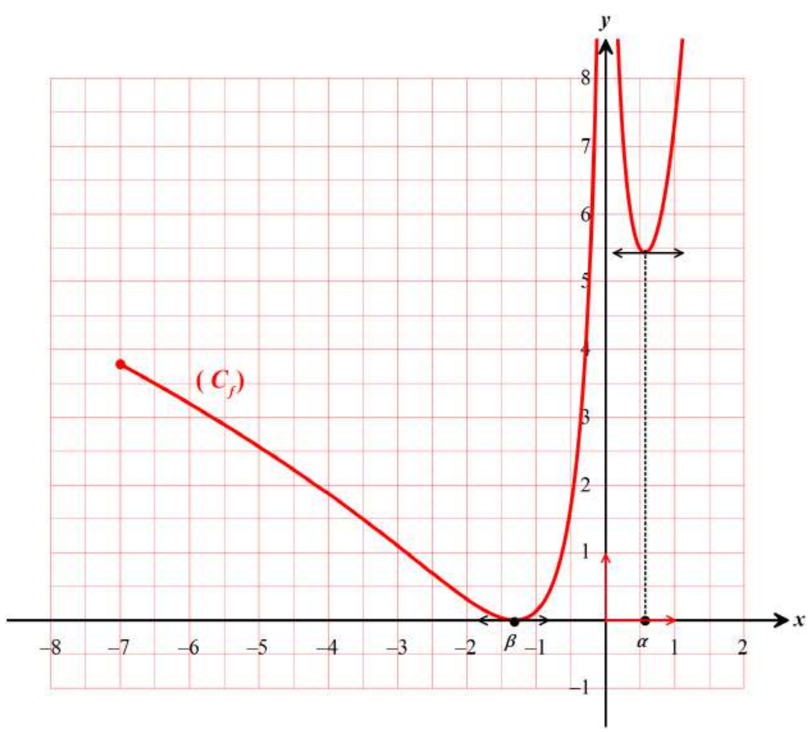
x	$-\infty$	β		0		α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$f(\beta)=0$	$\nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow +\infty$

6/ المناقشة البيانية:

لدينا: $e^x - \ln|x| - \sqrt{m} = 0$ تكافئ: $\sqrt{m} = e^x - \ln|x|$ بالتربيع الطرفين نجد: $\begin{cases} m = f(x) \\ e^x > \ln|x| \end{cases}$ أي: $\begin{cases} m = f(x) \\ x \in [\beta;0[\cup]0;+\infty[\end{cases}$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل.

- إذا كان: $m \in]-\infty;0[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .
- إذا كان: $m = 0$ فإن المعادلة تقبل حل مضاعف سالب وهو β .
- إذا كان: $m \in]0; f(\alpha)[$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد سالب .
- إذا كان: $m = f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب و الأخر مضاعف موجب و هو α .
- إذا كان: $m \in]f(\alpha);+\infty[$ فإن المعادلة تقبل ثلاث حلول، اثنان موجبان و الأخر سالب.



مسائل المستوى الرابع ★★★★★

التمرين 05

الموضوع المقترح الرابع عشر (مصطفاي عبد العزيز)

I- الدّالة g معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^{x}$.

1- دراسة تغيّرات الدالة g.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{x}=\lim_{x\to-\infty} xe^{x}-e^{x}=0$$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{x}=+\infty$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$.

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x:

$$g'(x)=e^{x}+e^{x}(x-1)=xe^{x}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $e^{x}>0$ ، ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x على $\mathbb{R}$.

من أجل $x\in]-\infty;0[$ ، $g'(x)<0$

من أجل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)>0$ و $g'(0)=0$

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2- تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x: $1+(x-1)e^{x}\geq 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)\geq -1$ معناه $(x-1)e^{x}\geq -1$ أي $(x-1)e^{x}+1\geq 0$

II- الدّالة f معرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{x}; x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

1- أ - تبيين أنّ f مستمرة على $[0;+\infty[$.

لدينا الدالة $x\mapsto e^{x}-1$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ والدالة $x\mapsto x$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ و هي لاتنعدم على هذا المجال إذن حاصل قسمتهما يكون دالة مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ أي الدالة f مستمرة على المجال $]0;+\infty[$.

ولدينا $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1=f(0)$ ومنه الدالة f مستمرة على يمين 0.

وبالتالي الدالة f مستمرة على $[0;+\infty[$.

ب - حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}-\frac{1}{x}=+\infty$$

つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★★

2- أ - التحقّق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1+(x-1)e^x}{x^2}$.

ليكن $x\in]0;+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{xe^x-\left(e^x-1\right)}{x^2}=\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}$$

ب - استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f.

لدينا من أجل كل $x\in]0;+\infty[$، $(x-1)e^x+1>0$ و $x^2>0$ إذن من أجل كل $x\in]0;+\infty[$:

$f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	1 ↗	$+\infty$

III - n عدد طبيعي حيث $n\geq 1$؛ f_n الدّالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f_n(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+n\ln x$.

و (C_n) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f_n على $]0;+\infty[$.

الدالة f_n هي مجموع دالتين متزايدتين تماما على المجال $]0;+\infty[$ (الدالة f والدالة $x\mapsto n\ln x$)

إذن الدالة f_n متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

2- حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f_n(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}f_n(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{e^x-1}{x}+n\ln x=-\infty \text{ لأنّ } \lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{e^x-1}{x}=1 \text{ و } \lim_{x\xrightarrow{>}0}n\ln x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}+n\ln x=+\infty \text{ لأنّ } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}=+\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty}n\ln x=+\infty$$

3- دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}).

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{e^x-1}{x}+(n+1)\ln x-\left[\frac{e^x-1}{x}+n\ln x\right]=n\ln x+\ln x-\ln x=\ln x$$

$f_{n+1}(x)-f_n(x)=0$ تعني $\ln x=0$ أي $x=1$

$f_{n+1}(x)-f_n(x)>0$ تعني $\ln x>0$ أي $x>1$

$f_{n+1}(x)-f_n(x)<0$ تعني $\ln x<0$ أي $0<x<1$

x	0	1	$+\infty$
$f_{n+1}(x)-f_n(x)$	$-$	0	$+$
الوضعية النسبية	(C_{n+1}) تحت (C_n)		(C_{n+1}) فوق (C_n)

(C_{n+1}) و (C_n) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(1;e-1)$.

4- تبيين أنّ جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثيتيها.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $f_n(1)=e-1$ وعليه $B(1;e-1)$.

つづく

مسائل المستوى الرابع ★★★★

5- أ - تبيين انه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$.

الدالة f_1 مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[0,3;0,4]$ و $f_1(0.3)\approx -0.03$ ، $f_1(0.4)\approx 0.31$ أي $f_1(0.3)\times f_1(0.4)<0$ إذن حسب مبرهنة القيّم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من المجال $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$.

ب - تبيين أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ فإنّ: $f_n(\alpha_1)<0$.

$$f_n(\alpha_1)-f_1(\alpha_1)=\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}+n\ln\alpha_1-\left[\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}+\ln\alpha_1\right]=n\ln\alpha_1-\ln\alpha_1=(n-1)\ln\alpha_1$$

لكن $f_1(\alpha_1)=0$ ومنه $f_n(\alpha_1)=(n-1)\ln\alpha_1$

لدينا من أجل كل $n>1$، $n-1>0$ وبما أنّ $0<\alpha_1<1$ فإنّ $\ln\alpha_1<0$ إذن $(n-1)\ln\alpha_1<0$

أي $f_n(\alpha_1)<0$. (يمكن استعمال عدة طرق).

تبيين أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$.

الدالة f_n مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وبالخصوص على $[\alpha_1;1]$ و $f_n(1)=e-1$

ولدينا $f_n(\alpha_1)<0$ إذن $f_n(1)\times f_n(\alpha_1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$.

6- أ - تبيين أنّه، من أجل كل x من $]0;1]$: $\frac{e^x-1}{x}\leq e-1$.

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ إذن من أجل كل $x\in]0;1]$ لدينا $f(x)\leq f(1)$

ومنه $f(x)\leq e-1$ أي $\frac{e^x-1}{x}\leq e-1$.

ب - استنتاج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$: $\ln(\alpha_n)\geq\frac{1-e}{n}$، ثمّ $\alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

لدينا $\alpha_n\in]0;1]$ ومنه $\frac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n}\leq e-1$

ولدينا $f_n(\alpha_n)=0$ معناه $\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}+n\ln\alpha_1=0$ ومنه $\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}=-n\ln\alpha_1$

إذن $-n\ln\alpha_1\leq e-1$ وتكافئ $\ln\alpha_1\geq\frac{1-e}{n}$ وبالتالي $\alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

جـ - إيجاد نهاية المتتالية (α_n).

لدينا $e^{\frac{1-e}{n}}\leq\alpha_n\leq 1$ ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{1-e}{n}}=1$ إذن حسب النهايات بالمقارنة نستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=1$.

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

التمرين 01

مجلة Top Maths في الدوال الوسيطية والمدمجة (بوشناق يوسف)

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما α، نعتبر الدالة f_α المعرّفة على المجال $\left]-\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ بـ:

$f_\alpha(x)=\ln(\alpha x+1)-\alpha x$.

$(\mathcal{C}_\alpha)$ المنحنى الممثل للدالة f_α في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الجزء الأول:

1. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f_α.

ليكن $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ وليكن $x\in\left]-\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$: $f'_\alpha(x)=\frac{\alpha}{\alpha x+1}-\alpha=\frac{-\alpha^2x}{\alpha x+1}$.

لدينا من أجل كل $x\in\left]-\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$، $\alpha x+1>0$ ومنه: $f'_\alpha(x)=0$ معناه $x=0$ ؛ $f'_\alpha(x)<0$ معناه $x\in\left]0;+\infty\right[$ و $f'_\alpha(x)>0$ معناه $x\in\left]-\frac{1}{\alpha};0\right[$ ؛ وعليه فالدالة f_α متزايدة تماما على المجال $\left]-\frac{1}{\alpha};0\right]$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[0;+\infty\right[$.

2. استنتج أنه من أجل كل عدد x موجب تماما يكون: $\ln(\alpha x+1)<\alpha x$.

الدالة f_α متناقصة تماما على المجال $\left[0;+\infty\right[$ ومنه إذا كان $x>0$ فإن $f_\alpha(x)<f_\alpha(0)$ أي $\ln(\alpha x+1)-\alpha x<0$ ومعناه $\ln(\alpha x+1)<\alpha x$ إذا من أجل كل $x\in\left]0;+\infty\right[$، $\ln(\alpha x+1)<\alpha x$.

3. بيّن أن كل المنحنيات $(\mathcal{C}_\alpha)$ تتقاطع في نقطة يُطلب تحديد إحداثييها.

لدينا من أجل كل $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$، $f_\alpha(0)=0$ ومنه: من أجل كل $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$، $O\in(\mathcal{C}_\alpha)$.

الجزء الثاني:

1. باستعمال السؤال **2.** من الجزء الأول، بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم β يكون:

$\ln(1+\beta)-\ln\beta<\frac{1}{\beta}$.

ليكن $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ وليكن $x\in\mathbb{R}_+^*$ حيث $\alpha x=\frac{1}{\beta}$ ؛ لدينا $\ln(1+\beta)-\ln\beta=\ln\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)=\ln\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$ معناه $\ln(1+\beta)-\ln\beta=\ln(\alpha x+1)$ وباستعمال السؤال **2.** من الجزء الأول، يكون $\ln(1+\beta)-\ln\beta<\alpha x$ أي $\ln(1+\beta)-\ln\beta<\frac{1}{\beta}$.

2. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

$\ln2-\ln1<\frac{1}{1}$ ؛ $\ln3-\ln2<\frac{1}{2}$ ؛ $\ln4-\ln3<\frac{1}{3}$ ؛ ... ؛ $\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$ بجمع طرف إلى طرف نحصل على $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

つづく

3. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(1+n)=+\infty$

إذا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$.

4. أ عيّن إحداثيي النقطة ω التي يكون عندها معامل توجيه المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_1)$ يساوي 1.

معامل توجيه المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_1)$ يساوي 1 يكافئ $f'_1(x)=1$ وتكافئ $\frac{-x}{x+1}=1$ معناه $-x=x+1$ أي

$x=-\frac{1}{2}$

ومنه $f_1\left(-\frac{1}{2}\right)=\ln\left(-\frac{1}{2}+1\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\ln 2$ إذا $\omega\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\ln 2\right)$.

ب ـ اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى $(\mathscr{C}_1)$ عند النقطة ω؛ ثم أنشئ المماس والمنحنى $(\mathscr{C}_1)$.

$y=\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}-\ln 2$ أي $y=x+1-\ln 2$.

5. أ ـ احسب كلا من $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f_1(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)$؛ ثم شكل جدول تغيّرات الدالة f_1؛

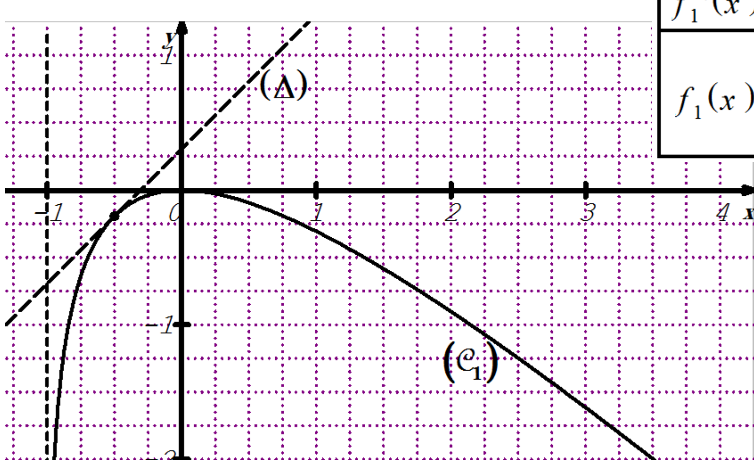
$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f_1(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left[\ln(x+1)-x\right]=-\infty$ ؛

$\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x+1)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{\ln(x+1)}{x+1}-\frac{x}{x+1}\right]=-\infty$ ، لأن

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x}{x+1}=-1$.

x	-1	0	$+\infty$
$f'_1(x)$	$+$	0	$-$
$f_1(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$

ب ـ أرسم (Δ) ثم المنحنى $(\mathscr{C}_1)$.



つづく

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

الجزء الثالث: لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\ln(1+|x|)-|x|$. $(\mathcal{C}_g)$ منحنها الممثل في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس قابلية اشتقاق الدالة g عند الصفر.

لدينا $g(0)=0$ ؛ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$، $g(x)=\ln(1+x)-x$ ومن أجل كل $x\in]-\infty;0[$، $g(x)=\ln(1-x)+x$.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln(1+x)-x}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln(1+x)}{x}-1=0$$ ؛

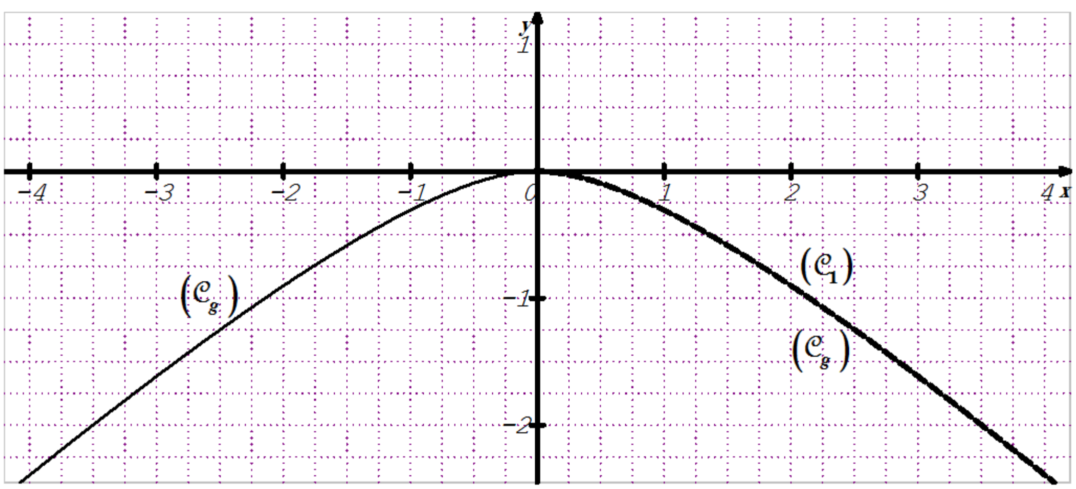
$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\ln(1-x)+x}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\ln(1-x)}{x}+1=0$$ ؛

لدينا إذا $\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$ ومنه الدالة g تقبل الاشتقاق عند الصفر.

2. بيّن كيف يمكن إنشاء $(\mathcal{C}_g)$ اعتمادا على $(\mathcal{C}_1)$؛ ثم أرسم $(\mathcal{C}_g)$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $-x\in\mathbb{R}$ و $g(-x)=\ln(1+|-x|)-|-x|=\ln(1+|x|)-|x|=g(x)$ إذا الدالة g زوجية وبما أن المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ متعامد فإن المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ يكون متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.

لدينا من أجل كل $x\in[0;+\infty[$، $g(x)=\ln(1+x)-x=f_1(x)$ إذا $(\mathcal{C}_g)$ ينطبق على $(\mathcal{C}_1)$ في المجال $[0;+\infty[$ أما في المجال $]-\infty;0]$، يرسم $(\mathcal{C}_g)$ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.



مسائل المستوى الخامس ★★★★★

التمرين 02

كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f_m(x)=\frac{x^2-1}{2}-m\ln x$.

1) حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2}-m\ln x-\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}\left(1-2m\frac{\ln x}{x^2}\right)-\frac{1}{2}=+\infty$.

لأن : $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}=+\infty\right)$ و $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0\right)$. ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=+\infty$.

2) حساب : $\lim\limits_{x\to0} f_m(x)$: (حسب قيم m) : لدينا : $\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{2}=-\frac{1}{2}\right)$ و $\left(\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty\right)$.

ومنه : أ – إذا كان : $m<0$: $\lim\limits_{x\to0} f_m(x)=-\infty$.

ب – إذا كان : $m=0$: $\lim\limits_{x\to0} f_m(x)=-\frac{1}{2}$.

ج – إذا كان : $m>0$: $\lim\limits_{x\to0} f_m(x)=+\infty$.

3) الدالة f_m قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي : $f_m'(x)=x-\frac{m}{x}=\frac{x^2-m}{x}$.

- عند استنتاج جدول التغيرات للدالة f_m نميز ثلاث حالات :

أ- حالة $m<0$: من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f_m'(x)>0$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_m'(x)$	$+$
$f_m(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

ب – حالة $m=0$: من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f_0(x)=\frac{x^2-1}{2}$ ، و $f_0'(x)=x$. ومنه :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_m'(x)$	$+$
$f_m(x)$	$-\frac{1}{2}$ $\nearrow$ $+\infty$

ج – حالة $m>0$: من أجل كل x من $]0;+\infty[$: إشارة $f_m'(x)$ من إشارة x^2-m : أي : $\begin{cases}x=\sqrt{m}\\x=-\sqrt{m}\end{cases}$

つづく

و عليه :

x	0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_m\left(\sqrt{m}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) إثبات وجود منحني وحيد (C_m) يشمل النقطة M_0 :

لدينا : النقطة $M_0(x_0;y_0)$ حيث : $x_0 \succ 0$ ، ومنه f_m معرفة عند x_0 ، ولدينا من جهة أخرى المنحني (C_m) يشمل النقطة $M_0(x_0;y_0)$ أي : $f_m(x_0)=y_0$. و عليه : $\frac{x_0^2-1}{2}-m\ln x_0=y_0$ أي : $(\ln x_0)m=\frac{x_0^2-1}{2}-y_0$

أي : $(\ln x_0)m=\frac{x_0^2-1-2y_0}{2}$ ، و عليه : $m=\frac{x_0^2-1-2y_0}{2\ln x_0}$. ومنه يوجد حل وحيد هو : $\frac{x_0^2-1-2y_0}{2\ln x_0}$.

إذن نستنتج أنه يوجد منحني وحيد (C_m) يشمل النقطة M_0 .

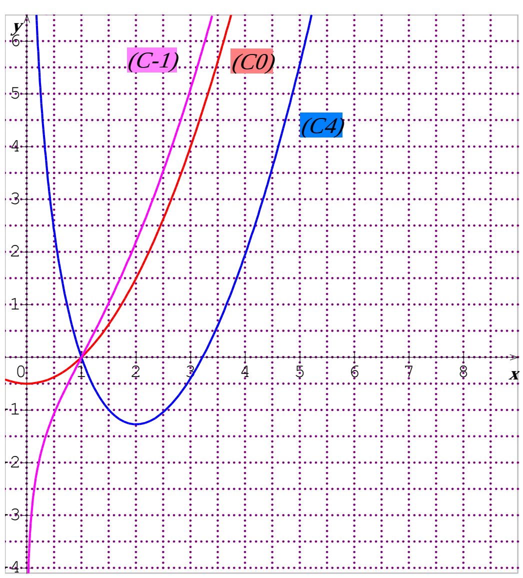
5) إثبات أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة A مع تعيين إحداثياها :

ط1) جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة معناه : $f_m(x_0)=y_0$ أي : $y_0=\frac{x_0^2-1}{2}-m\ln x_0$ أي :

$m\ln x_0+y_0-\frac{x_0^2-1}{2}=0$ معناه : $\begin{cases}\ln x_0=0\\ y_0-\frac{x_0^2-1}{2}=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x_0=1\\ y_0=0\end{cases}$ ومنه جميع المنحنيات (C_m) تشمل $A(1;0)$

أو كحالة خاصة : أي أن إحداثيات النقطة A لا تتعلق بـ m أي : (نعدم الذي هو مضروب في m في العبارة) ، (نعلم أن : $\ln(1)=0$) . أي : نضع $x=1$ و منه : $f_m(1)=0$ ، إذن : كل المنحنيات (C_m) تشمل النقطة $A(1;0)$.

6) رسم كلا من : (C_0) و (C_4) ، (C_{-1}) : باستعمال مبرمج: (sine qua non) :



مسائل المستوى الخامس ★★★★★

التمرين 03

مجلة Top Maths في الدوال الوسيطية والمدمجة (بوشناق يوسف)

لدينا من أجل $x \in]0;+\infty[$: $f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx$.

I) من أجل $k=0$ يكون : $f_0(x) = x(\ln x)^2$.

1) حساب نهايات الدالة f_0 :

*) نضع : $\begin{cases} \sqrt{x} = X \\ x = X^2 \end{cases}$ أي : $\begin{matrix} x \to 0 \\ X \to 0 \end{matrix}$ و منه :

$$\lim_{x\to 0} f_0(x) = \lim_{x\to 0}\left[x(\ln x)^2\right] = \lim_{X\to 0}\left[X^2(\ln X^2)^2\right] = \lim_{X\to 0}\left[(X\ln X^2)^2\right]$$

أي يكون : $\lim_{x\to 0} f_0(x) = \lim_{X\to 0}\left[\left(2\underbrace{X\ln X}_{0}\right)^2\right] = 0$ ، إذن : $\boxed{\lim_{x\to 0} f_0(x) = 0}$.

*) $\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x(\ln x)^2\right] = +\infty$ ، إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty}$.

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f_0 :

*) الدالة f_0 قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و عبارة دالتها المشتقة هي : $f_0'(x) = 1\times(\ln x)^2 + 2\ln x \times \frac{1}{x} \times x$

أي : $f_0'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x$ و منه : $f_0'(x) = \ln x(\ln x + 2)$.

نضع : $f_0'(x) = 0$ معناه : $\ln x = 0$ أو $\ln x + 2 = 0$ أي : $x = 1$ أو $x = e^{-2}$.

*) نلخص إتجاه تغير الدالة f_0 في جدول تغيراتها :

x	0		$e-2$		1		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_0(x)$	0	↗	$4e-2$	↘	0	↗	$+\infty$

لدينا : $\begin{cases} f_0(e^{-2}) = 4e^{-2} \\ f_0(1) = 0 \end{cases}$

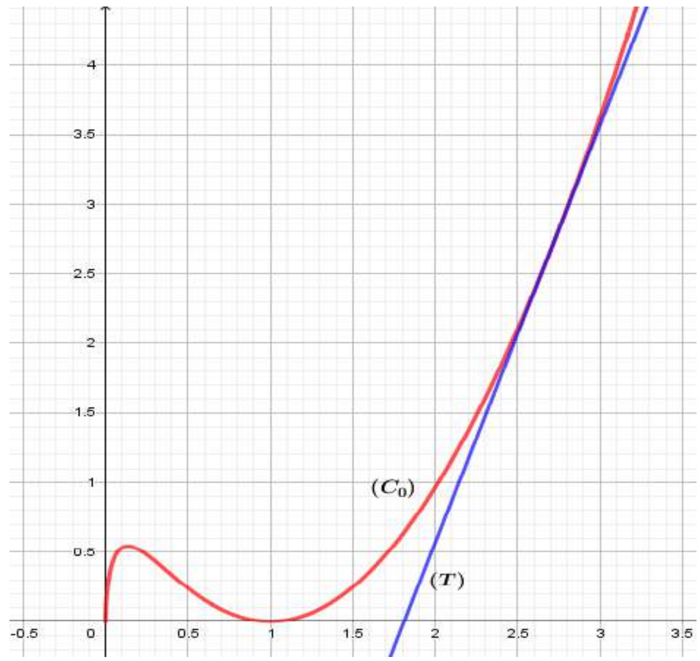
3) كتابة معادلة المماس (T) :

لدينا : $(T): y = f_0'(e)(x-e) + f_0(e)$ أي : $(T): y = 3(x-e)+e$ ، لأن : $\begin{cases} f_0'(e) = 3 \\ f_0(e) = e \end{cases}$.

و منه : $\boxed{(T): y = 3x - 2e}$.

つづく

4) الإنشاء :



II) نعتبر k عدد حقيقي كيفي أي : $f_k(x)=x(\ln x)^2+kx$.

1) حساب نهايات الدالة f_k :

*) $\lim_{x\to0} f_k(x)=\lim_{x\to0}\left[x(\ln x)^2+kx\right]=0$ ، لأن : $\lim_{x\to0} x(\ln x)^2=0$ و $\lim_{x\to0} kx=0$.

*) النهاية عند $+\infty$ نميز حالتين :

- لما $k>0$: $\lim_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x(\ln x)^2+kx\right]=+\infty$ ، لأن : $\lim_{x\to+\infty} x(\ln x)^2=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} kx=+\infty$.

- لما $k<0$: $\lim_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x(\ln x)^2+kx\right]=\lim_{x\to+\infty} x\left[(\ln x)^2+k\right]=+\infty$.

2) لنحسب $f_k'(x)$:

الدالة f_k' قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و عبارة دالتها المشتقة هي : $f_k'(x)=(\ln x)^2+2\ln x+k$.

*) نضع : $\ln x=t$ أي تصبح : t^2+2t+k لندرس إشارة هذا الأخير و ذلك حسب قيم k . لدينا : $\boxed{\Delta_k=4-4k}$

- **حالة** $\Delta_k=0$: $k=1$ و منه المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو $t_0=\frac{-2}{2}=-1$ أي : $\ln x=-1$ و منه : $\boxed{x=e^{-1}}$.

إذن : إشارة كثير الحدود من إشارة المعامل a و بالتالي تكون : $f_k'(x)\ge 0$.

أي جدول التغيرات في هذه الحالة يكون :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$+$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

ملاحظة : النقطة ذات الفاصلة e^{-1} هي نقطة الإنعطاف للمنحني (C_1) .

つづく

- **حالة** $\Delta_k>0$: يكون $k<1$ و منه المعادلة تقبل حلان هما : $t_1=\frac{-2-\sqrt{4-4k}}{2}=-1-\sqrt{1-k}$ و $t_2=-1+\sqrt{1-k}$

أي : $\ln x=-1-\sqrt{1-k}$ و $\ln x=-1+\sqrt{1-k}$ و منه : $\boxed{x_1=e^{-1-\sqrt{1-k}}}$ و $\boxed{x_2=e^{-1+\sqrt{1-k}}}$.

و بالتالي جدول التغيرات للدالة f_k في هذه الحالة يكون :

x	0		x_1		x_2		$+\infty$
$f'_k(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_k(x)$	0	$\nearrow$	$f_k(x_1)$	$\searrow$	$f_k(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

- **حالة** $\Delta_k<0$ **:** يكون $k>1$ و منه إشارة كثير الحدود من إشارة المعامل a و بالتالي تكون : $f'_k(x)>0$.

أي جدول التغيرات في هذه الحالة يكون :

x	0		$+\infty$
$f'_k(x)$		$+$	
$f_k(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) لدينا المماس (T_k) عند النقطة A_k ذات الفاصلة 1 أي :

$(T_k): y=f'_k(1)(x-1)+f_k(x)$ أي : $(T_k): y=k(x-1)+k$ ، لأن : $\begin{cases} f'_k(1)=k \\ f_k(1)=k \end{cases}$

و منه يكون : $\boxed{(T_k): y=kx}$ و بالتالي المماس (T_k) يمر بالمبدأ O أي أن (T_k) هو المستقيم (OA_k) .

4) دراسة وضعية المنحني (C_k) بالنسبة لـ $(C_{k'})$:

لندرس إشارة الفرق : $f_k(x)-f_{k'}(x)=kx-k'x$ و منه : $f_k(x)-f_{k'}(x)=(k-k')x$.

*) بما أن $x>0$ فإن إشارة الفرق من إشارة $(k-k')$ و بالتالي الوضع النسبي للمنحنيين (C_k) و $(C_{k'})$ متعلقة بإشارة $(k-k')$ أي بمقارنة العددين k و k' .

*) الوضع النسبي للمنحنيين (C_{-2}) و (C_{-3}) :

لدينا : $-3<-2$ إذن حسب الدراسة السابقة فإن : المنحني (C_{-3}) يقع تحت المنحني (C_{-2}) .

5) لدينا : $\begin{cases} g_k(x)=f_k(x)\ ;\ x>0 \\ g_k(0)=0 \end{cases}$

لنحسب : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g_k(x)-g_k(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\ln x)^2+kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(\ln x)^2+k\right]=+\infty$.

*) **تفسير النتيجة** : الدالة g_k لا تقبل الإشتقاق عند 0 و المنحني (C_{g_k}) يقبل نصف مماس موازي لحامل محور التراتيب عند المبدأ O .

التمرين 04

كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

لدينا : $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$.

1) **لدينا :** $h_n(x) = n\ln(1+x) + \dfrac{x}{x+1}$.

أ) **دراسة إتجاه تغيّر الدالة** h_n :

❖) **لنحسب** $h_n'(x)$ **:** $h_n'(x) = n \times \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(x+1)-x}{(x+1)^2}$ ، **و منه :** $h_n'(x) = \dfrac{n}{1+x} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

نلاحظ أنّه من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$ **و من أجل كل عدد طبيعي** n **تكون :** $h_n'(x) > 0$.

إذن الدالة h_n **متزايدة تماماً على** $]-1;+\infty[$.

ب) $h_n(0) = 0$ ، **إذن : نلخص إشارة** $h_n(x)$ **في الجدول التالي :**

x	-1		0		$+\infty$
$h_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2) أ) $f_1(x) = x.\ln(1+x)$ و $h_1(x) = \ln(1+x) + \dfrac{x}{x+1}$.

❖) **حساب** $f_1'(x)$ **:** $f_1'(x) = \ln(1+x) + \dfrac{1}{1+x} \times x = \ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$ ، **و منه :** $f_1'(x) = h_1'(x)$.

❖) **حساب** $f_n'(x)$ **:** $f_n'(x) = n.x^{n-1} \times \ln(1+x) + \dfrac{1}{1+x} \times x^n$ ، **نعلم أنّ :** $x^n = x \times x^{n-1}$ ، **أي تصبح :**

$f_n'(x) = x^{n-1}\left[n\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}\right]$ ، **و منه :** $f_n'(x) = x^{n-1} \times h_n(x)$. **و هو المطلوب**

ب) **في حالة** n **فردي يكون :** $(n-1)$ **زوجياً ، و منه يكون :** $x^{n-1} \geq 0$ ،

و بالتالي تكون إشارة $f_n'(x)$ **من إشارة** $h_n(x)$.

❖) **جدول التغيّرات في حالة** n **فردي :**

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f_n(x) = +\infty$ ، **لأنّ :** $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} (x^n) = -1 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \ln(1+x) = -\infty \end{cases}$.

❖) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ ، **لأنّ :** $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x^n) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty \end{cases}$.

つづく

ج) في حالة n زوجي يكون : $(n-1)$ فردياً ، أي إشارة x^{n-1} تكون كما يلي :

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}	‖	$-$	0	$+$	

و بالتالي :

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}	‖	$-$	0	$+$	
$h_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$	‖	$+$	0	$+$	

❖) جدول التغيّرات في حالة n زوجي :

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	‖ $-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f_n(x) = -\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} (x^n) = 1 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \ln(1+x) = -\infty \end{cases}$.

❖) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x^n) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty \end{cases}$.

3) أ) دراسة وضعية المنحنيين (C_1) وَ (C_2) :

أي ندرس إشارة الفرق : $f_1(x) - f_2(x)$ ، حيث : $f_1(x) = x\ln(1+x)$ وَ $f_2(x) = x^2 \ln(1+x)$.

❖) $f_1(x) - f_2(x) = x\ln(1+x) - x^2\ln(1+x)$ ، و منه : $f_1(x) - f_2(x) = x\ln(1+x)(1-x)$.

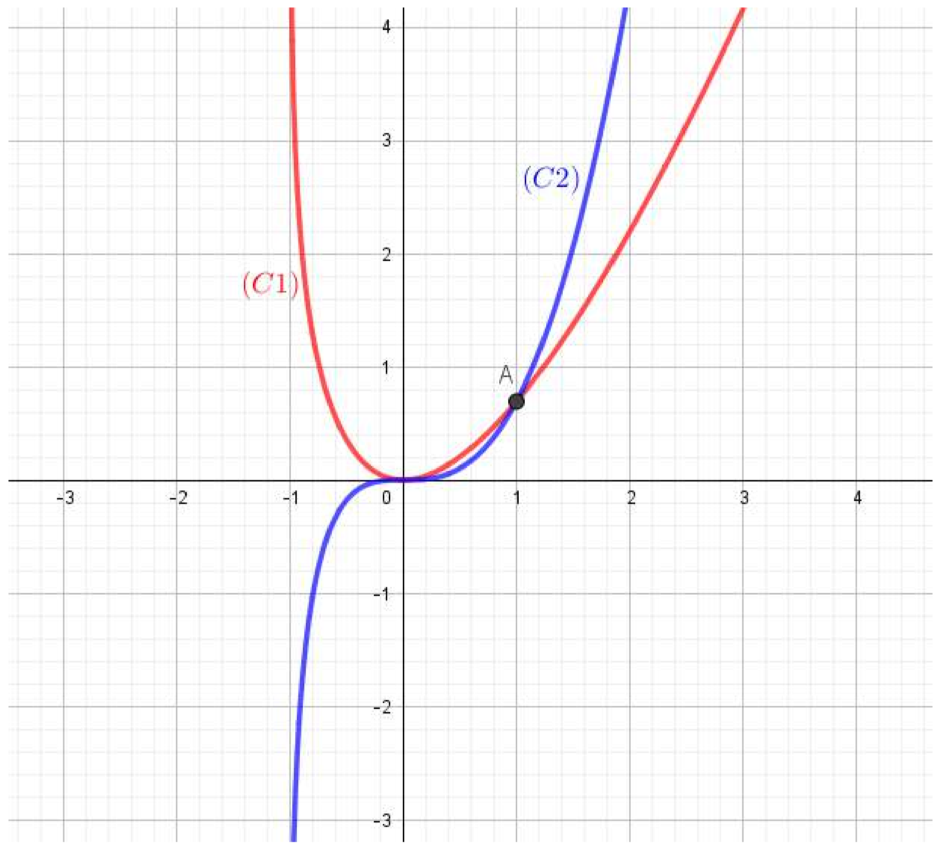
توضيح : (أخرجنا $(x\ln(1+x))$ كعامل مشترك) . إذن الوضعية تكون كما يلي :

x	-1		0		1		$+\infty$
x	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln(1+x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)-f_2(x)$	‖	$+$		$+$		$-$	
الوضعية	‖	(C_1) يقع فوق (C_2)	(C_1) يمس (C_1) في النقطة $O(0,0)$	(C_1) يقع فوق (C_2)	(C_1) يقطع (C_1) في النقطة $A(1;\ln 2)$	(C_1) يقع تحت (C_2)	

つづく

مسائل المستوى الخامس ★★★★★★

ب) الإنشـــــاء :



التمرين 05

تمارين مهمة للأساتذة لتعميق المفاهيم (قليل مصطفى)

الجزء الأول : $f(x)=1+x\ln x$

(1)(أ) من اجل x من $[1;2]$ فان $\ln x>0$ ومنه $1+x\ln x\succ 0$ اذن الدالة f موجبة على $[1;2]$

(ب) $M(1;1)$ و $N(2;1+2\ln 2)$ ومنه معامل توجيه (MN) هو $\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{-2\ln 2}{-1}=2\ln 2$

(ج) نشتق الدالة f نجد $f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$. يكون المماس موازيا للمستقيم (MN) معناه لهما نفس معامل التوجيه أي : $f'(x_0)=2\ln 2$ أي $\ln x+1=2\ln 2$ اذن $\ln x=-1+2\ln 2$ ومنه $x=e^{2\ln 2-1}=\frac{1}{e}\left(e^{\ln 2}\right)^2=\frac{4}{e}$

اذن النقطة E هي الوحيدة من (C) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (MN)

(د) معادلة (T) المماس عند النقطة E :

$$y=2\ln 2\left(x-\frac{4}{e}\right)+\left(1+\frac{4}{e}\ln\left(\frac{4}{e}\right)\right)=(2\ln 2)x-2\ln 2\times\frac{4}{e}+1+\frac{4}{e}\ln 4-\frac{4}{e}=(2\ln 2)x+1-\frac{4}{e}$$

اذن $y=(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1$

つづく

مسائل المستوى الخامس ★★★★★

(2) $g(x)=f(x)-\left[(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1\right]$

(أ) مشتقة الدالة g : $g'(x)=f'(x)-2\ln 2=1+\ln x-\ln 4=1+\ln\frac{x}{4}$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g على $[1;2]$:

$g'(x)\ge 0$ تعني $1+\ln\left(\frac{x}{4}\right)\ge 0$ أي $\ln\frac{x}{4}\ge -1$ ومنه $\frac{x}{4}\ge e^{-1}$ اذن $x\ge\frac{4}{e}$

اذن من اجل $x=\frac{4}{e}=1,47$ تنعدم الدالة g ومتزايدة من اجل $x\ge\frac{4}{e}$ ومتناقصة من اجل $x\le\frac{4}{e}$

$g(\frac{4}{e})=0$ ومنه جدول تغيرات g :

x	0	1	$4e^{-1}$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$\searrow$		0	$\nearrow$	

من جدول التغيرات على المجال $[1;2]$ والقيمة 0 هي قيمة حدية صغرى للدالة g عند $x=\frac{4}{e}$ اذن $g(x)\ge 0$

ومنه نستنتج ان وضعية (C) هي فوق (T) على هذا المجال

(3) M' و N' نقطتان من (T) فاصلتاهما 1 و 2 على الترتيب . (C) تحت المستقيم (MN) على $[1;2]$

(أ) حساب مساحة شبه المنحرف $MNQP$:

ترتيبا النقطتين M' و N' هما :

$y_{M'}=(2\ln 2)+1-\frac{4}{e}$ و $y_{N'}=(4\ln 2)+1-\frac{4}{e}$

اذن مساحة $MNQP$ هي $\frac{(PM+QN)}{2}\times PQ=\frac{(y_M+y_N)}{2}\times 1=1+\ln 2\approx 1,693$

ومساحة $M'N'QP$ هي : $\frac{(PM'+QN')}{2}\times PQ=\frac{(y_{M'}+y_{N'})}{2}\times 1=3\ln 2+1-\frac{4}{e}\approx 1,608$

(ب) استنتاج حصر للمساحة A : المساحة محصورة بين هذين العددين $A\approx 1,6$

الجزء الثاني :

(1) نستعمل مكاملة بالتجزئة لحساب $\int_1^2 x\ln x\,dx$

ونضع : $u'(x)=x$ و $v(x)=\ln x$ ومنه $u(x)=\frac{1}{2}x^2$ و $v'(x)=\frac{1}{x}$

اذن $\int_1^2 x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}\,dx=2\ln 2-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2=2\ln 2-\frac{3}{4}\approx 0,636$

(2) القيمة المضبوطة لـ A :

$$A=\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 1\,dx+\int_1^2 x\ln x\,dx=1+2\ln 2-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+2\ln 2\approx 1,636$$

つづく

مسائل المستوى الخامس ★★★★★