- الدّالة f دالّة كثير حدود وبالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ ومن ثَمّ على $[-3;-2]$.
- لدينا: $\begin{cases} f(-3)=-15 \\ f(-2)=0 \end{cases}$، كما نلاحظ أن العدد -2 محصور بين العددين $f(-3)$ وَ $f(-2)$.

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $x^3-4x=-2$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $[-3;-2]$.

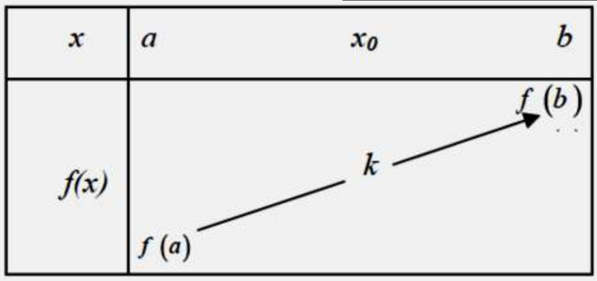
④ الدّوال المستمرّة والرتيبة تماما على مجال $[a;b]$:

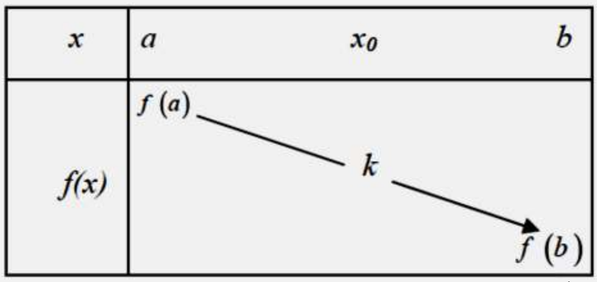
مبرهنة:

إذا كانت f دالّة **مستمرة ورتيبة تماما** على مجال $[a;b]$ فإنّه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ **تقبل حلا وحيدا** في المجال $[a;b]$.

ملاحظات:

- إذا كانت الدّالة f **مستمرة ورتيبة تماما** (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) على مجال $[a;b]$ فإنّ **جدول تغيراتها** يأخذ أحد الشكلين التاليين:





👍 من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ **تقبل حلا وحيدا** x_0 في المجال $[a;b]$.

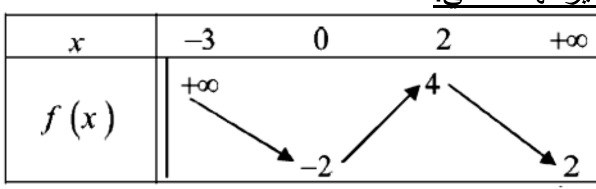
- **تقبل المبرهنة السابقة عدة تمديدات** في حالة دالّة f **مستمرة ورتيبة تماما على مجال** I **مفتوح** أو **مفتوح من إحدى الجهتين، محدود** أو **غير محدود**.

تذكير:

الأسهم المائلة في جدول تغيرات دالّة تترجم استمرارية ورتابة الدّالة **على المجال المعتبر**.

مثال:(● حل التمرين 01 ص58)

لتكن f دالّة **مستمرة** على المجال $]-3;+\infty[$، وجدول تغيّراتها كالآتي:



تبيان أنّ المنحنى (C_f) الممثل للدّالّة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يُطلب إعطاء حصرا لفاصلتيهما:

أي: نُبين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين مختلفين في المجال $]-3;+\infty[$.

⌫ f **مستمرة وَرتيبة تماما** على المجال $]-3;0]$ (لأنّها: من جدول التغيّرات **متناقصة تماما** على المجال $]-3;0]$)

ولدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{x \underset{>}{\to} -3} f(x)=+\infty \\ f(0)=-2 \end{cases}$، أي: $0\in[-2;+\infty[$

إذن: **حسب مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** x_0 في المجال $]-3;0]$؛

أي: (C_f) **يقطع حامل محور الفواصل** في نقطة وحيدة **فاصلتها** x_0، حيث $-3<x_0<0$.

⌫ f **مستمرة وَرتيبة تماما** على المجال $[0;2]$ (لأنّها: من جدول التغيّرات **متزايدة تماما** على المجال $[0;2]$)

ولدينا: $\begin{cases} f(0)=-2 \\ f(2)=+4 \end{cases}$، أي: $f(0)\times f(2)<0$

إذن: **حسب مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** x_1 في المجال $[0;2]$؛

أي: (C_f) **يقطع حامل محور الفواصل** في نقطة وحيدة **فاصلتها** x_1، حيث $0<x_1<2$.

⌫ لدينا: $\begin{cases} f(2)=4 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \end{cases}$، أي: $0\notin]2;4]$

إذن: المعادلة $f(x)=0$ **لا تقبل حلول** في المجال $]2;+\infty[$؛

أي: (C_f) **لا يقطع حامل محور الفواصل** في المجال $]2;+\infty[$.

الخلاصة:

المنحنى (C_f) الممثل للدّالّة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين فاصلتيهما $-3<x_0<0$ وَ $0<x_1<2$.

تمارين: 56؛ 57؛ 58؛ 60؛ 61؛ 64 ص30-31.

❹ المشتقات والعمليات -مشتقة الدّالة مركب:

① مشتقات دوّال مألوفة:

$f(x)=$	$f'(x)=$	مجالات قابلية الاشتقاق
$(k\in\mathbb{R})\ k$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$(n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N})\ x^n$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ وَ $]0;+\infty[$
$(n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N})\ \frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ وَ $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

② المشتقات والعمليات على الدّوال:

النتائج ملخصة في الجدول التالي:

u و v دّالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

العملية	الدّالة المشتقة	الشروط	
مجموع دّالتين	$u+v$	$u'+v'$	
جداء دّالة بعدد حقيقي	ku	ku'	
جداء دّالتين	$u.v$	$u'.v+v'u$	
مقلوب دّالة	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	الدّالة u لا تنعدم على I
حاصل قسمة دّالتين	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$	الدّالة v لا تنعدم على I

نتائج:

- الدّوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- الدّوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها.

مثال: (● حل التمرين 13 ص59)

③ الاشتقاقية والاستمرارية:

خاصية:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I، فإنّها مستمرة على هذا المجال وعكس هذه الخاصية ليس صحيح.

مثال: (● حل التمرين 02 ص58)

الدّالة $x \mapsto |x|$ مستمرة عند 0؛

بينما النسبة $\frac{|h|}{h}$ لا تقبل نهاية عند 0 لأنّ:

$\lim\limits_{\substack{h \to 0\\ <}} \frac{|h|}{h} = -1$ و $\lim\limits_{\substack{h \to 0\\ >}} \frac{|h|}{h} = -1$

ومنه: الدّالة $x \mapsto |x|$ غير قابلة للاشتقاق عند 0.

④ اشتقاق دّالة مركبة:

أ. مشتقة الدّالة $v \circ u$:

مبرهنة (تقبل دون برهان):

إذا قبلت الدّالة u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ وقبلت الدّالة v الاشتقاق على $u(I)$، فإنّ الدّالة $v \circ u$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I:

$\boxed{(v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x)}$.

مثال:

● لتكن f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (2x^2+x)^4$

نلاحظ أنّ $f = v \circ u$، حيث $u: x \mapsto 2x^2+x$

وَ $v: x \mapsto x^4$

وَمنه:

$$\begin{aligned} f'(x) &= v'[u(x)] \times u'(x) \\ &= v'(2x^2+x) \times u'(x) \\ &= 4(2x^2+x)^3 \times (4x+1) \end{aligned}$$

ب. تطبيقات:

مشتقة الدّالة $x \mapsto u(ax+b)$ ($a \neq 0$):

مبرهنة:

a و b عددان حقيقيان مع $a \neq 0$.

u دّالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

ليكن J المجال المكون من الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b$ ينتمي إلى I.

الدّالة $f: x \mapsto u(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على J ولدينا:

$\boxed{f'(x) = au'(ax+b)}$.

مثال:

● لتكن f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \cos(2x-3)$.

حساب الدّالة المشتقة:

f دّالة معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$f'(x) = -2\sin(2x-3)$

مشتقة الدّالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$:

مبرهنة:

إذا كانت الدّالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$، وكانت موجبة تماما على I، فإنّ الدّالة $\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا: $\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$.

مثال: (● حل التمرين 37 ص61)

● f دّالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \sqrt{x^2+3}$.

حساب الدّالة المشتقة:

f دّالة معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

مشتقة الدّالة $x \mapsto [u(x)]^n$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 2$):

مبرهنة:

إذا كانت الدّالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$، فإنّ الدّالة u^n تقبل الاشتقاق على I ولدينا:

$\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$.

مثال: (● حل التمرين 34 ص61)

● f دّالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x^2+2x-3)^3$.

حساب الدّالة المشتقة:

f دّالة معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$f'(x) = 3(2x+2)(x^2+2x-3)^2$

مشتقة الدّالة $x \mapsto \frac{1}{[u(x)]^n}$ (n عدد طبيعي يحقق $n \ge 1$)

مبرهنة:

إذا كانت الدّالة u **قابلة للاشتقاق** على مجال I من $\mathbb{R}$ و**لا تنعدم** على I، فإنّ الدّالة $\frac{1}{u^n}$ **تقبل الاشتقاق** على I ولدينا:

$$\boxed{\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}}.$$

مثال:

● لتكن f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{1}{(x^2+3)^8}$.

حساب الدّالة المشتقة:

f دالّة معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$$f'(x) = -\frac{8(2x)}{(x^2+3)^9}$$

تمارين: 40؛ 78 ص 61-66.

5 اتجاه تغيّر دالّة- القيم الحدية:

① المشتقة واتجاه التغير:

مبرهنة: (تقبل دون برهان)

f دالّة **قابلة للاشتقاق** على مجال I من $\mathbb{R}$.

❍ إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x) > 0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدّالة f من أجلها، فإنّ الدّالة f **متزايدة تماما** على I.

❍ إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x) < 0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدّالة f من أجلها، فإنّ الدّالة f **متناقصة تماما** على I.

❍ إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x) = 0$، فإنّ الدّالة f **ثابتة** على I.

مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3$

f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $f'(x) = 3x^2$

و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}^+$: $f'(x) > 0$ و $f'(0) = 0$

إذن : f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

② القيم الحدية المحلية:

تعاريف:

f دالّة معرّفة على مجال I من $\mathbb{R}$ وَ x_0 عدد حقيقي من I.

❍ القول أنّ $f(x_0)$ **قيمة حدية محلية عظمى** للدّالّة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $\boxed{f(x) \le f(x_0)}$.

❍ القول أنّ $f(x_0)$ **قيمة حدية محلية صغرى** للدّالّة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $\boxed{f(x) \ge f(x_0)}$.

❍ القول أنّ $f(x_0)$ **قيمة حدية محلية** لِـf يعني أنّ $f(x_0)$ **قيمة حدية محلية عظمى** أو **صغرى**.

مبرهنة: (تقبل دون برهان)

f دالّة معرّفة و**قابلة للاشتقاق** على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.

❍ إذا **انعدمت الدّالّة المشتقة** f' عند x_0 **مُغيرة إشارتها** فإنّ $f(x_0)$ **قيمة حدية محلية** للدّالّة f.

ملاحظات:

☑ النقطة $A(x_0; f(x_0))$ تسمى **نقطة حدية (الذروة)** و**المماس** عند هذه النقطة **يكون مُوازٍ لحامل محور الفواصل** معادلته هي: $y = f(x_0)$.

☑ إذا قبلت f **قيمة حدية محلية** عند x_0 فإنّ $f'(x) = 0$.

مثال: (● حل التمرين 28 ص60)

f الدّالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 1$.

دراسة التغيرات:

النهايات: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$ ،

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$.

الدالة المشتقة: f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$f'(x) = 6x^2 + 24x$.

x	$+\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	○	-	○	+	

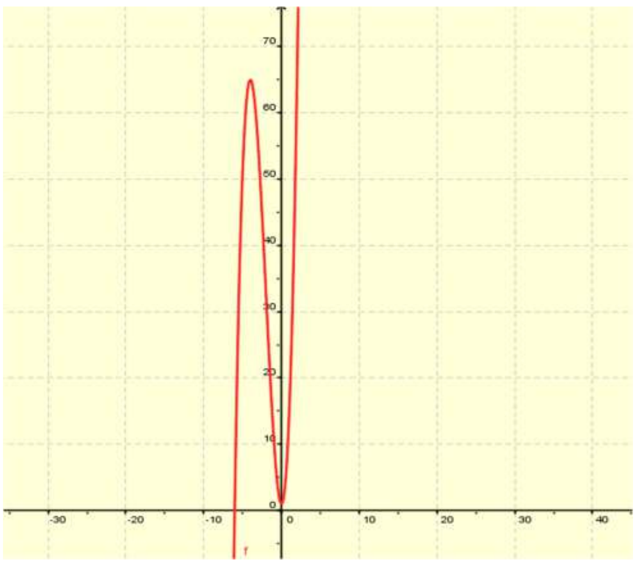
إذن: f **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty; 4]$ وَ$[0; +\infty[$، و**متناقصة تماما** على المجال $[-4; 0]$.

جدول التغيرات:

x	$+\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	○	-	○	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	65	↘	1	↗	$+\infty$

$f(-4) = 65$ **قيمة حدية محلية عظمى** للدّالّة f،

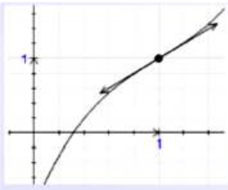
وَ $f(0) = 1$ **قيمة حدية محلية صغرى** للدّالّة f.



③ **نقطة انعطاف منحنى:**

تعريف:

نقطة الإنعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحنى البياني .



مبرهنة:

f دّالة معرّفة و**قابلة للاشتقاق** مرتين على مجال مفتوح يشمل x_0.

❍ إذا **انعدمت الدّالة المشتقة الثانية** f'' عند x_0 **مُغيرة إشارتها** فإنّ النقطة التي إحداثييها $(x_0; f(x_0))$ تسمى **نقطة انعطاف** لمنحنى الدّالة f.

ملاحظة :

إذا انعدمت f' عند x_0 و لا تغير من إشارتها بجوار x_0 فإن النقطة التي إحداثياتها $(x_0; f(x_0))$ تسمى : نقطة إنعطاف لمنحنى الدالة f .

مثلا : الدالة $x \mapsto x^3$ مشتقتها الأولى تنعدم و لا تغير إشارتها بجوار $x_0 = 0$.

تمارين: 67؛ 70 ص64-65.

❻ التقريب التآلفي –طريقة أولر:

① **التقريب التآلفي:**

خاصية:

f دّالة معرّفة على مجال مفتوح I.

إذا قبلت f **الاشتقاق** عند x من I، فإنّه توجد دّالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث $x+h$ ينتمي إلى I لدينا:

$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$ مع $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.

من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ:

$$\boxed{f(x+h) \simeq f(x) + hf'(x)}$$

يسمى $f(x) + hf'(x)$ **التقريب التآلفي** لـِ $f(x+h)$ من أجل h قريب من 0، المُرفق بالدّالة f.

② **طريقة أولر:**

الهدف:

إنشاء **تمثيلات بيانية تقريبية** لدّالة f.

المعطيات:

f' معرّفة وَ $y_0 = f(x_0)$. من أجل h قريب من 0 لدينا:

$f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)$.

⌫ انطلاقا من $A_0(x_0; y_0)$ بحيث $f'(x_0) \neq 0$ نُنشئ $A_1(x_1; y_1)$ ذات الفاصلة $x_1 = x_0 + h$ والتي تنتمي إلى المستقيم الذي معامل توجيهه $f'(x_0)$ والمار من A_0

وبالتالي: $y_1 = f(x_0) + hf'(x_0)$.

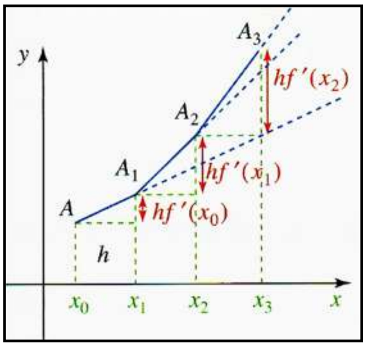
وبما أنّ: $f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)$

من أجل hf قريب من 0 فإن A_1 قريبة من (C_f).

⌫ بنفس الطريقة نُنشئ $A_2(x_1+h; f(x_1)+hf'(x_1))$، انطلاقا من A_1.

⌫ و هكذا على التوالي يمكن إنشاء النقط $A_n(x_n; y_n)$ حيث $x_n = x_{n-1} + h$ وَ $y_n = f(x_{n-1}) + hf'(x_{n-1})$ مع $n \geq 1$.

بربط النقط A_0، A_1، A_2، ... نحصل على تمثيل بياني تقريبي لـِ f مرتبط باختيار h الذي يسمى **الخطوة**. ونحصل **على أكثر دقة** كلما كان h أقرب إلى 0.



مثال 01: (● حل التمرين 41 ص61)

تبرير التقريب التآلفي عند 0:

1) لدينا: $f(x) = (1+x)^3$

التقريب التآلفي $f(0+h) \simeq f(0) + hf'(0)$

ومنه: $(1+h)^3 \simeq (1+0)^3 + h(3(1+0)^2)$

إذن: $(1+h)^3 \simeq 1 + 3h$.

2) لدينا: $f(x) = \sqrt{1+x}$

التقريب التآلفي $f(0+h) \simeq f(0) + hf'(0)$

ومنه: $\sqrt{1+h} \simeq \sqrt{1+0} + h\left(\frac{1}{2\sqrt{1+0}}\right)$

إذن: $\sqrt{1+h} \simeq 1 + \frac{h}{2}$.

3) لدينا: $f(x) = \frac{1}{1+x}$

التقريب التآلفي $f(0+h) \simeq f(0) + hf'(0)$

ومنه: $\frac{1}{1+h} \simeq \frac{1}{1+0} + h\left(-\frac{1}{(1+h)^2}\right)$

إذن: $\frac{1}{1+h} \simeq 1 - h$.

4) لدينا: $f(x) = \sin x$

التقريب التآلفي $f(0+h) \simeq f(0) + hf'(0)$

ومنه: $\sin x \simeq \sin 0 + h(\cos 0)$

إذن: $\sin x \simeq h$.

مثال 02: (● تمرين مقترح من طرف الأستاذ)

لتكن f دّالة تحقق $f(1) = 0$ ومن أجل كل x من $]0; +\infty[$، $f'(x) = \frac{1}{x}$.

- باستعمال طريقة أولر وباختيار خطوة $h = 0{,}01$ شكّل جدولا يتضمن القيم التقريبية لـِ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[0; 5]$، ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدّالة f.

يتبع...