العبقري في الرياضيات

الدوال اللوغاريتمية

الثالثة ثانوي

الشعب: ● تسيير وإقتصاد.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال الأسية واللوغاريتمية)

الملخص // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

ملخص: حول الدّوال الأسية واللوغاريتمية// التحضير الجيد بكالوريا// الشعبة: تسيير وإ.

1 الدّالة الأسية

❶ مبرهنة وتعريف

توجد دّالة **وحيدة** f **قابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$ بحيث:

$f(0)=1$ ② $f'=f$ ①

نرمز إليها بالرمز **''exp''**، ونسميها **الدّالة الأسية النيبيرية.**

نتائج من التعريف:

- $\boxed{\exp(0)=1}$.
- من أجل **كل عدد حقيقي** x، $\boxed{\exp'(x)=\exp(x)}$.

❷ خواص جبرية

x و y عددان **حقيقيان** وَ n عدد **صحيح**.

① $\exp(x)>0$

② $\exp(x)\times\exp(-x)=1$

$\left(\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}\right)$

③ $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$

④ $\exp(x-y)=\frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

⑤ $(n\in\mathbb{Z})\ \exp(nx)=[\exp(x)]^n$

العدد e والترميز e^x:

- العدد e هو **صورة 1** بالدّالة **الأسية** أي:

$\boxed{\exp(1)=e\simeq 2{,}72}$

- حسب **الخاصية** ⑤ ومن أجل $x=1$ نجد:

$(n\in\mathbb{Z})\ \exp(n)=[\exp(1)]^n=e^n$

اصطلاحاً: $\boxed{\exp(x)=e^x}$

(من أجل كل $x\in\mathbb{R}$)

قواعد الحساب: (خواص الدّالة " exp ")

x و y عددان **حقيقيان** وَ n عدد **صحيح**.

① $\boxed{e^0=1}$ ② $\boxed{(e^x)'=e^x>0}$

③ $\boxed{e^x\times e^{-x}=1}$ $\left(\boxed{e^{-x}=\frac{1}{e^x}>0}\right)$

④ $\boxed{e^{x+y}=e^x\times e^y}$ ⑤ $\boxed{e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}}$

⑥ $\boxed{e^{nx}=(e^x)^n}$ $(n\in\mathbb{Z})$

❸ دراسة الدّالة " exp "

لدينا: $\exp(x)=e^x$ وَ $D_{\exp}=]-\infty;+\infty[$.

النهايات

❶ $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ ❷ $\lim_{x\to-\infty}e^x=0^+$

إتجاه التغير

من أجل **كل عدد حقيقي** x، $\boxed{(e^x)'=e^x>0}$

إذن: الدّالة **''exp'' متزايدة تماماً** على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(e^x)'$		+		
e^x	0^+	1	e	$+\infty$

نعلم أنّ $e^x > \mathbf{0}$ **من جدول التغيرات:**

- $0 < e^x < 1$ **يعني:** $x < 0$
- $e^x = 1$ **يعني:** $x = 0$
- $1 < e^x < e$ **يعني:** $0 < x < 1$
- $e^x > e$ **يعني:** $x > 1$

يُمكن أن يكون x **عبارة جبرية**.

بمأنّ الدّالة **"exp" متزايدة تماماً** على $\mathbb{R}$، فإنّ:

- $e^a > e^b$ **يعني:** $a > b$
- $e^a < e^b$ **يعني:** $a < b$
- $e^a = e^b$ **يعني:** $a = b$

a وَb **عددان حقيقيان** أو **عبارتان جبريتان**.

ملاحظة مهمة: تُستعمل **لحل معادلات** و**متراجحات** أو**لدراسة إشارة عبارة جبرية تتضمن e**.

نتائج:

- بمأنّ $\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+}$ فإنّ $(C_{\exp})$ يقبل **محور الفواصل كمُقارب** عند $-\infty$.
- لدينا: $\exp(0) = e^0 = 1$ وَ $\exp'(0) = 1$

إذن: $(C_{\exp})$ يقبل **عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماساً**، $(\Delta): y = \exp'(0)\,(x - 0) + \exp(0)$

أي: $\boxed{(\Delta): y = x + 1}$.

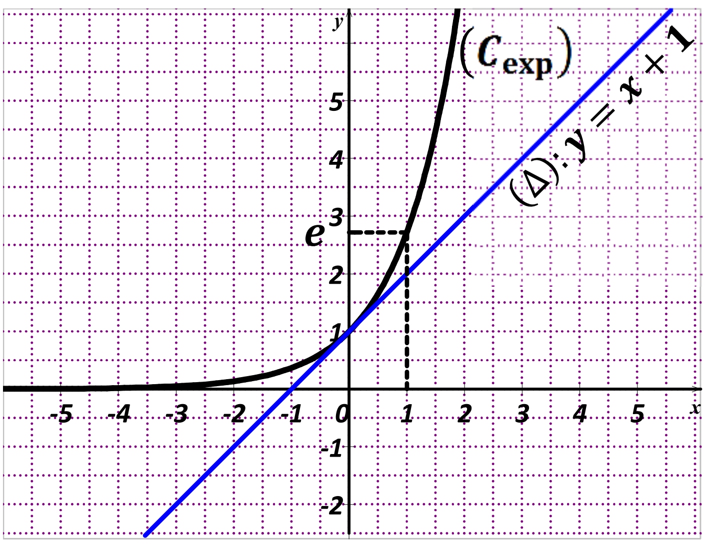
- باستعمال **تعريف العدد المشتق** للدّالة $''\exp''$ عند **0**:

لدينا: $\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \exp'(0)$، إذن: ❸ $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$.

- الدّالة $x \mapsto x + 1$ هي **أحسن تقريب تآلفي** للدّالة $x \mapsto e^x$ بجوار 0

أي: $\boxed{e^x \simeq x + 1}$ من أجل x قريب من 0.

التمثيل البياني



❹ دراسة الدّالة " $\exp \circ u$ "

لدينا: $(exp \circ u)(x) = e^{u(x)}$

النهايات

لدراسة نهاية دّالة ''$\exp \circ u$'' نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دّالة مركبة.

إتجاه التغيّر

للدّالتين "u" وَ ''$\exp \circ u$'' نفس اتجاه التغيّر على I، حيث: u معرّفة على I.
لأنّ الدّالة "**exp**" متزايدة تماماً.

المشتقة

$$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}}$$

إشارة $\left(e^{u(x)}\right)'$ من إشارة $u'(x)$ لأنّ: $e^{u(x)} > 0$.

❺ التزايد المقارن

☝التزايد المقارن للدّالتين $x \mapsto e^x$ وَ $x \mapsto x$:

❹ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ❺ $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$

☝التزايد المقارن للدّالتين $x \mapsto e^x$ وَ $x \mapsto x^n$:

❹ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ ❺ $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0^-$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

تُستعمل هذه النهايات لرفع حالات عدم التعيين.

❻ معادلات من الشكل " $ae^{2x} + be^x + c = 0$ " حيث $(a \neq 0)$

نضع: $X = e^x$

نقوم بعد ذلك **بحل المعادلة** $aX^2 + bX + c = 0$ ثمّ **نستنتج قيم x في حالة وجودها** (لأنّ $e^x > 0$).

- **نأخذ قيم $X > 0$ لإيجاد x وذلك بالعودة إلى الوضع.**

❼ المعادلات التفاضلية من الشكل " $y' = ay + b$ " بحيث $(a \neq 0)$

- **المعادلة التفاضلية $y' = ay$**، الحلول هي الدّوال $x \mapsto ce^{ax}$ حيث $c \in \mathbb{R}$.
- **المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$**، الحلول هي الدّوال $x \mapsto ce^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث $c \in \mathbb{R}$.
- إذا أُعطي شرط مثلاً $f(x_0) = y_0$، نُعوض في الحلول، نقوم بإيجاد c، ويُصبح الحل **وحيد** للمعادلة التفاضلية.

❽ إشارة بعض العبارات زردت في البكالوريا

- إشارة $e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+

☝لدراسة إشارة العبارة $ae^{2x} + be^x + c$ $(abc \neq 0)$

نحلّله باستعمال المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

☜ $\Delta > 0$ $ae^{2x} + be^x + c = a(e^x - X')(e^x - X'')$

☜ $\Delta = 0$ $ae^{2x} + be^x + c = a(e^x - X')^2$

☜ $\Delta < 0$ $ae^{2x} + be^x + c$

يُمكن تلخص إشارته في جدول باستعمال القواعد المعروفة لإشارة كثير حدود من الدرجة الثانية.

إشارة $ae^{\alpha x+\beta}+b$

إذا كان: a و b **موجبين** فإنّ: $ae^{\alpha x+\beta}+b>0$.

إذا كان: a و b **سالبين** فإنّ: $ae^{\alpha x+\beta}+b<0$.

إذا كان: a و b **مختلفين في الإشارة**، فإنّ: $ae^{\alpha x+\beta}+b$ **متغيرة الإشارة** ولمعرفة إشارته

- نحل المعادلة و المتراجحات $ae^{\alpha x+\beta}+b>0$، $ae^{\alpha x+\beta}+b<0$، $ae^{\alpha x+\beta}+b=0$

2 الدّالة اللوغاريتمية

❶ اللوغاريتم النيبيري لعدد

مبرهنة وتعريف:

يوجد **عدد حقيقي وحيد b** بحيث $e^b=a>0$،
يسمى هذا العدد **اللوغاريتم النيبيري** للعدد a،
ونرمز إليه بالرمز " $\ln a$ " أي $\boxed{b=\ln a}$.

مثلاً: $e^b=2$ معناه: $b=\ln 2$.

❶ تعريف الدّالة " $\ln$ "

نسمي "**الدّالة اللوغاريتمية النيبيرية**" الدّالة التي نرمز إليها بالرمز "**ln**"، والتي **تُرفق** بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

نتائج من التعريف:

- من أجل $x\in\mathbb{R}$ وَ $y\in]0;+\infty[$، $\boxed{e^x=y \text{ **يعني:** } x=\ln y}$
- من أجل $x\in]0;+\infty[$، $\boxed{e^{\ln x}=x}$.
- من أجل $x\in\mathbb{R}$، $\boxed{\ln(e^x)=x}$.
- بما أنّ: $e^0=1$ فإنّ: $\ln 1=0$، وَبما أنّ: $e^1=e$ فإنّ: $\ln e=1$.

حسب النتيجة 1) الدّالة **اللوغاريتمية النيبيرية "ln"** هي **الدّالة العكسية** للدّالة **الأسية النيبيرية "exp"**.

في معلم متعامد ومتجانس، $(C_{\exp})$ وَ $(C_{\ln})$ **متناظران بالنسبة إلى** المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (المنصف الأوّل).

❷ خواص جبرية

الخاصية الأساسية:

x و y عددان **حقيقيان** من $]0;+\infty[$،

① $\boxed{\ln(xy)=\ln x+\ln y}$

نتائج:

x و y عددان **حقيقيان** من $]0;+\infty[$، وَ n عدد **صحيح**.

② $\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x}$

③ $\boxed{\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y}$

④ $\boxed{\ln(x^n)=n\ln x}$ $(n\in\mathbb{Z})$

⑤ $\boxed{\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x}$

- يكون للعدد $\ln x$ **معنى** إذا وفقط إذا كان: $x > 0$ (ما بعد ln **موجب تماماً**)
- يكون للعدد $\ln[u(x)]$ **معنى** إذا وفقط إذا كان: $u(x) > 0$. (ما بعد ln **موجب تماماً**)
- يكون للعدد $\ln|u(x)|$ **معنى** إذا وفقط إذا كان: $u(x) \neq 0$.
- يكون للعدد $\ln[u(x)]^n$ **معنى** إذا وفقط إذا كان: $u(x) \neq 0$، في حالة $n = 2k$ **زوجي**.
$u(x) > 0$، في حالة $n = 2k + 1$ **فردي**.

❸ دراسة الدّالة " ln "

لدينا: $\ln: x \mapsto \ln(x)$ وَ $D_{\ln} =]0; +\infty[$.

النهايات

❶ $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ ❷ $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$

إتجاه التغيّر

من أجل **كل** x من $]0; +\infty[$، $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0}$

إذن: الدّالة **"ln" متزايدة تماماً** على $]0; +\infty[$.

جدول التغيّرات

x	0	1	e	$+\infty$
$(\ln x)'$	‖	+		
$\ln x$	‖ $-\infty$ ↗	0	1	$+\infty$

نعلم أنّ $\ln x$ **متغيرة الإشارة** (لأنّ $\ln x \in \mathbb{R}$)
ومن جدول التغيرات:

- $\ln x < 0$ **يعني:** $0 < x < 1$
- $\ln x = 0$ **يعني:** $x = 1$
- $0 < \ln x < 1$ **يعني:** $1 < x < e$
- $\ln x = 1$ **يعني:** $x = e$
- $\ln x > 1$ **يعني:** $x > e$

- **إشارة $\ln x$**

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	-	0	+	

يُمكن أن يكون x **عبارة جبرية** (استعمل كلمة ما بعد ln)
بمأنّ الدّالة **"ln" متزايدة تماماً** على $]0; +\infty[$، فإنّ

- $\ln a > \ln b$ **يعني:** $a > b$
- $\ln a < \ln b$ **يعني:** $a < b$
- $\ln a = \ln b$ **يعني:** $a = b$

a وَ b **عددان حقيقيان موجبان تماماً** أَو **عبارتان جبريتان موجبتان تماماً**.

ملاحظة مهمة: تُستعمل **لحل معادلات** وَ**متراجحات** أَو**لدراسة إشارة عبارة جبرية تتضمن ln**.

نتائج:

- بما أنّ $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} lnx = -\infty}$ فإنّ (C_{ln}) يقبل **محور التراتيب كمُقارب له.**
- لدينا: $\ln(1) = 0$ وَ $(\ln \mathbf{1})' = \frac{1}{\mathbf{1}} = 1$

إذن: $(C_{\ln})$ يقبل **عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماساً،** $(\Delta'): y = (\ln \mathbf{1})'(x-1) + \ln 1$

أي: $\boxed{(\Delta'): y = x - 1}$.

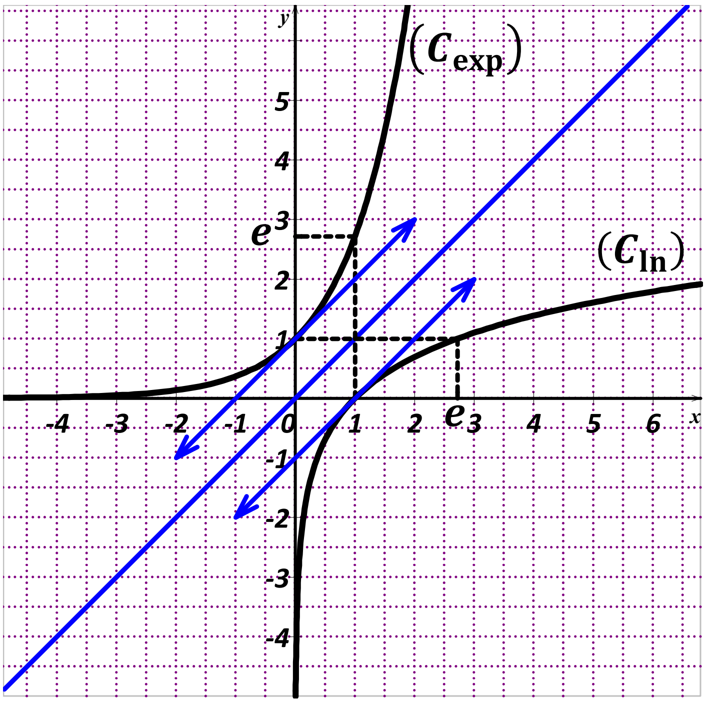
- باستعمال **تعريف العدد المشتق** للدّالة $''\ln''$ عند **1**

$(\ln 1)' = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h}$، إذن: ❸ $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1}$.

- الدّالة $x \mapsto x - 1$ هي **أحسن تقريب تآلفي** للدّالة $x \mapsto \ln x$ بجوار **1**

أي: $\boxed{\ln x \simeq x - 1}$ من أجل x قريب من **1**.

❀ التمثيل البياني



❹ دراسة الدّالة " $\ln \circ u$ "

لدينا: $(\ln \circ u)(x) = \ln[u(x)]$

❀ النهايات

لدراسة نهاية دّالة $''\ln \circ u''$ نستعمل **المبرهنة الخاصة بنهاية دّالة مركبة.**

❀ إتجاه التغيّر

للدّالتين $''u''$ وَ $''\ln \circ u''$ **نفس اتجاه التغيّر** على I، حيث: u معرّفة و**موجبة تماماً** على I. لأنّ الدّالة **"ln" متزايدة تماماً**.

❀ المشتقة

$$\boxed{(\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

ملاحـــظة:

$$\boxed{(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

❺ التزايد المقارن

التزايد المقارن للدّالتين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x$:

❹ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ ❺ $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0^-$

التزايد المقارن للدّالتين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x^n$:

❹ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$ ❺ $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^n \ln x = 0^-$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

تُستعمل هذه النهايات لرفع حالات عدم التعيين.

❻ معادلات من الشكل " $a[\ln x]^2 + b\ln x + c = 0$ " حيث $(a \neq 0)$

نضع: $X = \ln x$

نقوم بعد ذلك **بحل المعادلة** $aX^2 + bX + c = 0$ ثمّ **نستنتج قيم x في حالة وجودها** (لأنّ $x > 0$).

- نأخذ قيم X لإيجاد x وذلك بالعودة إلى الوضع.

❼ إشارة بعض العبارات زردت في البكالوريا

لدراسة إشارة العبارة $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c$ $(abc \neq 0)$

نحلّله باستعمال المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$، $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c = a(\ln x - X')(\ln x - X'')$
- $\Delta = 0$، $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c = a(\ln x - X')^2$
- $\Delta < 0$، $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c$

يُمكن تلخص إشارته في جدول باستعمال القواعد المعروفة لإشارة كثير حدود من الدرجة الثانية.

إشارة $a\ln(\alpha x + \beta) + b$

- نحل المعادلة والمتراجحات $a\ln(\alpha x + \beta) + b > 0$،
$a\ln(\alpha x + \beta) + b < 0$،
$a\ln(\alpha x + \beta) + b = 0$

ملاحظة مهمة جداً: لحل معادلات (أو متراجحات) تتضمن $\ln$ نُعين أولا مجموعة التعريف D.

الــدّالة

❶ الأسية

❷ اللوغاريتمية

❷ النهايات ☹

الأسية:

❶ $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	❷ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$
❸ $\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	
❹ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	❺ $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$
❹ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	❺ $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0^-$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

اللوغاريتمية:

❶ $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$	❷ $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$
❸ $\lim_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$	
❹ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$	❺ $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0^-$
❹ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$	❺ $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^n \ln x = 0^-$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال اللوغاريتمية -بكالوريات جزائرية)

التمارين// الشعبة: تسيير وإقتصاد.

التمرين 01: (03 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

ليكن $P(x)$ كثير الحدود حيث: $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

1.أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$.

ب) استنتج في المجال $]0;+\infty[$ حلول المتراجحة التالية: $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 > 0$.

2.حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $2^{2x+1} = 5 \times 2^x - 2$.

التمرين 02: (04 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3$.

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس. ($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النيبيري)

1)أ) حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة: $f(x) = 0$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب) حلّل $f(x)$ إلى جداء عاملين.

جـ) حل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة: $2\ln x + 2 \geq 0$.

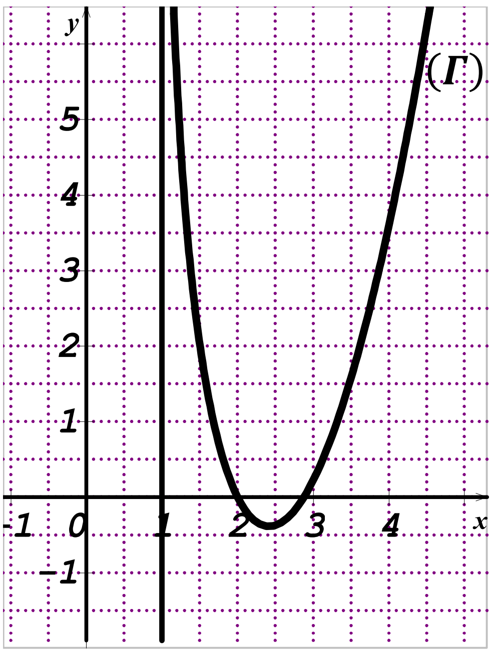
2)أحسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغيّر الدّالة f.

3)بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثييها.

التمرين 03: (09 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I)لتكن g الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x-1)$

($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النيبيري). (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس كما هو في الشكل التالي:



1)بقراءة بيانية، عيّن عدد حلول المعادلة $g(x) = 0$.

2)احسب $g(2)$.

3)بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً α حيث $2,87 < \alpha < 2,88$.

4)استنتج حسب قيم x، إشارة $g(x)$ في المجال $]1;+\infty[$.

II)لتكن f الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ:

$f(x) = x - 3 + 4\frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)أ-أوجد نهاية الدّالة f عند $+\infty$. (لاحظ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$)

ب-احسب $\lim_{x \underset{>}{\to} 1} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

جـ-بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

د-أوجد فاصلة نقطة تقاطع (Δ) مع (C_f).

هـ-ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2)أ-بيّن أنّه من أجل كل عدد x من المجال $]1;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$، ($f'$ هي الدّالة المشتقة للدّالة f).

ب-استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

3)ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f). (نأخذ $f(\alpha)\simeq 3{,}9$)

4)أ-عيّن مشتقة الدّالة: $x\mapsto[\ln(x-1)]^2$، ثم استنتج دّالة أصلية للدّالة f على المجال $]1;+\infty[$.

ب-احسب: $\int_2^5 f(x)dx$، فسّر النتيجة هندسيا.

التمرين 04: (03 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية توجد ثلاثة اقتراحات من بينها واحد فقط صحيح، حدّد الاقتراح الصحيح في كل حالة مع التبرير.

1)مجموعة حلول المتراجحة $\ln(-3x+2)\leq\ln 3$ هي:

أ. $\left[-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right[$؛ ب. $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$؛ جـ. $\mathbb{R}$.

2)لتكن f الدّالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{1}{x}$. الدّالة الأصلية F للدّالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x=e$ معرّفة كما يلي:

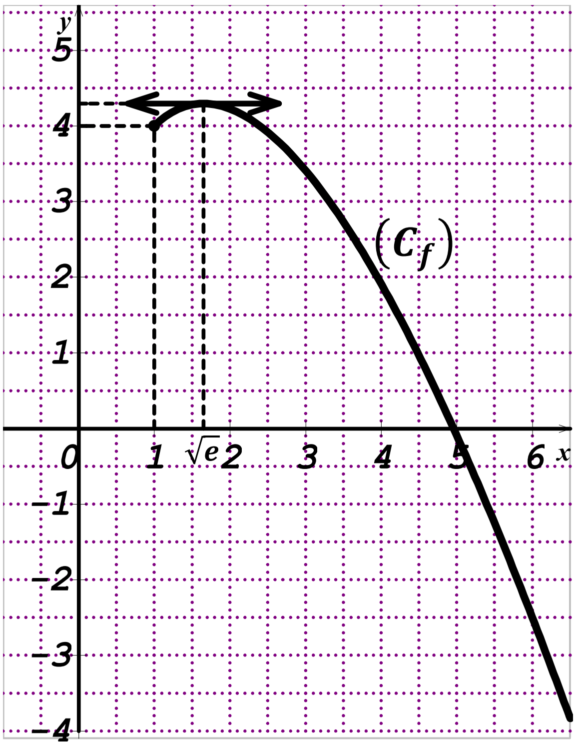
أ. $F(x)=e^{-2}-\frac{1}{x^2}$؛ ب. $F(x)=-1+\ln x$؛ جـ. $F(x)=\ln x$.

3)القيمة المتوسطة للدّالة $g:x\mapsto\frac{x^2}{4}$ على المجال $[-2;2]$ تساوي:

أ. $\frac{4}{3}$؛ ب. 3؛ جـ. $\frac{1}{3}$.

التمرين 05: (06 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

التمثيل البياني (C_f) المقابل هو للدّالة f المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة:



$f(x)=ax+b+cx\ln x$؛ حيث a، b و c أعداد حقيقية.

1)خمّن بقراءة بيانية اتجاه تغيّر f ونهاية f عند $+\infty$.

2)أ-أحسب بدلالة a و c عبارة $f'(x)$ حيث f' هي الدّالة المشتقة للدّالة f على $[1;+\infty[$.

ب-باستعمال معطيات في الشكل، وعلماً أنّ $f(5)=16-10\ln 5$.

-بيّن أنّ: $f(x)=3x+1-2x\ln x$.

جـ-تحقّق من صحة تخمينك في السؤال 1، ثم شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

3)بيّن أنّ المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α على $[1;+\infty[$، ثم تحقق أنّ $4{,}95<\alpha<4{,}96$.

4)نُعرف العدد الحقيقي S كما يلي: $S=\int_1^\alpha f(x)=dx$

(حيث α هو حل المعادلة $f(x)=0$).

أ-بيّن أنّ الدّالة: $g:x\mapsto 2x^2+x-x^2\ln x$ دّالة أصلية للدّالة f على $[1;+\infty[$.

ب-أعط تفسيرا هندسيا للعدد S، ثم احسبه بدلالة α.

جـ-بيّن أنّ: $S = \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1) - 3$، ثم استنتج حصرا للعدد S.

التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I) الدّالة العددية g معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{-x^2+x+2}{x^2}$.

1) عيّن، تبعا لقيم x، إشارة $g(x)$.

2) أ-تحقّق أنه، من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $g(x) = -1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$.

ب-استنتج الدّوال الأصلية للدّالة g على $]0;+\infty[$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;8]$ كما يلي: $f(x) = 3 - x - \frac{2}{x} + \ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ-تحقّق أنّ f هي الدّالة الأصلية للدّالة g على المجال $]0;8]$ والتي تنعدم عند 1.

ب-استنتج اتجاه تغير الدّالة f على المجال $]0;8]$.

جـ-احسب $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

د-شكّل جدول تغيرات الدّالة f.

2) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين، أحدهما α، حيث: $3{,}8 < \alpha < 3{,}9$.

3) مثّل بيانياً (C_f).

III) الدّالة العددية h معرّفة على $\left]-\frac{2}{3};2\right]$ كما يلي: $h(x) = f(3x+2)$.

1) بيّن أنّه إذا كان $-\frac{2}{3} < x \leq 0$ فإنّ $0 < 3x+2 \leq 2$،

وإذا كان $0 \leq x \leq 2$ فإنّ $2 \leq 3x+2 \leq 8$.

2) احسب $h'(x)$. (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)

3) شكّل جدول تغيّرات h.

التمرين 07: (04 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

1) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $(2x+1)(x^2-5x+6) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$

ب) حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلتين: $2(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 + 7\ln x + 6 = 0$؛

$6e^{-3x} + 7e^{-2x} - 9e^{-x} + 2 = 0$.

جـ) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^{x} + 6 \leq 0$.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\log(x^2+100) = 1 + \log 2 + \log x$.

التمرين 08: (07 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I) الدّالة العددية g معرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g.

2) احسب $g(1)$ ثمّ استنتج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)أ) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (يُعطى $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

ب) احسب $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2)أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإنّ: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f.

ب) شكّل جدول تغيرات الدّالة f.

3)أ) بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

4)عيّن فاصلة النقطة A من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) مُوازيا للمستقيم (D) ثمّ اكتب معادلة للمماس (T).

5)ارسم (D)، (T) و (C_f).

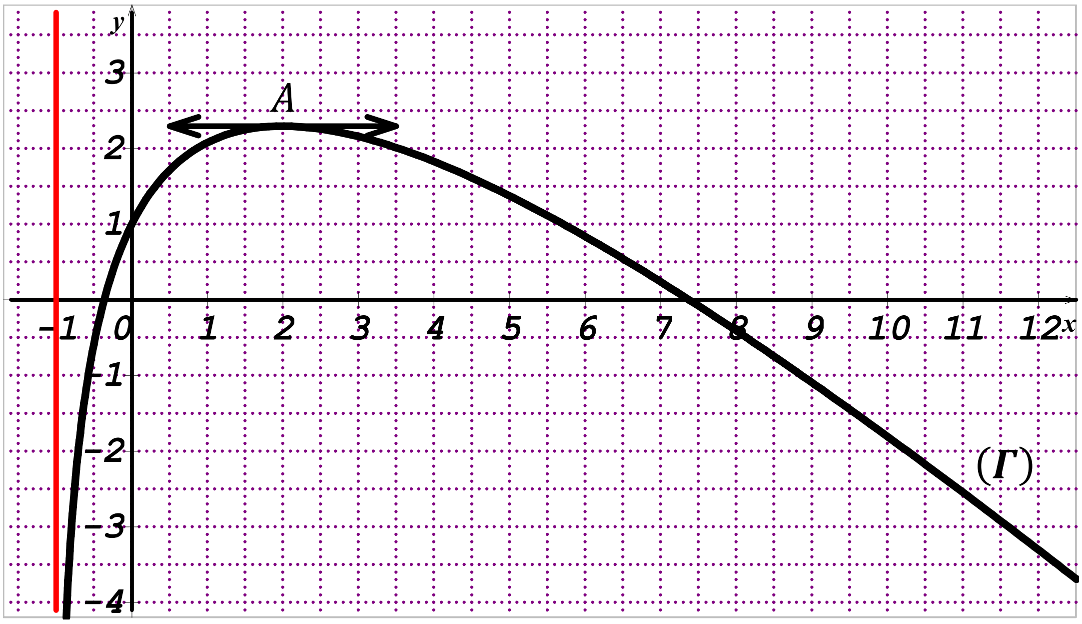
6)احسب القيمة المتوسطة للدّالة f على المجال $[1;3]$.

التمرين 09: (09 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير واقتصاد.

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I) f دّالة معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = ax + b + 3\ln(x+1)$، حيث a و b عددان حقيقيان.

(Γ) التمثيل البياني للدّالة f، المُعطى في الشكل المقابل، يقبل في النقطة $A(2;-1+3\ln 3)$ مماساً **مُوازياً لحامل محور الفواصل**.



1)بقراءة بيانية:

أ) ضع تخميناً حول $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$.

ب) شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

2)باستعمال المعطيات المتوفرة، جِد قيمة كل من a و b.

II)نعتبر في هذا الجزء: $f(x) = -x + 1 + 3\ln(x+1)$.

1)احسب نهاية الدّالة f عند (-1) بقيم أكبر.

2)احسب نهاية الدّالة f عند $+\infty$. (يُعطى $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$)

3)أ) عيّن النقطة B من المنحنى (Γ) التي يكون فيها المماس (T) للمنحنى (Γ) موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = x$، ثم اكتب معادلة للمماس (T).

ب) استنتج بيانياً، قيم العدد الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = x + m$ حلين موجبين تماماً.

4)g الدالة المعرّفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.

أ) احسب $g'(x)$؛ ثمّ استنتج دالة أصلية للدّالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

ب) لتكن α و β فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى (Γ) مع حامل محور الفواصل،

بيّن أنّ: $\alpha \in]7,37; 7,38[$ و $\beta \in]-0,37; -0,36[$.

جـ) احسب S مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (Γ) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x = 0$، $x = \alpha$.

د) تحقق أنّ: $S = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha - 1\right) ua$؛ ثمّ عيّن حصراً لـ S. (ua وحدة مساحة)

III)تنتج إحدى الورشات في اليوم الواحد 7 آلاف قطعة على الأكثر.

تُنمذج الكلفة الهاشمية C_m (الوحدة 1000 دينار) لإنتاج قطعة إضافية على المجال $[0; 7]$ بالدّالة f المعرفة في الجزء $(\boldsymbol{II})$، أي من أجل $x \in [0; 7]$ لدينا $C_m(x) = f(x)$.

نرمز بــ $C_T(x)$ إلى الكلفة الإجمالية لإنتاج x قطعة.

1)عيّن عبارة الكلفة الإجمالية $C_T(x)$ علماً أن الكلفة الإجمالية لإنتاج الألف قطعة الأولى هي $\frac{5}{2}$.

2)قدِّر قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 7 آلاف قطعة.

التمرين 10: (07,5 نقطة) بكالوريا 2016// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I) g دّالة عددية معرّفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = ax + b + \ln x$ حيث a و b عددان حقيقيان.

1)عيّن a و b بحيث: $g(1) = 2$ و $g'(2) = \frac{3}{2}$.

2)نضع: $g(x) = x + 1 + \ln x$.

أ-احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

ب-ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها.

جـ-بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً حقيقيا وحيداً α حيث: $0,2 < \alpha < 0,3$.

د-حدّد تبعا لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II)نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1)بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f.

2)احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (يُعطى: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x = 0$)

3)تحقق أنّ: $f(\alpha) = -\alpha$ ثم شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

4)احسب $f(1)$ و $f(5)$ ثمّ ارسم (C_f) على المجال $]0; 5]$.

التمرين 11: (07 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I)نعتبر الدّالة g المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = -4 + 2x(1 + \ln x)$.

1)احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. (تُعطى: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \ln x = 0$)

2)ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3)بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1,4 < \alpha < 1,5$.

4)حدّد إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II)نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = (2x - 4) \ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1)أ-احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$. فسّر النتيجة هندسيا.

ب-احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2)أ-بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

ب-استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3)عيّن نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

4)أ-اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

ب-أنشئ (T) و (C_f). (تُعطى: $f(\alpha) \simeq -0,41$)

5)نعتبر الدّالة F المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $F(x) = (x^2 - 4x) \ln x - \frac{1}{2}x^2 + 4x$.

أ-بيّن أنّ F دّالة أصلية للدّالة f على المجال $]0; +\infty[$.

ب-احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$، $x = 1$ و $x = 2$.

التمرين 12: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د01//الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I)نعتبر الدّالة g المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 3 \ln x - 3$.

1)ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g.

2)بيّن أنّ: المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1,40 < \alpha < 1,41$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II)نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + 1 - \frac{3 \ln x}{x}$.

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1)أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$، فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2)بيّن أنّ: من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب تماماً، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

3)استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.

4)أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5)أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f). (تُعطى: $f(\alpha) \simeq 1,68$)

6)أ) بيّن أنّ الدّالة h حيث $h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ أصلية للدّالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب) احسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = 1$، $x = e$ وَ $y = x + 1$.

التمرين 13: (08 نقاط بكالوريا 2018// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لتكن f الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-2;8[$ بـ: $f(x) = \ln(x+2) + \ln(-x+8) - \ln 16$.

وليكن (C_f) منحنى الدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

نأخذ الوحدة البيانية:$2cm$.

1) احسب نهايتي الدّالة f عند طرفي مجموعة التعريف $]-2;8[$ وفسّر النتيجتين بيانيا.

2)تحقّق أنّه من أجل كلّ x من $]-2;8[$: $f'(x) = \frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$. ($f'$ مشتقة الدّالة f)

3)ادرس إشارة $f'(x)$ على المجال $]-2;8[$ وشكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

4)عيّن نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.

5)بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-2;8[$:$(6-x)$ ينتمي إلى $]-2;8[$ و$f(6-x) = f(x)$، ثمّ فسّر النتيجة بيانياً.

6)ارسم المنحنى (C_f).

7)لتكن الدّالة العددية F المعرّفة على المجال $]-2;8[$ بـ:

$$F(x) = (x+2)\ln(x+2) + (x-8)\ln(-x+8) - 2x - x\ln 16.$$

بيّن أنّ F دّالة أصلية لـ f على المجال $]-2;8[$.

8)احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:$y = 0$، $x = 0$ و$x = 4$.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال اللوغاريتمية -بكالوريات جزائرية)

الحلول // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

حل التمرين 01: (03 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $P(x)$ كثير الحدود حيث: $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

1.أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$:

$P(x) = 0$ تُكافئ $2x^2 - 5x + 2 = 0$، نحسب مميزها Δ: $\Delta = (-5)^2 - 4(2)(2) = 9 > 0$

إذن: للمعادلة حلين متمايزين هما، $\boxed{x' = \frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5+3}{4} = 2}$ وَ $\boxed{x'' = \frac{-(-5)-\sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}}$.

ب) استنتج في المجال $]0; +\infty[$ حلول المتراجحة التالية $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 > 0$:

نضع: $X = \ln x$ نجد: $2X^2 - 5X + 2 > 0$، ندرس إشارة $2X^2 - 5X + 2$ (الجذرين هما $\frac{1}{2}$ وَ2)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2X^2 - 5X + 2$		+	0	-	0	+	

وبالتالي: $X \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup]2; +\infty[$ أي: $\ln x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup]2; +\infty[$؛ إذن: $\boxed{x \in \left]0; e^{\frac{1}{2}}\right[\cup]e^2; +\infty[}$.

2.حل في $\mathbb{R}$ المعادلة، $2^{2x+1} = 5 \times 2^x - 2$:

$2^{2x+1} = 5 \times 2^x - 2$ تُكافئ: $2^1 \times 2^{2x} - 5 \times 2^x + 2 = 0$

أي: $2 \times (2^x)^2 - 5 \times 2^x + 2 = 0$

نضع: $Y = 2^x$ نجد: $2Y^2 - 5Y + 2 = 0$

وعليه: $Y = \frac{1}{2}$ أو $Y = 2$

أي: $2^x = \frac{1}{2}$ أو $2^x = 2$

وبالتالي: $2^x = 2^{-1}$ أو $2^x = 2^1$

إذن: $\boxed{x = -1}$ أو $\boxed{x = 1}$.

حل التمرين 02: (04 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3$ وَ $D_f =]0; +\infty[$.

و(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس. ($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النيبيري)

1)أ) حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة، $f(x) = 0$:

لدينا: $f(x) = 0$ يعني: $(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$

وبوضع: $\ln x = Y$ نجد: $Y^2 + 2Y - 3 = 0 \dots (1)$؛ مميزها: $\Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 16 > 0$

المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين هما، $Y' = \frac{-2+\sqrt{16}}{2(1)} = 1$ وَ $Y'' = \frac{-2-\sqrt{16}}{2(1)} = -3$.

- من أجل $Y' = 1$ يكون $\ln x = 1$ ومنه: $\boxed{x = e}$.
- من أجل $Y'' = -3$ يكون $\ln x = -3$ ومنه: $\boxed{x = e^{-3}}$.

إذن: $\boxed{S = \{e^{-3}; e\}}$.

تفسير النتيجة هندسيا: (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما، e وَ e^{-3}.

ب) تحليل $f(x)$ إلى جداء عاملين:

كثير الحدود Y^2+2Y-3 يقبل **جذرين متمايزين** هما، $Y'=1$ وَ $Y''=-3$.

فيُكتب من الشكل: $Y^2+2Y-3=1(Y-Y')(Y-Y'')=(Y-1)(Y+3)$

ومن أجل $\ln x=Y$ نجد: $\boxed{f(x)=(\ln x)^2+2\ln x-3=(\ln x-1)(\ln x+3)}$.

جـ) حل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة، $2\ln x+2\geq 0$:

$2\ln x+2\geq 0$ تُكافئ $\ln x\geq -1$ ومنه: $x\geq e^{-1}$ أي: $x\geq \frac{1}{e}$ إذن: $\boxed{S=\left[\frac{1}{e};+\infty\right[}$.

2) حساب $f'(x)$ واستنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f :

f **قابلة للإشتقاق على** $]0;+\infty[$، ولدينا: $\boxed{f'(x)=2\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)+2\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln x+2}{x}}$.

ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(2\ln x+2)$ على المجال $]0;+\infty[$.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$2\ln x+2$	‖	-	0	+	
$f'(x)$	‖	-	0	+	

إذن: f **متناقصة تماما على** المجال $\left]0;\frac{1}{e}\right]$، و**متزايدة تماما على** المجال $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$.

3) تبيان أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثييها:

لدينا: $f''(x)=\frac{2\left(\frac{1}{x}\right)\times x-1\times(2\ln x+2)}{x^2}=\frac{2-(2\ln x+2)}{x^2}=\frac{-2\ln x}{x^2}=\frac{2(-\ln x)}{x^2}$.

ومنه: إشارة $f''(x)$ من إشارة $(-\ln x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	-	0	+	
$f''(x)$	‖	+	0	-	

نلاحظ أنّ: $f''(x)$ **تنعدم عند 1 مغيّرةً إشارتها**، إذن: (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي: $I(1;f(1))$؛ أي: $\boxed{I(1;-3)}$.

حل التمرين 03: (09 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I) لدينا: $g(x)=x^2-2x-4\ln(x-1)$ وَ $D_g=]1;+\infty[$.

(Γ) التمثيل البياني لـg في معلم متعامد ومتجانس.

1) تعيين بيانيا عدد حلول المعادلة $g(x)=0$:

بما أنّ (Γ) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين؛ فإنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلين متمايزين.

2) حساب $g(2)$:

بالتعويض نجد: $g(2)=(2)^2-2(2)-4\ln(2-1)=0$.

3) تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً α حيث $2,87<\alpha<2,88$:

- g **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]2,87;2,88[$

(لأنّ من البيان نلاحظ أنّها **متزايدة تماما** على المجال $[2,5;+\infty[$)

- ولدينا: $\begin{cases} g(2,87)\simeq -0,0069 \\ g(2,88)\simeq 0,0093 \end{cases}$، أي: $g(2,87)\times g(2,88)<0$

إذن: **حسب مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً α حيث $2,87<\alpha<2,88$.

4) استنتاج حسب قيم x، إشارة $g(x)$ في المجال $]1;+\infty[$:

من البيان وحسب الأسئلة السابقة ينتج:

x	1		2		α		$+\infty$
$g(x)$	▮	+	0	-	0	+	

II) لدينا: $f(x)=x-3+4\frac{\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}$ و $D_f=]1;+\infty[$.

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ-إيجاد نهاية الدّالة f عند $+\infty$: (علماً أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

بوضع: $\boxed{X=x-1}$ (لما $x\to+\infty$، فإنّ $X\to+\infty$)

نجد: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\left(X-2+4\frac{\ln X}{X}+\frac{5}{X}\right)=+\infty$

(لأنّ $\lim\limits_{X\to+\infty}(X-2)=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{5}{X}=0$)

ب-حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا:

لدينا: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\left(x-3+\frac{4\ln(x-1)+5}{x-1}\right)=-\infty$،

(لأنّ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\ln(x-1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}(x-1)=0^+$)

تفسير النتيجة هندسيا:

بمأنّ: $\boxed{\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=-\infty}$، فإنّ: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x=-1}$ (المُوازي لمحور التراتيب) مُقارب للمنحنى (C_f).

جـ-تبيان أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$:

(نُبين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$)

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4\frac{\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\left(4\frac{\ln X}{X}+\frac{5}{X}\right)=0$

إذن: المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

د-إيجاد فاصلة نقطة تقاطع (Δ) مع (C_f):

نحل المعادلة $f(x)=x-3$ في المجال $]1;+\infty[$.

لدينا: $f(x)=x-3$ معناه: $4\frac{\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}=0$

ومنه: $\frac{4\ln(x-1)+5}{x-1}=0$

وعليه: $4\ln(x-1)+5=0$ و $x-1>0$

وبالتالي: $\boxed{x=e^{-\frac{5}{4}}+1}$ ؛ (وهي فاصلة نقطة تقاطع (Δ) مع (C_f)).

هـ-دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ): (ندرس إشارة الفرق $(f(x)-(x-3)$)

لدينا: $f(x)-(x-3)=\frac{4\ln(x-1)+5}{x-1}$، ومنه:

إشارة الفرق $f(x)-(x-3)$ من إشارة البسط $(4\ln(x-1)+5)$ (لأنّ: $x-1>0$ على المجال $]1;+\infty[$)

نضع: $4\ln(x-1)+5>0$ نجد: $x>e^{-\frac{5}{4}}+1$ إذن:

x	1		$e^{-\frac{5}{4}}+1$		$+\infty$
$4\ln(x-1)+5$		-	0	+	
$f(x)-(x-3)$		-	0	+	
الوضع النسبي		(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

2)أ-تبيان أنّه من أجل كل عدد x من المجال $]1;+\infty[$ لدينا، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$:

f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x)=1+4\left(\frac{\frac{1}{x-1}\times(x-1)-1\times\ln(x-1)}{(x-1)^2}\right)-\frac{5(1)}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2+4-4\ln(x-1)-5}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-4\ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

ومنه: $\boxed{f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}}$ (وهو المطلوب).

ب-استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f وتشكيل جدول تغيّراتها:

لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$، ومنه: لـ $f'(x)$ وَ $g(x)$ **نفس إشارة** وعليه:

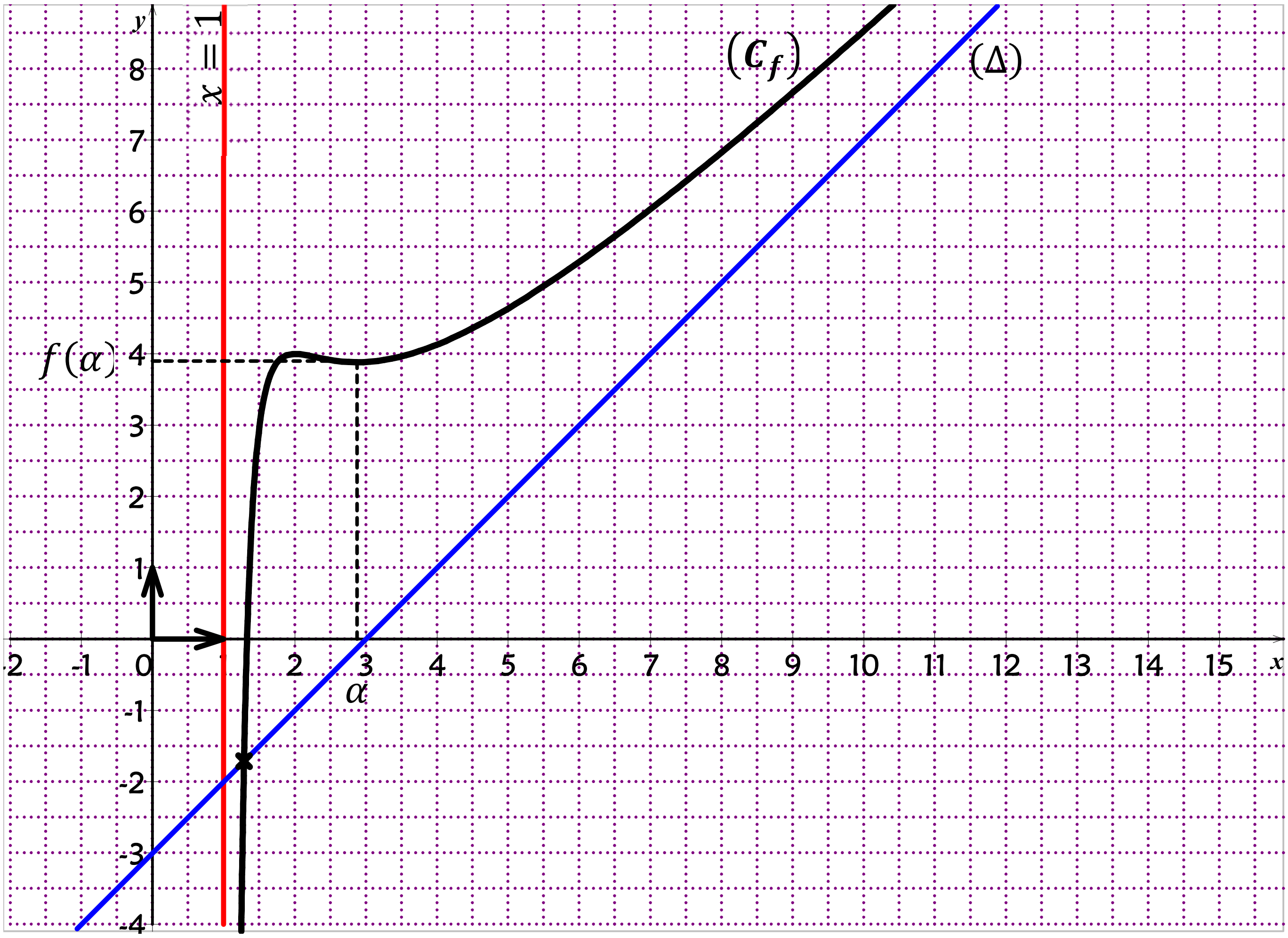
x	1		2		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

إذن: f **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty;2]$ وَ $[\alpha;+\infty[$، وَ**متناقصة تماما** على المجال $[2;\alpha]$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	1		2		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$-\infty$ ↗	4	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3)رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f): (نأخذ $f(\alpha)\simeq 3,9$)



4)أ-تعيين مشتقة الدّالة $x \mapsto [\ln(x-1)]^2$، ثم استنتاج دّالة أصلية للدّالة f على المجال $]1;+\infty[$:

نضع: $h(x)=[\ln(x-1)]^2$، h قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$، ولدينا:

$$h'(x)=2\times\frac{1}{x-1}\times[\ln(x-1)]^1=2\frac{\ln(x-1)}{x-1}$$

استنتاج دّالة أصلية للدّالة f على المجال $]1;+\infty[$:

الدّالة $x\mapsto \frac{1}{2}x^2-3x+2[\ln(x-1)]^2+5\ln(x-1)$ أصلية للدّالة f على المجال $]1;+\infty[$.

ب-حساب $\int_2^5 f(x)dx$:

لدينا: $\int_2^5 f(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-3x+2[\ln(x-1)]^2+5\ln(x-1)\right]_2^5$

ومنه: $\int_2^5 f(x)dx=\left[\frac{25}{2}-15+2[\ln(4)]^2+5\ln(4)\right]-[-4]=8[\ln 2]^2+10\ln 2+\frac{3}{2}$

تفسير النتيجة هندسيا:

التكامل $\int_2^5 f(x)dx$ هو **مساحة** الحيز المُحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين $x=2$ وَ $x=5$.

حل التمرين 04: (03 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير واقتصاد.

تحديد الاقتراح الصحيح، مع التبرير:

1)مجموعة حلول المتراجحة $\ln(-3x+2)\le \ln 3$ هي: أ. $\left[-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right[$؛

التعليل: لدينا: $D=\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$ (المجموعة المرجعية)

ولدينا: $\ln(-3x+2) \leq \ln 3$ تُكافئ: $-3x+2 \leq 3$

ومنه: $-3x \leq 1$

وعليه: $x \geq -\frac{1}{3}$

وبالتالي: $S = D \cap \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[$ إذن: $\boxed{S = \left[-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right[}$.

2)لتكن f الدّالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعبارة $f(x) = \frac{1}{x}$. الدّالة الأصلية F للدّالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x = e$ معرّفة كما يلي: **ب.** $F(x) = -1 + \ln x$؛

التعليل: لدينا: من أجل كل x من $]0; +\infty[$، $F(x) = \ln x + k$ (حيث $k \in \mathbb{R}$)

ولدينا: $F(e) = 0$ تُكافئ: $\ln e + k = 0$

ومنه: $1 + k = 0$ وبالتالي: $k = -1$ إذن: $\boxed{F(x) = -1 + \ln x}$.

ط02) الاقتراح الصحيح هو: **ب.** $F(x) = -1 + \ln x$؛ **لأنّ:**

$$\boxed{F(x) = \int_e^x \frac{1}{t}dt = [\ln t]_e^x = \ln x - \ln e = \ln x - 1}.$$

3)القيمة المتوسطة للدّالة $g: x \mapsto \frac{x^2}{4}$ على المجال $[-2; 2]$ تساوي: **جـ.** $\frac{1}{3}$؛ **لأنّ:**

$$\boxed{m = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2} g(x)dx = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{12}x^3\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{12}\left[\left(2^3\right)-\left((-2)^3\right)\right] = \frac{1}{3}}.$$

حل التمرين 05: (06 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $D_f = [1; +\infty[$ وَ $f(x) = ax + b + cx\ln x$؛ حيث a، b و c أعداد حقيقية.

1)تخمين بيانياً اتجاه تغيّر f ونهاية f عند $+\infty$:

- f **متزايدة تماما** على المجال $[1; \sqrt{e}]$، و**متناقصة تماما** على المجال $[\sqrt{e}; +\infty[$؛
- $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

2)أ-حساب بدلالة a وc عبارة $f'(x)$ حيث f' هي الدّالة المشتقة للدّالة f على $[1; +\infty[$:

f **قابلة للاشتقاق** على $[1; +\infty[$، ولدينا: $\boxed{f'(x) = a + c\left(1\times\ln x + \frac{1}{x}\times x\right) = a + c(\ln x + 1)}$.

ب-باستعمال معطيات في الشكل، وعلماً أنّ $f(5) = 16 - 10\ln 5$.

-تبيان أنّ: $f(x) = 3x + 1 - 2x\ln x$:

لدينا: $\begin{cases} f(1) = 4 \\ f'(\sqrt{e}) = 0 \\ f(5) = 16 - 10\ln 5 \end{cases}$، أي: $\begin{cases} a(1) + b + c(1)\ln 1 = 4 \\ a + c(\ln\sqrt{e} + 1) = 0 \\ a(5) + b + c(5)\ln 5 = 16 - 10\ln 5 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} a + b = 4 \\ a + c\left(\frac{1}{2}\ln e + 1\right) = 0 \\ 5a + b + 5c\ln 5 = 16 - 10\ln 5 \end{cases}$

أي: $\begin{cases} a+b=4 \\ a+\frac{3}{2}c=0 \\ 5a+b=16 \\ 5c=-10 \end{cases}$

وبالتالي: $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases}$؛ إذن: $\boxed{f(x)=3x+1-2x\ln x}$.

جـ-التحقق من صحة التخمين في السؤال 1، ثم تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f :

- لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(3+\frac{1}{x}-\ln x\right)\right]=-\infty$ لأنّ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty \end{cases}$.
- لدينا: $f'(x)=1-2\ln x$،

إشارة $f'(x)$ على المجال $[1;+\infty[$:

$\boxed{f'(x)>0}$ يعني: $1-2\ln x>0$ ومنه: $\ln x<\frac{1}{2}$ وعليه: $1<x<e^{\frac{1}{2}}$ أي: $\boxed{1<x<\sqrt{e}}$

$\boxed{f'(x)=0}$ يعني: $1-2\ln x=0$ ومنه: $\ln x=\frac{1}{2}$ وعليه: $x=e^{\frac{1}{2}}$ أي: $\boxed{x=\sqrt{e}}$

$\boxed{f'(x)<0}$ يعني: $1-2\ln x<0$ ومنه: $\ln x>\frac{1}{2}$ وعليه: $x>e^{\frac{1}{2}}$ أي: $\boxed{x>\sqrt{e}}$

ومنه: f **متزايدة تماما** على المجال $[1;\sqrt{e}]$، و**متناقصة تماما** على المجال $[\sqrt{e};+\infty[$؛

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	1		$\sqrt{e}$		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0			-	
$f(x)$	4	↗	$f(\sqrt{e})$	↘	0	↘	$-\infty$

حيث $f(\sqrt{e})=3(\sqrt{e})+1-2(\sqrt{e})\ln\sqrt{e}=3\sqrt{e}+1-2\sqrt{e}\times\frac{1}{2}\ln e=2\sqrt{e}+1$.

3)تبيان أنّ المعادلة، $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α على $[1;+\infty[$:

- لدينا: حسب جدول التغيرات، f متزايدة تماما على المجال $[1;\sqrt{e}]$ وَ $f(1)=4$

أي: $f(x)=0$ لا تقبل حلولا على المجال $[1;\sqrt{e}]$.

- على المجال $[\sqrt{e};+\infty[$:

- f **مستمرة** و**متناقصة تماما** على المجال $[\sqrt{e};+\infty[$
- ولدينا: $\begin{cases} f(\sqrt{e})=2\sqrt{e}+1\simeq 4{,}30 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \end{cases}$ أي: $0\in\left]-\infty;2\sqrt{e}+1\right]$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[\sqrt{e};+\infty[$.

التحقق أنّ $4{,}95<\alpha<4{,}96$:

لدينا: $\begin{cases} f(4{,}95)\simeq 0{,}02 \\ f(4{,}96)\simeq -0{,}01 \end{cases}$، أي: $f(4{,}95)\times f(4{,}96)<0$ إذن: $\boxed{4{,}95<\alpha<4{,}96}$.

4)العدد الحقيقي S معرّف كما يلي، $S=\int_1^{\alpha} f(x)=dx$ (حيث α هو حل المعادلة $f(x)=0$).

أ-تبيان أنّ الدّالة، $g: x \mapsto 2x^2 + x - x^2 \ln x$ دّالة أصلية للدّالة f على $[1; +\infty[$:

g قابلة للاشتقاق على $[1; +\infty[$، ولدينا:

$$g'(x) = 4x + 1 - \left(2x \ln x + \frac{1}{x} \times x^2\right) = 4x + 1 - 2x \ln x - x = 3x + 1 - 2x \ln x = f(x)$$

إذن: $g: x \mapsto 2x^2 + x - x^2 \ln x$ دّالة أصلية للدّالة f على $[1; +\infty[$.

ب-إعطاء تفسيرا هندسيا للعدد S:

العدد S هو مساحة الحيز من المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = \alpha$.

حساب بدلالة α، العدد S:

لدينا: $S = \int_1^\alpha f(x) = dx = [g(x)]_1^\alpha = g(\alpha) - g(1) = 2\alpha^2 + \alpha - 3 - \alpha^2 \ln \alpha$.

جـ-تبيان أنّ، $S = \frac{1}{2}\alpha(\alpha + 1) - 3$:

لدينا: α حل للمعادلة $f(x) = 0$ أي: $f(\alpha) = 0$ ومنه: $3\alpha + 1 - 2\alpha \ln \alpha = 0$؛ وعليه: $\boxed{\ln \alpha = \frac{3\alpha+1}{2\alpha}}$

وبالتعويض نجد: $S = 2\alpha^2 + \alpha - 3 - \alpha^2 \left(\frac{3\alpha+1}{2\alpha}\right) = 2\alpha^2 + \alpha - \frac{1}{2}\alpha(3\alpha + 1) - 3$

ومنه: $S = \frac{1}{2}\alpha[4\alpha + 2 - (3\alpha + 1)] - 3 = \frac{1}{2}\alpha(\alpha + 1) - 3$ (وهو المطلوب).

استنتاج حصرا للعدد S:

لدينا: $\begin{cases} 4{,}95 < \alpha < 4{,}96 \\ S = \frac{1}{2}\alpha(\alpha + 1) - 3 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} \frac{4{,}95}{2} < \frac{1}{2}\alpha < \frac{4{,}96}{2} \\ 5{,}95 < \alpha + 1 < 5{,}96 \end{cases}$

وبالتالي: $\frac{4{,}95}{2}(5{,}95) - 3 < \frac{1}{2}\alpha(\alpha + 1) - 3 < \frac{4{,}96}{2}(5{,}96) - 3$

إذن: $\boxed{11{,}73 < S < 11{,}78}$.

حل التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I) لدينا: $g(x) = \frac{-x^2+x+2}{x^2}$ وَ $D_g =]0; +\infty[$.

1) تعيين، تبعا لقيم x، إشارة $g(x)$:

إشارة $g(x)$ من إشارة البسط $(-x^2 + x + 2)$ على $]0; +\infty[$.

نضع: $-x^2 + x + 2 = 0$ مميزها: $\Delta = (1)^2 - 4(-1)(2) = 9 > 0$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$x' = \frac{-(1)+\sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \notin]0; +\infty[$ وَ $x'' = \frac{-(1)-\sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$.

x	0		2		$+\infty$
$g(x)$	‖	+	0	-	

2) أ-التحقق أنه، من أجل كل x من $]0; +\infty[$، $g(x) = -1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$:

من أجل كل x من $]0; +\infty[$، لدينا: $\boxed{g(x) = \frac{-x^2+x+2}{x^2} = \frac{-x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = -1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}$.

ب-استنتاج الدّوال الأصلية للدّالة g على $]0; +\infty[$:

الدّوال الأصلية للدّالة g على $]0; +\infty[$، هي دّوال من الشكل $G: x \mapsto -x + \ln x - \frac{2}{x} + k$ (حيث $k \in \mathbb{R}$)

II) لدينا: $f(x) = 3 - x - \frac{2}{x} + \ln x$ وَ $D_f =]0;8]$.

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)أ-التحقق أنّ f هي الدّالة الأصلية للدّالة g على المجال $]0;8]$ والتي تنعدم عند 1:

ط01) لدينا: $\begin{cases} f'(x) = -1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = g(x) \\ f(1) = 3 - 1 - \frac{2}{1} + \ln 1 = 0 \end{cases}$، إذن: f هي الدّالة الأصلية للدّالة g على المجال $]0;8]$ والتي تنعدم عند 1.

ط02) لدينا: $\int_1^x g(t)dt = [G(t)]_1^x = G(x) - G(1) = \left(-x + \ln x - \frac{2}{x} + k\right) - \left(-1 + \ln 1 - \frac{2}{1} + k\right)$

ومنه: $\int_1^x g(t)dt = -x + \ln x - \frac{2}{x} + 3 = f(x)$،

إذن: f هي الدّالة الأصلية للدّالة g على المجال $]0;8]$ والتي تنعدم عند 1.

ب-استنتاج اتجاه تغير الدّالة f على المجال $]0;8]$:

لدينا: من أجل كل x من $]0;8]$، $\boxed{f'(x) = g(x)}$ (لأنّ f دّالة أصلية لـ g)

أي: لـ $f'(x)$ وَ $g(x)$ **نفس الإشارة**،

إذن: f **متزايدة تماما** على المجال $]0;2]$، وَ**متناقصة تماما** على المجال $[2;8]$.

جـ-حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$، ثم تفسير النتيجة هندسياً:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (3 - x - \frac{2}{x} + \ln x) = -\infty$، لأنّ: $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(-\frac{2}{x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty \end{cases}$

التفسير الهندسي:

بما أنّ: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty}$، فإنّ: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x = 0}$ (محور التراتيب) مُقارب لـ (C_f).

د-تشكيل جدول تغيرات الدّالة f :

x	**0**		**2**		**8**
$f'(x)$	‖	+	0	-	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\ln 2$	↘	$\frac{-21}{4} + 3\ln 2$

2)تبيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين، أحدهما α، حيث $3,8 < \alpha < 3,9$:

بالنسبة للحل الأوّل:

- f **مستمرة** و**متزايدة تماما** على المجال $]0;2]$
- ولدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty \\ f(2) = \ln 2 > 0 \end{cases}$ أي: $0 \in]-\infty;\ln 2]$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً وهو العدد ***1*** في المجال $]0;2]$.

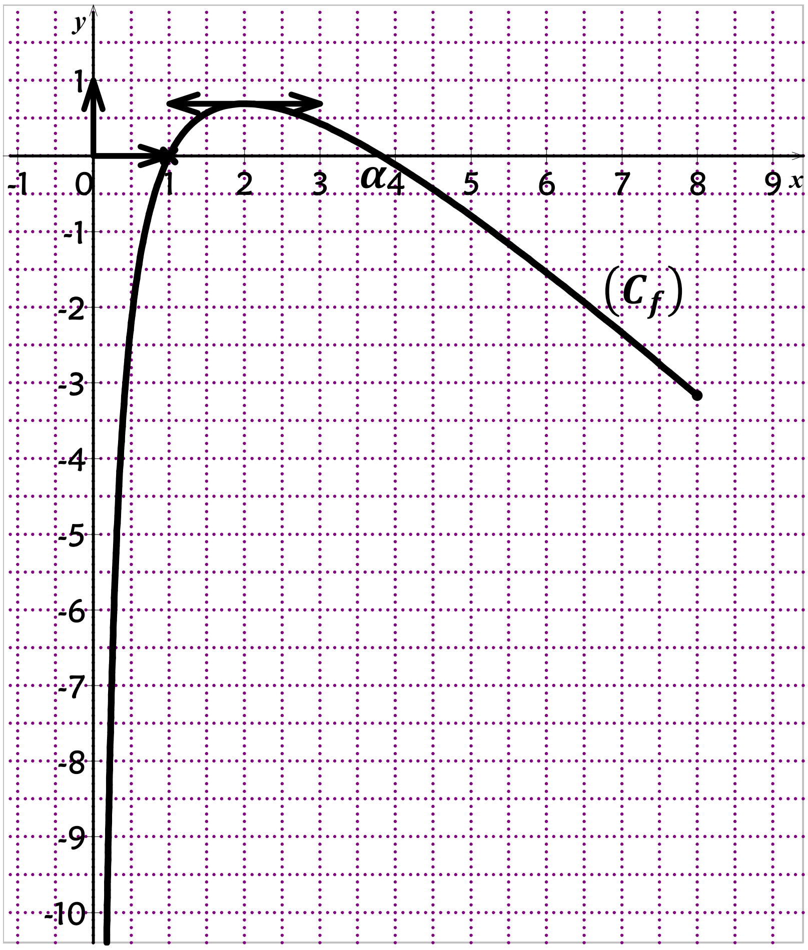
بالنسبة لـ α:

- f **مستمرة** و**متناقصة تماما** على المجال $]3{,}8;3{,}9[$ (لأنّها **متناقصة تماما** على المجال $[2;8]$)

- ولدينا: $\begin{cases} f(3{,}8) \simeq 0{,}01 \\ f(3{,}9) \simeq -0{,}05 \end{cases}$ أي: $f(3{,}8) \times f(3{,}9) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $3{,}8 < \alpha < 3{,}9$.

3)تمثّيل بيانياً (C_f):



***III)*لدينا:** $h(x) = f(3x+2)$ وَ $D_h = \left]-\frac{2}{3}; 2\right]$.

نلاحظ أنّ: h عبارة عن مركب دّالتين f وَ $x \mapsto 3x+2$.

1)في حالة: $-\frac{2}{3} < x \leq 0$ فإنّ: $-2 < 3x \leq 0$ ويكون: $0 < 3x+2 \leq 2$،

وفي حالة: $0 \leq x \leq 2$ فإنّ: $0 \leq 3x \leq 6$ ويكون: $2 \leq 3x+2 \leq 8$.

2)حساب $h'(x)$: (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)

تذكير: $\boxed{[u(ax+b)]' = au'(ax+b)}$.

h **قابلة للاشتقاق على** $\left]-\frac{2}{3}; 2\right]$، ولدينا: $\boxed{h'(x) = 3f'(3x+2)}$.

3)تشكيل جدول تغيّرات h:

إشارة $h'(x)$ من إشارة $f'(3x+2)$.

لدينا:

$3x+2$	0		2		8
$f'(3x+2)$		+	0	-	
$f(3x+2)$		$-\infty$ ↗	$\ln 2$	↘ $\frac{-21}{4} + 3\ln 2$	

وباستعمال السؤال 1) نجد:

x	$-\frac{2}{3}$		0		2
$h'(x)$		+	0	-	
$h(x)$		$-\infty$ ↗	$\ln 2$	↘	$\frac{-21}{4}+3\ln 2$

حل التمرين 07: (04 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

1) أ) التحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ، $(2x+1)(x^2-5x+6)=2x^3-9x^2+7x+6$:

لدينا: $(2x+1)(x^2-5x+6)=2x(x^2-5x+6)+1(x^2-5x+6)$

$$=2x^3-10x^2+12x+x^2-5x+6=2x^3-9x^2+7x+6$$

إذن: $\boxed{(2x+1)(x^2-5x+6)=2x^3-9x^2+7x+6}$.

ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة، $2(\ln x)^3-9(\ln x)^2+7\ln x+6=0$:

لدينا: $D=]0;+\infty[$ (D المجموعة المرجعية)

باستعمال السؤال 1)أ)

$2(\ln x)^3-9(\ln x)^2+7\ln x+6=0$ تُكافئ: $(2\ln x+1)[(\ln x)^2-5\ln x+6]=0$

ومنه: $\begin{cases}2\ln x+1=0\\ \text{أو}\\ (\ln x)^2-5\ln x+6=0\end{cases}$

- $2\ln x+1=0$ معناه: $\ln x=-\frac{1}{2}$ ومنه: $x=e^{-\frac{1}{2}}$ أي: $\boxed{x=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\in D}$،
- بوضع: $\boxed{X=\ln x}$، المعادلة $(\ln x)^2-5\ln x+6=0$

تُصبح: $X^2-5X+6=0\ (*)$ **مميز $(*)$:** $\Delta=(-5)^2-4(1)(6)=1>0$

للمعادلة $(*)$ حلين متمايزين هما: $X'=\frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2(1)}=3$ وَ $X''=\frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2(1)}=2$.

وبالعودة إلى الوضع نجد: من أجل $X=3$ أي: $\ln x=3$ فإنّ: $\boxed{x=e^3\in D}$

وَمن أجل $X=2$ أي: $\ln x=2$ فإنّ: $\boxed{x=e^2\in D}$

إذن: مجموعة الحلول هي $\boxed{S_1=\left\{\frac{1}{\sqrt{e}};e^2;e^3\right\}}$.

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة، $6e^{-3x}+7e^{-2x}-9e^{-x}+2=0$:

$6e^{-3x}+7e^{-2x}-9e^{-x}+2=0$ تُكافئ: $e^{3x}(6e^{-3x}+7e^{-2x}-9e^{-x}+2)=e^{3x}(0)$

تُصبح: $6+7e^x-9e^{2x}+2e^{3x}=0$

أي: $2(e^x)^3-9(e^x)^2+7e^x+6=0$

ومنه: $(2e^x+1)[(e^x)^2-5e^x+6]=0$

وعليه: $(2e^x+1)(e^x-3)(e^x-2)=0$

وبالتالي: $e^x-3=0$ أو $e^x-2=0$ (**لأنّ:** $2e^x+1>0$)

أي أنّ: $x=\ln 3$ أو $x=\ln 2$.

إذن: مجموعة الحلول هي $\boxed{S_2 = \{\ln 2 ; \ln 3\}}$.

جـ) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة، $2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6 \leq 0$: (ندرس إشارة $2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6$)

إشارة $(2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6)$ من إشارة $[(e^x)^2 - 5e^x + 6]$

(لأنّ $2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6 = (2e^x + 1)[(e^x)^2 - 5e^x + 6]$ وَ $2e^x + 1 > 0$)

x	$-\infty$		$\ln 2$		$\ln 3$		$+\infty$
$(e^x)^2 - 5e^x + 6$		+	0	-	0	+	
$2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6$		+	0	-	0	+	

إذن: مجموعة الحلول هي $\boxed{S_3 = [\ln 2 ; \ln 3]}$.

2)حل في $\mathbb{R}$ المعادلة، $\log(x^2 + 100) = 1 + \log 2 + \log x$:

لدينا: $D =]0; +\infty[$ (D المجموعة المرجعية)

$\log(x^2 + 100) = 1 + \log 2 + \log x$ تُكافئ: $\log(x^2 + 100) = \log 10 + \log 2 + \log x$

وتُصبح: $\log(x^2 + 100) = \log(10 \times 2 \times x)$

ومنه: $x^2 + 100 = 10 \times 2 \times x$

أي: $(x - 10)^2 = 0$

يعني: $x - 10 = 0$، وبالتالي: $\boxed{x = 10 \in D}$

إذن: مجموعة الحلول هي $\boxed{S_4 = \{10\}}$.

حل التمرين 08: (07 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I) لدينا: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$ وَ $D_g =]0; +\infty[$.

1)دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g:

g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$، ولدينا: $\boxed{g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\left(2x + \frac{1}{x}\right) < 0}$،

إذن: g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

2) حساب $g(1)$ ثمّ استنتاج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$:

لدينا: $g(1) = 1 - (1)^2 - \ln 1 = 0$.

استنتاج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$:

بمأنّ: g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$ وَ $g(1) = 0$، فإنّ:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	+	0	-	

II) لدينا: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$ وَ $D_f =]0; +\infty[$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1)أ) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$: (علماً أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

ب) حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ ثمّ تفسير النتيجة هندسيا:

لدينا: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty}$ ، لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$.

التفسير الهندسي:

المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x=0}$ (محور التراتيب) مُقارب لـ(C_f).

2)أ) تبيان أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإنّ، $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ثمّ استنتاج اتجاه تغيّر الدّالّة f :

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ولدينا: $f'(x) = 1 - \left(\frac{\frac{1}{x}\times x - 1\times \ln x}{x^2}\right) = \frac{x^2-1+\ln x}{x^2} = \frac{-(1-x^2-\ln x)}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$، وبالتالي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	

إذن: f **متناقصة تماما** على المجال $]0;1]$، وَ**متزايدة تماما** على المجال $[1;+\infty[$.

ب) تشكيل جدول تغيرات الدّالّة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3)أ) تبيان أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y = x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f):

نُبين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = 0$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}\right) = 0$ ، **لأنّ:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

ومنه: المستقيم $(D): y = x-1$ مُقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D): (ندرس إشارة الفرق $[f(x)-(x-1)]$)

لدينا: $f(x)-(x-1) = \frac{-\ln x}{x}$،

ومنه: إشارة الفرق $[f(x)-(x-1)]$ **عكس إشارة $(\ln x)$ على المجال $]0;+\infty[$**، وبالتالي:

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	-	0	+	
$f(x)-(x-1)$	‖	+	0	-	
الوضع النسبي	‖	يقع (C_f) **فوق** (D)	(C_f) **يقطع** (D)	يقع (C_f) **تحت** (D)	

4)تعيين فاصلة النقطة A من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) مُوازيا للمستقيم (D) ثمّ كتابة معادلة للمماس (T):

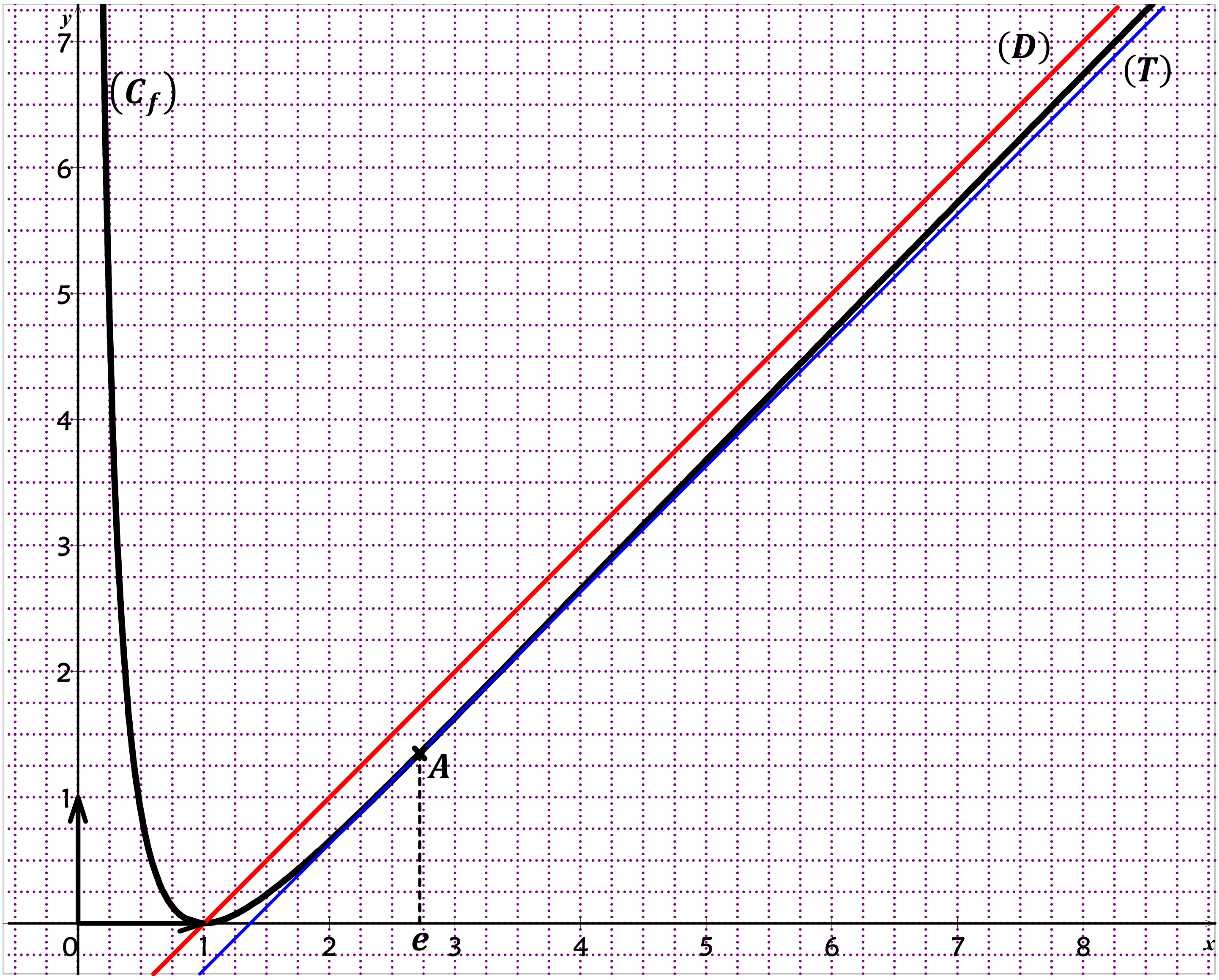
$(T)//(D)$ معناه: $f'(x) = 1$ ومنه: $\frac{-g(x)}{x^2} = 1$ أي: $-g(x) = x^2$ وعليه: $\ln x = 1$ إذن: $\boxed{x = e = x_A}$.

- معادلة (T) من الشكل: $y = f'(x_A)(x-x_A) + \underbrace{f(x_A)}_{y_A}$

ولدينا: $\begin{cases} f'(x_A) = f'(e) = 1 \\ f(x_A) = f(e) = e - 1 - \frac{\ln e}{e} = e - 1 - \frac{1}{e} \end{cases}$،

بالتعويض نجد: $y = 1(x - e) + e - 1 - \frac{1}{e}$ ومنه: $\boxed{(T): y = x - 1 - \frac{1}{e}}$.

5) رسم (D)، (T) و (C_f):



6) حساب القيمة المتوسطة للدّالة f على المجال $[1; 3]$:

القيمة المتوسطة للدّالة f على المجال $[1; 3]$ هي العدد m والمعرف كما يلي:

$$m = \frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}(3)^2 - 3 - \frac{(\ln 3)^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2 - 1 - \frac{(\ln 1)^2}{2}\right)\right]$$

ومنه: $\boxed{m = 1 - \frac{(\ln 3)^2}{4}}$.

حل التمرين 09: (09 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I) لدينا: $D_f =]-1; +\infty[$، وَ $f(x) = ax + b + 3\ln(x+1)$، حيث a و b عددان حقيقيان.

(Γ) التمثيل البياني للدّالة f، يقبل في النقطة $A(2; -1 + 3\ln 3)$ مماساً **مُوازياً لحامل محور الفواصل**

معناه: $f'(2) = 0$ وَ $f(2) = -1 + 3\ln 3$.

1) بقراءة بيانية:

أ) وضع تخمين حول $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$:

من البيان: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ ؛ $\boxed{\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty}$.

ب) تشكيل جدول تغيّرات الدّالّة f :

من البيان:

x	-1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$-1+3\ln 3$	↘	$-\infty$

2)باستعمال المعطيات المتوفرة، إيجاد قيمة كل من a و b:

- f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$، ولدينا: $\boxed{f'(x) = a + \frac{3}{x+1}}$
- ولدينا من جهة أخرى: $\begin{cases} f'(2) = 0 \\ f(2) = -1+3\ln 3 \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} a+1 = 0 \\ 2a+b+3\ln 3 = -1+3\ln 3 \end{cases}$

ومنه: $\boxed{a=-1}$ وَ $\boxed{b=1}$.

إذن: $f(x) = -x+1+3\ln(x+1)$ وَ $f'(x) = -1+\frac{3}{x+1}$.

II)باعتبار في هذا الجزء: $f(x) = -x+1+3\ln(x+1)$.

1)حساب نهاية الدّالّة f عند (-1) بقيم أكبر:

لدينا: $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$ ، لأنّ: $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \ln(x+1) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \ln y = -\infty$.

2)حساب نهاية الدّالّة f عند $+\infty$: (علما أنّ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$)

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x\left(-1+\frac{1}{x}+3\frac{\ln(x+1)}{x}\right)\right] = -\infty$ ، لأنّ: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$.

3)أ) تعيين النقطة B من المنحنى (Γ) التي يكون فيها المماس (T) للمنحنى (Γ) موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = x$، ثم كتابة معادلة للمماس (T):

المماس (T) للمنحنى (Γ) موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = 1x$، معناه: $f'(x) = 1$

أي: $-1+\frac{3}{x+1} = 1$

ومنه: $x = \frac{1}{2}$

إذن: $B\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ أي: $\boxed{B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}+3\ln\frac{3}{2}\right)}$ (لأنّ: $B \in (\Gamma)$)

كتابة معادلة للمماس (T):

(T) مماس للمنحنى (Γ) في النقطة B.

معادلة (T) من الشكل: $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

ولدينا: $\begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}+3\ln\frac{3}{2} \end{cases}$، بالتعويض نجد: $y = 1\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}+3\ln\frac{3}{2}$؛ ومنه: $\boxed{(T): y = x+3\ln\frac{3}{2}}$.

ب) استنتاج بيانياً، قيم العدد الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = x + m$ حلين موجبين تماماً:

المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلين موجبين تماماً من أجل $1 < m < 3\ln\frac{3}{2}$.

4)لدينا: $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$ وَ $D_g =]-1; +\infty[$.

أ) حساب $g'(x)$؛ ثمّ استنتاج دالة أصلية للدّالة f على المجال $]-1; +\infty[$:

g **قابلة للاشتقاق** على $]-1; +\infty[$، ولدينا:

$$g'(x) = \left[1\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \times (x+1)\right] - 1 = \ln(x+1)$$

استنتاج دالة أصلية للدّالة f على المجال $]-1 ; +\infty[$:

بمأنّ: g أصلية للدّالة $x \mapsto \ln(x+1)$ على المجال $]-1 ; +\infty[$،

فإنّ: الدّالة $F: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + x + 3g(x)$ أصلية لـ f على المجال $]-1 ; +\infty[$.

$$\left(F(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3(x+1)\ln(x+1)\right)$$

ب) α و β فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى (Γ) مع حامل محور الفواصل، معناه: $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

تبيان أنّ $\alpha \in]7,37; 7,38[$ و $\beta \in]-0,37; -0,36[$:

بالنسبة لـ α:

- f **مستمرة** و**متناقصة تماما** على المجال $]7,37; 7,38[$ (لأنّها **متناقصة تماما** على $[2; +\infty[$)
- ولدينا: $\begin{cases} f(7,37) \simeq 0,003 \\ f(7,38) \simeq -0,002 \end{cases}$ أي: $f(7,37) \times f(7,38) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]7,37; 7,38[$.

بالنسبة لـ β:

- f **مستمرة** و**متزايدة تماما** على المجال $]-0,37; -0,36[$ (لأنّها **متزايدة تماما** على $]-1; 2]$)
- ولدينا: $\begin{cases} f(-0,37) \simeq -0,01 \\ f(-0,36) \simeq 0,02 \end{cases}$ أي: $f(-0,37) \times f(-0,36) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β في المجال $]-0,37; -0,36[$.

جـ) حساب S مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (Γ) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما $x = 0$، $x = \alpha$:

لدينا: $S = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = [F(x)]_0^{\alpha} = F(\alpha) - F(0) = F(\alpha)$،

ومنه: $\boxed{S = \left(-\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + 3(\alpha+1)\ln(\alpha+1)\right)ua}$.

د) التحقق أنّ $S = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha - 1\right)ua$؛ ثمّ تعيين حصراً لـ S: (ua وحدة مساحة)

بمأنّ: $f(\alpha) = 0$ فإنّ: $\ln(\alpha+1) = \frac{\alpha-1}{3}$، وبالتعويض نجد:

$$S = \left(-\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + 3(\alpha+1)\left(\frac{\alpha-1}{3}\right)\right)ua = \left(-\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + \alpha^2 - 1\right)ua = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha - 1\right)ua$$

تعيين حصراً لـ S:

لدينا: $7,37 < \alpha < 7,38$، ومنه: $\begin{cases} \frac{(7,37)^2}{2} < \frac{1}{2}\alpha^2 < \frac{(7,38)^2}{2} \\ -2(7,38) - 1 < -2\alpha - 1 < -2(7,37) - 1 \end{cases}$

ويكون: $\boxed{11,39845 < S < 11,49220}$.

III)تنتج إحدى الورشات في اليوم الواحد 7 آلاف قطعة على الأكثر.

تُنمذج الكلفة الهامشية C_m (الوحدة 1000 دينار) لإنتاج قطعة إضافية على المجال $[0;7]$ بالدّالة f المعرفة في الجزء **(II**، أي من أجل $x \in [0;7]$ لدينا $C_m(x) = f(x)$.

نرمز بــ$C_T(x)$ إلى الكلفة الإجمالية لإنتاج x قطعة.

1)تعيين عبارة الكلفة الإجمالية $C_T(x)$ علماً أن الكلفة الإجمالية لإنتاج الألف قطعة الأولى هي $\frac{5}{2}$:

نعلم أنّ الكلفة الإجمالية C_T أصلية للكلفة الهاشمية C_m، وبمأنّ F أصلية لـ f

فإنّ: $C_T(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3(x+1)\ln(x+1) + c$ (حيث $c \in \mathbb{R}$)، مع $C_T(1) = \frac{5}{2}$

ومنه: $-\frac{1}{2} - 2 + 3(2)\ln 2 + c = \frac{5}{2}$

وعليه: $c = 5 - 6\ln 2$، إذن: $\boxed{C_T(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3(x+1)\ln(x+1) + 5 - 6\ln 2}$

2)تقدير قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 7 آلاف قطعة:

بالتعويض نجد: $C_T(7) = -\frac{1}{2}(7)^2 - 2(7) + 3(8)\ln(8) + 5 - 6\ln 2 \simeq 12{,}248$

إذن: قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 7 آلاف قطعة هي 12,248 ألف دينار.

حل التمرين 10: (07,5 نقطة) بكالوريا 2016// الموضوع 01// الشعبة: تسيير وإ.

I)لدينا: $D_g =]0;+\infty[$ وَ $g(x) = ax + b + \ln x$، حيث a و b عددان حقيقيان.

1)تعيين a و b بحيث، $g(1) = 2$ وَ $g'(2) = \frac{3}{2}$:

g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ولدينا: $g'(x) = a + \frac{1}{x}$.

$\begin{cases} g(1) = 2 \\ g'(2) = \frac{3}{2} \end{cases}$ أي: $\begin{cases} a + b = 2 \\ a + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$ ومنه: $\boxed{a = b = 1}$، إذن: $g(x) = x + 1 + \ln x$ وَ $g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

2)بوضع: $g(x) = x + 1 + \ln x$.

أ-حساب $\lim\limits_{x \to 0^{>}} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$:

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^{>}} g(x) = -\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{x \to 0^{>}} \ln x = -\infty$.
- ولدينا: $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$.

ب-دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g ثم تشكيل جدول تغيّراتها:

g **قابلة للاشتقاق** على $]0;+\infty[$، ولدينا: $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$.

ومنه: g **متزايدة تماما** على $]0;+\infty[$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$ - -	0 + + +	$+\infty$

جـ-تبيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً حقيقيا وحيداً α حيث، $0{,}2 < \alpha < 0{,}3$:

- g **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]0{,}2;0{,}3[$ (لأنّها **متزايدة تماما على** $]0;+\infty[$)

▪ ولدينا: $\begin{cases} g(0,2) \simeq -0,41 \\ g(0,3) \simeq 0,10 \end{cases}$ أي: $g(0,2) \times g(0,3) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث، $0,2 < \alpha < 0,3$.

د-تحديد تبعا لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

بمأنّ: g **متزايدة تماما** على $]0; +\infty[$، وَ $g(\alpha) = 0$ فإنّ:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

II) لدينا: $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$ وَ $D_f =]0; +\infty[$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) تبيان أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f:

f **قابلة للاشتقاق** على $]0; +\infty[$، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{\left((1 \ln x)+\left(\frac{1}{x}\times x\right)\right)(x+1)-1(x \ln x)}{(x+1)^2} = \frac{(1+\ln x)(x+1)-x \ln x}{(x+1)^2} = \frac{x+1+x\ln x+\ln x-x \ln x}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $g(x)$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

إذن: f **متناقصة تماما** على $]0; \alpha]$؛ و**متزايدة تماما** على المجال $[\alpha; +\infty[$.

2) حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$: (علما أنّ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x = 0$)

▪ لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0}$، لأنّ: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x = 0$ وَ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}(x+1) = 1$.

▪ ولدينا: $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}} = +\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

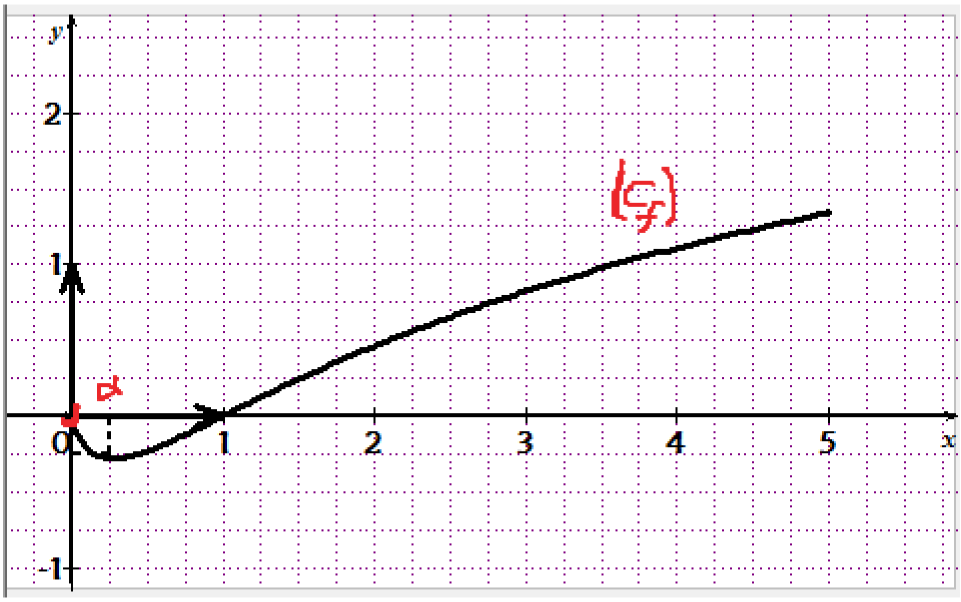
3) التحقق أنّ $f(\alpha) = -\alpha$ ثم تشكيل جدول تغيّرات الدّالّة f:

لدينا: $\ln \alpha = -(\alpha + 1)$ لأنّ: $g(\alpha) = 0$ ومنه: $f(\alpha) = \frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha+1} = \frac{-\alpha(\alpha+1)}{\alpha+1} = -\alpha$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-\alpha$	↗	$+\infty$

4) حساب $f(1)$ و $f(5)$ ثمّ رسم (C_f) على المجال $]0; 5]$:

بالتعويض نجد: $f(1) = 0$ وَ $f(5) = \frac{5 \ln 5}{6}$.



حل التمرين 11: (07 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I) لدينا: $g(x) = -4 + 2x(1 + \ln x)$ وَ $D_f =]0; +\infty[$.

1) حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$: (علما أنّ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x = 0$)

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (-4 + 2x + 2x \ln x) = -4}$، لأنّ: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x = 0$ وَ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} 2x = 0$.
- ولدينا: $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \ln x) = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$.

2) دراسة اتجاه تغيّر الدّالّة g على المجال $]0; +\infty[$ ثم تشكيل جدول تغيّراتها:

g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$، ولدينا:

$$g'(x) = 2(1 + \ln x) + \left(\frac{1}{x} \times 2x\right) = 2[(1 + \ln x) + 1] = 2(\ln x + 2)$$

ومنه: إشارة $g'(x)$ من إشارة $(\ln x + 2)$

نضع: $\ln x + 2 = 0$ نجد: $\ln x = -2$ ومنه: $x = e^{-2}$

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	0	+	

إذن: g متناقصة تماما على $]0; e^{-2}]$؛ ومتزايدة تماما على المجال $[e^{-2}; +\infty[$.

تشكيل جدول تغيّراتها:

x	0		e^{-2}		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+		+	
$f(x)$	‖ -4	↘	$-4 - 2e^{-2}$	↗	0	↗	$+\infty$

3) تبيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1,4 < \alpha < 1,5$:

- g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1,4; 1,5[$ (لأنّها متزايدة تماما على $[e^{-2}; +\infty[$)
- ولدينا: $\begin{cases} g(1,4) \simeq -0,26 \\ g(1,5) \simeq 0,22 \end{cases}$ أي: $g(1,4) \times g(1,5) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث، $1,4 < \alpha < 1,5$.

4) تحديد إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	-	0	+	

II) لدينا: $f(x)=(2x-4)\ln x$ وَ $D_f=]0;+\infty[$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ-حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$:

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x=-\infty$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(2x-4)=-4$.

تفسير ها الهندسي:

حامل محور التراتيب مقارب لـ(C_f).

ب-حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4)=+\infty$.

2) أ-تبيان أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$:

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x)=2(\ln x)+\left(\frac{1}{x}\times(2x-4)\right)=\frac{2x\ln x+2x-4}{x}=\frac{-4+2x(1+\ln x)}{x}=\frac{g(x)}{x}$$

ب-استنتاج اتجاه تغيّر الدّالّة f ثم تشكيل جدول تغيّراتها:

لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	

إذن: f **متناقصة تماما** على $]0;\alpha]$؛ و**متزايدة تماما** على المجال $[\alpha;+\infty[$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) تعيين نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل: (نحل المعادلة $f(x)=0$ في المجال $]0;+\infty[$)

$f(x)=0$ معناه: $(2x-4)\ln x=0$

ومنه: $2x-4=0$ أو $\ln x=0$

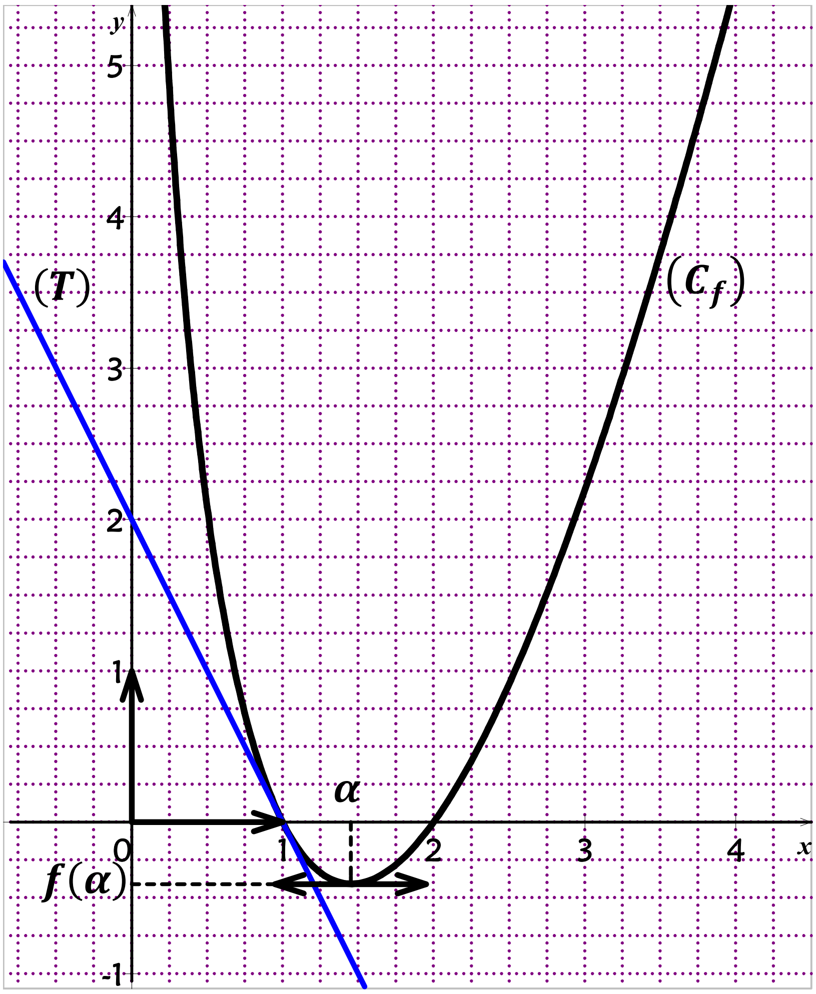
وعليه: $\boxed{x=2}$ أو $\boxed{x=1}$، إذن: $\boxed{(C_f)\cap(xx')=\{A(1;0);B(2;0)\}}$.

4) أ-كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

معادلة (T) من الشكل: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(1)=g(1)=-2\\ f(1)=y_A=0\end{cases}$، إذن: $\boxed{(T):y=-2x+2}$.

ب-إنشاء (T) و (C_f): (علما أنّ $f(\alpha) \simeq -0,41$)



5) لدينا: الدّالة F المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $F(x) = (x^2-4x)\ln x - \frac{1}{2}x^2 + 4x$.

أ-تبيان أنّ F دّالة أصلية للدّالة f على المجال $]0;+\infty[$:

F قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ولدينا: $F'(x) = (2x-4)(\ln x) + \left(\frac{1}{x} \times (x^2-4x)\right) - x + 4$

ومنه: $F'(x) = (2x-4)(\ln x) + x - 4 - x + 4 = (2x-4)(\ln x) = f(x)$

إذن: F دّالة أصلية للدّالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب-حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$، $x=1$ و $x=2$:

لتكن مساحة الحيز هي A نجد: $A = \int_1^2 -f(x)\,dx = -[F(x)]_1^2 = -[F(2)-F(1)]$

ومنه: $A = -\left[(-4\ln 2 + 6) - \frac{9}{2}\right] = -\frac{3}{2} + 4\ln 2\; ua$

حل التمرين 12: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 01// الشعبة: تسيير وا.

I) لدينا: $g(x) = x^2 + 3\ln x - 3$ وَ $D_g =]0;+\infty[$.

1) دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g:

g **قابلة للاشتقاق على** $]0;+\infty[$، ولدينا: $\boxed{g'(x) = 2x + \frac{3}{x} > 0}$.

ومنه: g **متزايدة تماما على** $]0;+\infty[$.

2) تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث، $1,40 < \alpha < 1,41$:

- g **مستمرة ومتزايدة تماما على المجال** $]1,40;1,41[$ (لأنّها **متزايدة تماما على** $]0;+\infty[$)

- ولدينا: $\begin{cases} g(1{,}40) \simeq -0{,}03 \\ g(1{,}41) \simeq 0{,}02 \end{cases}$ أي: $g(1{,}40) \times g(1{,}41) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث، $1{,}40 < \alpha < 1{,}41$.

استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x:

بمأنّ: g **متزايدة تماما** على $]0; +\infty[$، وَ $g(\alpha) = 0$ فإنّ:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

II) لدينا: $f(x) = x + 1 - \frac{3\ln x}{x}$ وَ $D_f =]0; +\infty[$.

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أ) حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$:

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$.

تفسيرها بيانيا: حامل محور التراتيب مقارب لـ (C_f).

ب) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1) = +\infty$.

2) تبيان أنّ من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب تماماً، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$:

f **قابلة للاشتقاق** على $]0; +\infty[$، ولدينا:

$$f'(x) = 1 - 3\frac{\left(\left(\frac{1}{x} \times x\right) - (1\ln x)\right)}{x^2} = 1 - 3\frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 3 + 3\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

3) استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f ثم تشكّيل جدول تغيّراتها:

بمأنّ: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$، فإنّ: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $g(x)$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

إذن: f **متناقصة تماما** على $]0; \alpha]$؛ و**متزايدة تماما** على المجال $[\alpha; +\infty[$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) أ) تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f):

نُبين أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - y] = 0$.

لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{3\ln x}{x}\right) = 0$ ، لأنّ: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

إذن: المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

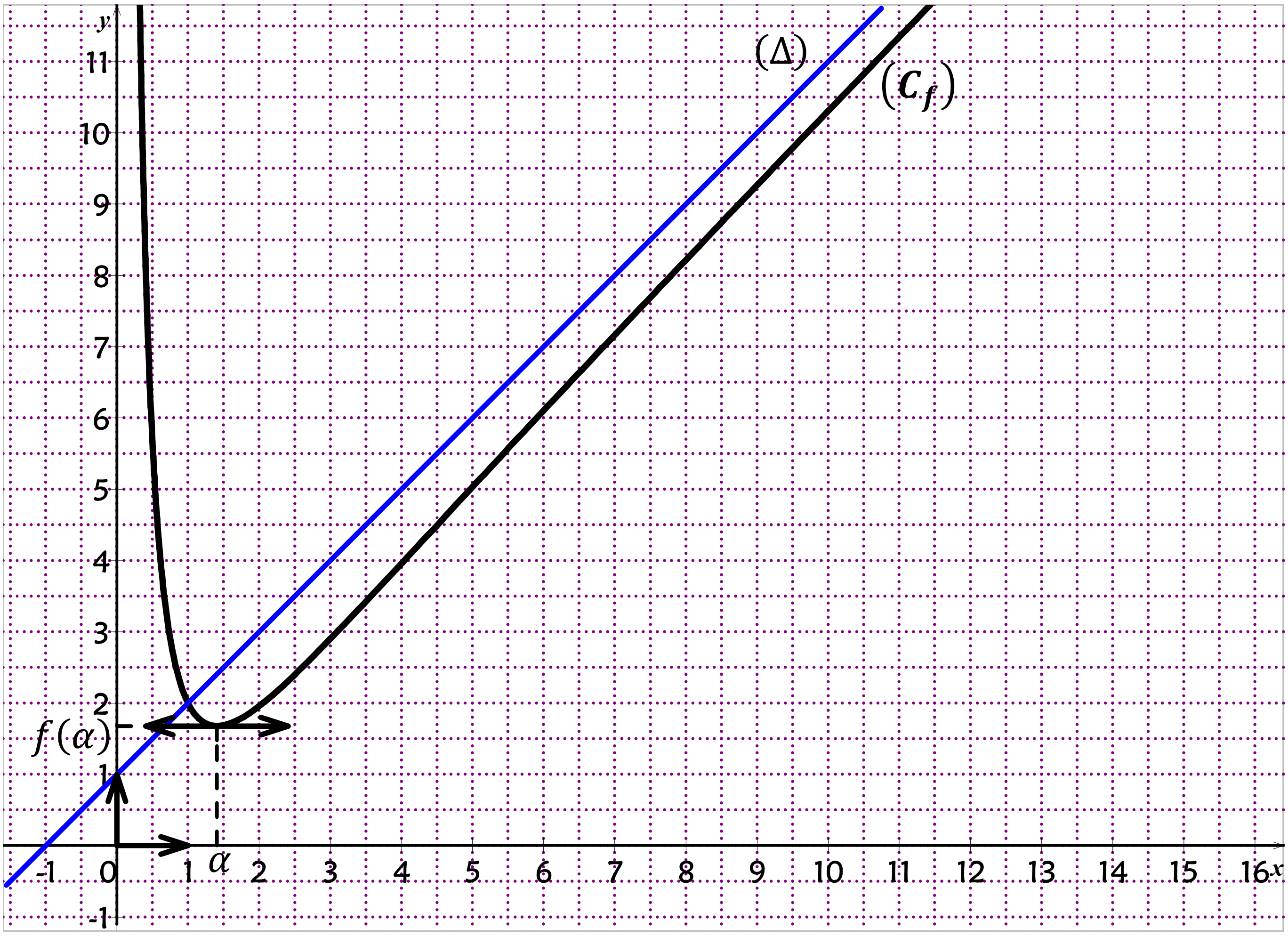
ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ): (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)

لدينا: $f(x) - y = \frac{3(-\ln x)}{x}$،

ومنه: إشارة الفرق $[f(x) - y]$ من إشارة $(-\ln x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	[redacted]	-	0	+	
$f(x) - y$	[redacted]	+	0	-	
الوضع النسبي	[redacted]	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	

5)إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f): (علما أنّ $f(\alpha) \simeq 1,68$)



6)أ) تبيان أنّ الدّالة h حيث $h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ أصلية للدّالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$:

h قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$، ولدينا: $h'(x) = \frac{1}{3}(2)\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x) = \frac{\ln x}{x}$.

إذن: الدّالة h حيث $h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ أصلية للدّالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب) حساب S مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = 1$، $x = e$ و $y = x + 1$:

لتكن مساحة الحيز هي A نجد: $A = \int_1^e [y - f(x)]\, dx = 3\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = 3[h(x)]_1^e = \frac{3}{2} ua$.

التمرين 13: (08 نقاط) بكالوريا 2018// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x) = \ln(x+2) + \ln(-x+8) - \ln 16$ وَ $D_f =]-2; 8[$.

و (C_f) منحنى الدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

ملاحظة: الوحدة البيانية: $2cm$.

1) حساب نهايتي الدّالة f عند طرفي مجموعة التعريف $]-2; 8[$:

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = -\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \ln(x+2) = \lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ >}} \ln y = -\infty$.
- ولدينا: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 8 \\ <}} f(x) = -\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x \to 8 \\ <}} \ln(-x+8) = \lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ >}} \ln y = -\infty$.

تفسير النتيجتين بيانيا:

المستقيمان اللّذان معادلتاهما $\boxed{x = -2}$ وَ $\boxed{x = 8}$ على الترتيب (الموازيان لحامل محور التراتيب) مستقيمان مقاربان لـ (C_f).

2) التحقق أنّه من أجل كلّ x من $]-2; 8[$، $f'(x) = \frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$:

f **قابلة للاشتقاق** على $]-2; 8[$، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{-1}{-x+8} = \frac{1(-x+8) - 1(x+2)}{(x+2)(-x+8)} = \frac{-x+8-x-2}{(x+2)(-x+8)} = \frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$$ (وهو المطلوب)

3) دراسة إشارة $f'(x)$ على المجال $]-2; 8[$ وتشكيل جدول تغيّرات الدّالة f :

لدينا: $f'(x) = \frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$، ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(-2x+6)$

(**لأنّ:** $x + 2 > 0$ وَ $-x + 8 > 0$ على المجال $]-2; 8[$) ما بعد $\ln$ موجب تماما تذكروا

نضع: $-2x + 6 = 0$ نجد: $x = 3$ ومنه:

x	-2		3		8
$-2x+6$	‖	+	0	-	‖
$f'(x)$	‖	+	0	-	‖

إذن: f **متزايدة تماما** على $]-2; 3]$؛ و**متناقصة تماما** على المجال $[3; 8[$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	-2		3		8
$f'(x)$	‖	+	0	-	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$2\ln\frac{5}{4}$	↘	$-\infty$ ‖

4) تعيين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات:

- **تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور التراتيب: (نحسب $f(0)$)**

لدينا: $f(0) = \ln 2 + \ln 8 - \ln 16 = \ln 2 + 3\ln 2 - 4\ln 2 = 0$،

إذن: $\boxed{(C_f) \cap (yy') = \{O(0; 0)\}}$.

- **تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل: (نحل المعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]-2; 8[$)**

لدينا: $f(x) = 0$ معناه: $\ln(x+2) + \ln(-x+8) = \ln 16$

ومنه: $\ln(x+2)(-x+8) = \ln 16$

وعليه: $(x+2)(-x+8) = 16$

ويكون: $x(-x+6) = 0$

وبالتالي: $\boxed{x=0}$ وَ $\boxed{x=6}$، إذن: $\boxed{(C_f) \cap (xx') = \{O(0;0); A(6;0)\}}$.

5) تبيان أنّه من أجل كل x من المجال $]-2;8[$، $(6-x)$ ينتمي إلى $]-2;8[$ و $f(6-x) = f(x)$،

لدينا: $x \in]-2;8[$ أي: $-2 < x < 8$

ومنه: $-8 < -x < 2$ وعليه: $-2 < 6-x < 8$ أي: $(6-x) \in]-2;8[$

ولدينا: $f(6-x) = \ln[(6-x)+2] + \ln[-(6-x)+8] - \ln 16$

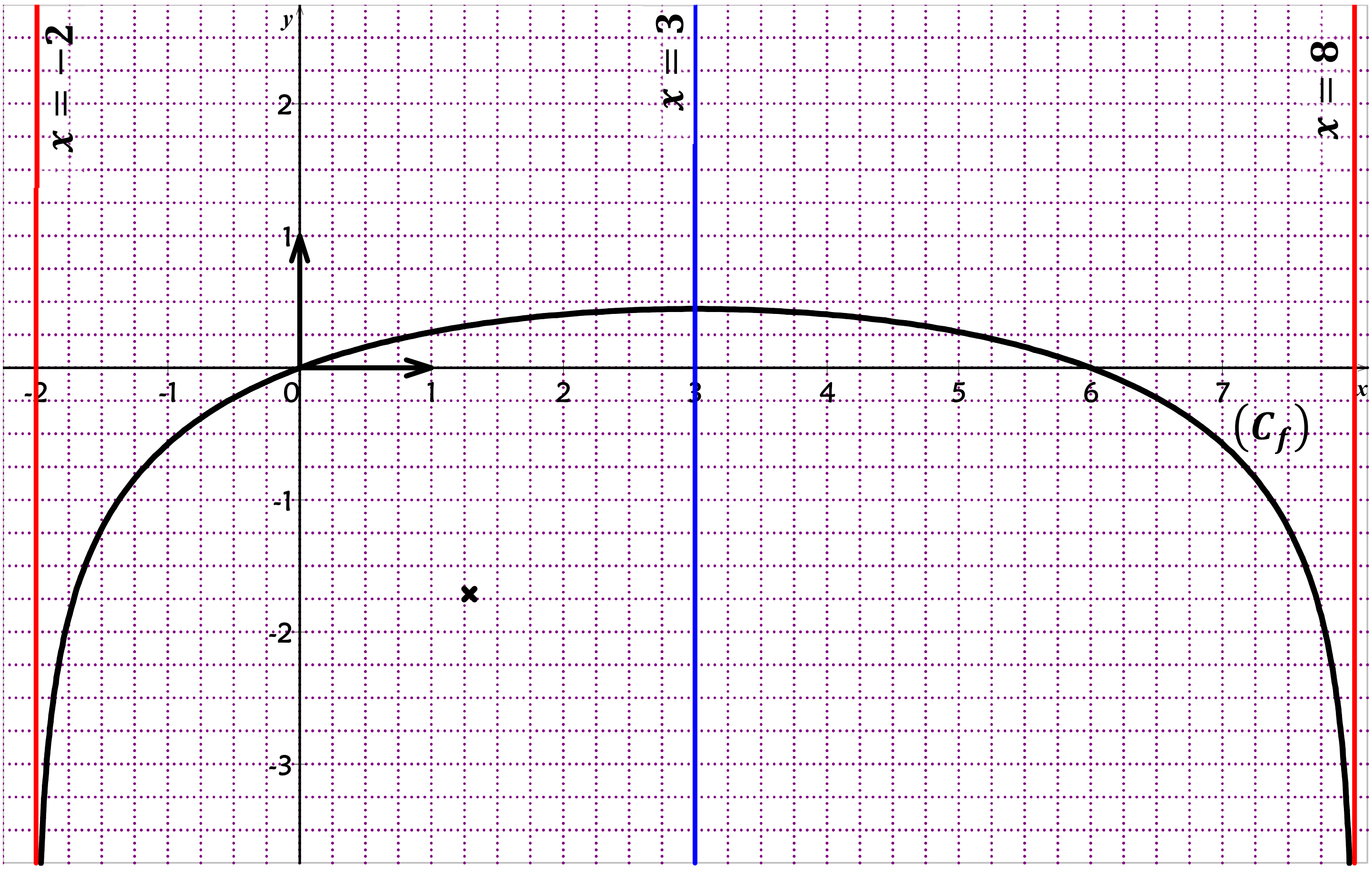
ومنه: $f(6-x) = \ln(-x+8) + \ln(x+2) - \ln 16 = f(x)$.

تفسير النتيجة بيانياً:

لدينا: $f(6-x) = f(x)$ أي: $f(6-x) - f(x) = 0$ من الشكل $f(2\alpha - x) - f(x) = 0$ حيث $\alpha = 3$،

إذن: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x=3}$ هو محور تناظر لـ (C_f).

6) رسم المنحنى (C_f):



7) لدينا: $F(x) = (x+2)\ln(x+2) + (x-8)\ln(-x+8) - 2x - x\ln 16$ وَ $D_F =]-2;8[$.

تبيان أنّ F دّالة أصلية لـ f على المجال $]-2;8[$:

F قابلة للاشتقاق على $]-2;8[$، ولدينا:

$$F'(x) = \left[1 \times \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} \times (x+2)\right] + \left[1 \times \ln(-x+8) + \frac{(-1)}{-x+8} \times (x-8)\right] - 2 - \ln 16$$

ومنه: $F'(x) = \ln(x+2) + 1 + \ln(-x+8) + 1 - 2 - \ln 16 = f(x)$

وبالتالي: F دّالة أصلية لـ f على المجال $]-2;8[$.

8)حساب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى $\left(C_f\right)$ والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ ،
$x = 0$ وَ $x = 4$:

لتكن مساحية الحيز هي A **ومنه:**

$$A = \int_0^4 f(x)\,dx \times 4cm^2 = [F(x)]_0^4 \times 4cm^2 = [F(4) - F(0)] \times 4cm^2$$

ويكون: $\boxed{A = 4(6\ln 6 - 2\ln 2 - 8)cm^2}$.