

الواجب المنزلي رقم ①

◆ التمرين 01:

احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1} \right) \quad ③ \qquad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4 - x^2}{x - 2} \right) \quad ② \qquad \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x}}{1 - x} \right) \quad ①$$

◆ التمرين 02:

عيّن النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 2\sqrt{x} + 1}{x - 1} \right) \quad ③ \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x + 1}}{(x - 3)^2} \right) \quad ② \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x - 1}} \right) \quad ①$$

◆ التمرين 03:

برهن أن المنحنى الممثل للدالة f على المجال I يقبل مستقيما مقاربا أفقيا أو عموديا في الحالات التالية:

$$I =]-\infty; -2[\quad , \quad f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + x - 2} \quad ② \qquad I =]2; +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{1}{x - 2} \quad ①$$

◆ التمرين 04:

برهن أن المستقيم (D) مقارب للمنحنى (C_f) ، ثم أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (D) :

$$D: y = x \quad , \quad I =]2; +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \quad ①$$

$$D: y = x - 1 \quad , \quad I =]-\infty; -1[\quad , \quad f(x) = \frac{x^2}{x + 1} \quad ②$$

◆ التمرين 06:

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \quad , \quad \text{وليكن } (C_f) \text{ تمثيلها البياني في مستوى } (O; \vec{i}, \vec{j}).$$

- ① ادرس تغيرات الدالة f ، ثم أنجز جدول التغيرات.
- ② عين احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات.
- ③ برهن أن النقطة $\omega(-1; -2)$ مركز تناظر لـ (C_f) .
- ④ عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω .
- ⑤ مثل بيانيا كل من (T) و (C_f) .
- ⑥ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^3 + 3x^2 - 4 - m = 0$.

◆ التمرين 05:

 f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x + 1}$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوى $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- ① عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
- ② اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

حيث: a, b, c أعدادا حقيقية يطلب تعيينها.

- ③ استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .
- ④ حدد الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم المقارب المائل.
- ⑤ مثل بيانيا في المعلم السابق المستقيمات المقاربة، والمنحنى (C_f) .

• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •

◆ التمرين 01:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1} \right) = \frac{0^2 + 0}{|0^2 - 1| + 1} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4 - x^2}{x - 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(2 - x)(2 + x)}{x - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-(x - 2)(2 + x)}{x - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (-(2 + x)) \\ &= -(2 + 2) = \boxed{-4} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x}}{1 - x} \right) = \frac{\sqrt{4}}{1 - 4} = \frac{2}{-3} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

◆ التمرين 02:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 2\sqrt{x} + 1}{x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x^2 - 2\sqrt{x} + 1)(x^2 + 2\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(x^2 + 2\sqrt{x} + 1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^4 + 2x^2 - 4x + 1}{(x - 1)(x^2 + 2\sqrt{x} + 1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x - 1)(x^3 + x^2 + 3x - 1)}{(x - 1)(x^2 + 2\sqrt{x} + 1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 + x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2\sqrt{x} + 1} \right) = \frac{4}{4} = \boxed{1} \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2} \right) = \boxed{+\infty}$$

لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 3} ((x-3)^2) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{0^+} \right) = +\infty$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} \right) = \boxed{+\infty}$$

لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x-1}) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{0^+} \right) = +\infty$$

◆ التمرين 03:

② لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 + x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 + x - 2} \right) = +\infty$$

ومنه منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$
معادلته $y = 1$

وأخر مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = -2$

① لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} \right) = +\infty$$

ومنه منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي
بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$

وأخر مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 2$

◆ التمرين 04:

① لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 1 - x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-1}{x} \right) = 0$$

ومنه منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية: لدينا:

$$f(x) - y = \frac{x^2 - 1}{x} - x = \frac{x^2 - 1 - x^2}{x} = \frac{-1}{x}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-	
الوضعية	(C _f) فوق (D)		(C _f) تحت (D)	

ومنه (C_f) يقع تحت (D) في المجال I

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - (x-1) \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - (x-1)(x+1)}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + 1}{x+1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

ومنه منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x - 1$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية: لدينا:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \frac{1}{x+1} = 0 \Rightarrow x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	-		+
الوضعية	(D) تحت (C_f)		(D) فوق (C_f)

ومنه (C_f) تحت (D) في المجال I

◆ التمرين 05:

① تعيين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x+1} \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^2 + x - 3}{0^-} \right) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0^- \text{ لأن:}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x+1} \right) = -\infty$$

② اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 نجد: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1) + c}{x+1} = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1} = \frac{ax^2 + x(a+b) + b+c}{x+1}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 1 \\ b + c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases}$$

• استنتاج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f):

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x+1} \right) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x+1} \right) = +\infty$$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته: $x = -1$

ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - \frac{3}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{3}{x+1} \right) = 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = x$.

③ تحديد الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب المائل:

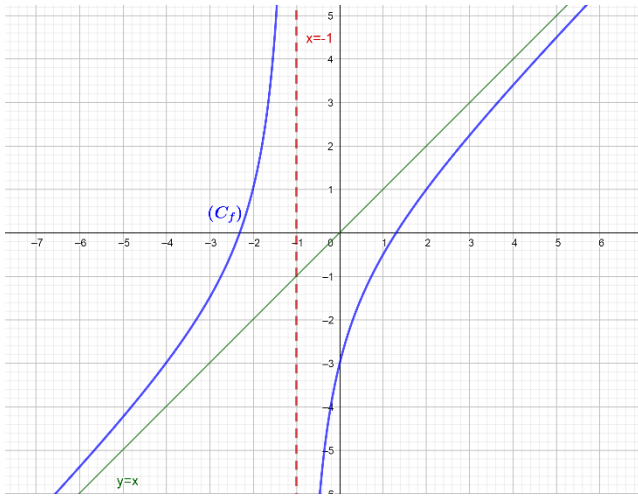
لدينا:

$$f(x) - x = \frac{-3}{x+1} \Rightarrow f(x) - x = \frac{3}{-x-1} \Rightarrow -x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-
الوضعية	(D) فوق (C_f)		(D) تحت (C_f)

④ التمثيل البياني:



لتمثيل المنحنى البياني نتبع الخطوات التالية:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة: $x = -1$
- نرسم المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة: $y = x$
- باستعمال جدول الوضع النسبي والنهايات نمثل المنحنى (C_f).

◆ التمرين 06:

① دراسة تغيرات الدالة f ، ثم انجاز جدول التغيرات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

- تعيين النهايات:

- تعيين $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ \text{أو} \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = -2 \end{cases}$$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	-4	$+\infty$

② تعيين احداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الاحداثيات:

- مع محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

لدينا:

$$f(1) = 1^3 + 3(1)^2 - 4 = 0$$

نلاحظ أن 1 حل للمعادلة $f(x) = 0$ ، ومنه لحل المعادلة نستعمل طريقة المطابقة أو القسمة الاقليدية:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow f(x) = (x - 1)(x^2 + ax + b) \Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + bx - x^2 - ax - b$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + (a - 1)x^2 + (b - a)x - b$$

$$\begin{cases} a - 1 = 3 \\ b - a = 0 \\ -b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases} \text{ بالمطابقة نجد:}$$

ومنه: $f(x) = (x - 1)(x^2 + 4x + 4)$ إذن:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{أو} \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

لدينا: $x - 1 = 0$ ومنه: $x = 1$

ولدينا: $x^2 + 4x + 4 = 0$ لحلها نستعمل المميز Δ :

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(4) = 0$$

ومنه المعادلة السابقة تقبل جذر مضاعف هو $x = -\frac{4}{2}$ أي $x = -2$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي: $s = \{1; -2\}$ وهي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل.

- مع محور الترتيب:

$$f(0) = 0^3 + 3(0)^2 - 4 = -4$$

إذن (C_f) يقطع محور الترتيب في النقطة ذات الاحداثيات $(0; -4)$

③ برهان أن النقطة $\omega(-1; -2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :

$$\text{لدينا: } x \in \mathbb{R} \text{ ومنه: } (-x) \in \mathbb{R} \text{ إذن } \left(\frac{2(-1) - x}{2\alpha - x} \right) \in \mathbb{R}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(2(-1) - x) + f(x) &= (-2 - x)^3 + 3(-2 - x)^2 - 4 + x^3 + 3x^2 - 4 \\ &= -(-2 - x)^2(2 + x) + 3(2 + x)^2 - 8 + x^3 + 3x^2 \\ &= -(4 + x^2 + 4x)(2 + x) + 12 + 3x^2 + 12x - 8 + x^3 + 3x^2 \\ &= -8 - 4x - 2x^2 - x^3 - 8x - 4x^2 + 4 + 6x^2 + 12x + x^3 \\ &= -4 = 2(-2) \end{aligned}$$

ومنه النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f) .

④ تعيين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω :

$$(T): y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

$$(T): y = (3(-1)^2 + 6(-1))(x + 1) + (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4$$

$$(T): y = -3x - 3 - 2$$

$$(T): y = -3x - 5$$

ومنه معادلة المماس (T) هي $y = -3x - 5$.

⑤ التمثيل البياني كل من (C_f) و (T) :

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نعين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الاحداثيات.
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة: $y = -3x - 5$.
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .

⑥ المناقشة البيانية:

$$\text{لدينا: } x^3 + 3x^2 - 4 - m = 0 \Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع

المستقيمات ذات المعادلة $y = m$ وعليه المناقشة أفقية:

للمعادلة حل وحيد سالب $x < -4$ أي $m < -4$ لما

المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والآخر مضاعف $x = -4$ أي $m = -4$ لما

المعادلة تقبل حلان سالبان وحل موجب $-4 < x < 0$ أي $-4 < m < 0$ لما

المعادلة تقبل حل مضاعف سالب وحل موجب $x = 0$ أي $m = 0$ لما

المعادلة تقبل حل وحيد موجب $x > 0$ أي $m > 0$ لما

• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •

