

درس : كثير الحدود

1/ الدالة كثير الحدود :

تعريف : نسمي الدالة كثير حدود كل دالة f معرفة على \mathbb{R} بمايلي :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث n عدد طبيعي و a_0, a_1, \dots, a_n أعداد حقيقية ثابتة.

2/ درجة كثير الحدود :

• كل دالة كثير حدود غير معدومة f تكتب بطريقة واحدة حيث :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ مع } a_n \neq 0$$

يسمى العدد الطبيعي n درجة كثير الحدود f ، تسمى الأعداد a_0, a_1, \dots, a_n معاملاته

3/ تساوي كثير الحدود :

- يكون كثيرا حدود ، غير معدومين، متساويين إذا و فقط إذا كانا من نفس الدرجة و كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.
- يكون كثير حدود معدوما إذا و فقط إذا كانت كل معاملاته معدومة.

4/ العمليات على كثير حدود :

i. الحساب الجبري لكثير حدود :

1. مجموع، فرق و جداء كثيرات حدود هي كثيرات حدود.
2. مركب كثيري حدود هو كثير حدود.
3. جداء كثيري حدود غير معدومين درجتاهما n و p على الترتيب هو كثير حدود درجته $(n+p)$.

ii. جذر كثير حدود :

f كثير حدود درجته اكبر من او تساوي 1 و α عدد حقيقي حيث

$$f(\alpha) = 0 \text{ يعني } \alpha \text{ جذر لكثير الحدود } f$$

4/ تحليل كثير حدود باستعمال $(x - \alpha)$:

f كثير حدود درجته اكبر من او تساوي 1 و α عدد حقيقي حيث

إذا كان $f(\alpha) = 0$ فانه يوجد كثير حدود g من اجل كل عدد حقيقي x فان

$$f(x) = (x - \alpha)g(x)$$

5/ المعادلات من الدرجة الثانية :

- تعريف : نسمي معادلة من الدرجة الثانية بمجهول x , كل معادلة تكتب من الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ حيث a, b, c اعداد حقيقية مع $a \neq 0$

- الشكل النموذجي للمعادلة من الدرجة الثانية :

ليكن $ax^2 + bx + c$ ثلاثي حدود من الدرجة الثانية ($a \neq 0$)

• يسمى العدد $b^2 - 4ac$ مميز ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ و نرمز إليه بالرمز Δ

• يسمى $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ الشكل النموذجي لثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$

- حل معادلة ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) :
باستعمال المميز Δ و الشكل النموذجي نتحصل على ثلاث حالات :

تحليل المعادلة $ax^2 + bx + c$	حلول المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)	قيمة المميز Δ	الحالات الممكنة
$a(x - x_1)(x - x_2)$	$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\Delta > 0$	
$a(x - x_1)^2$	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	$\Delta = 0$	
لا يمكن تحليل العبارة	لا توجد حلول في مجموعة الاعداد الحقيقية	$\Delta < 0$	

5/ المراجحات من الدرجة الثانية :

تعريف : نسمي مراجعة من الدرجة الثانية كل مراجعة يمكن كتابتها على شكل الموالي $ax^2 + bx + c > 0$ او $ax^2 + bx + c < 0$ حيث a, b, c اعداد حقيقية مع $a \neq 0$

• للحل مراجعة نقوم بدراسة إشارة ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ و نتحصل على ثلاث حالات ممكنة

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$																		
المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين متمايزين x_1 و x_2	المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حل مضاعف x_1																		
<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>x_1</td> <td>x_2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$ax^2 + bx + c$</td> <td>إشارة a</td> <td>إشارة 0</td> <td>إشارة $(-a)$</td> <td>إشارة a</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	إشارة a	إشارة 0	إشارة $(-a)$	إشارة a	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>x_1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$ax^2 + bx + c$</td> <td>إشارة a</td> <td>إشارة 0</td> <td>إشارة a</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	x_1	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	إشارة a	إشارة 0	إشارة a
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$															
$ax^2 + bx + c$	إشارة a	إشارة 0	إشارة $(-a)$	إشارة a															
x	$-\infty$	x_1	$+\infty$																
$ax^2 + bx + c$	إشارة a	إشارة 0	إشارة a																
$\Delta < 0$																			
المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ لا تقبل حلول من اجل كل عدد حقيقي x , إشارة $ax^2 + bx + c$ من إشارة a																			

MD-ROUCHANE

تطبيقات كثير الحدود

تطبيق 1:

هل الدوال التالية كثيرات حدود ؟ إذا كانت الإجابة بنعم حدد درجتها

$$f(x) = (\cos x)^2 + 2 \cos x + 1 ; f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+2} ; f(x) = (x+1)(x^2-2)$$

تطبيق 2:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 \text{ دالة كثير حدود معرفة بـ:}$$

1. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$

2. حل في \mathbb{R} المعادلة ذات المجهول x : $f(x) = 0$

تطبيق 3:

نعتبر الدالتين كثيري الحدود f و g المعرفتين كمايلي : $f(x) = 2x^2 - 2x$ و $g(x) = -x^2 + 3x - 7$

1. عين كثيرات الحدود التالية: $f+g$ ، $2f-3g$

2. عين كثير الحدود $f \times g$ محددًا درجته.

MD-ROUCHANE

تطبيق 4:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 \text{ دالة كثير حدود معرفة بـ:}$$

تحقق أن العدد 2 جذر لكثير الحدود f

عين كثير حدود g بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = (x-2)g(x)$

تطبيق 5:

نعتبر ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية f المعرف بـ: $f(x) = x^2 + 3x - 4$

1. عين الشكل النموذجي لـ $f(x)$

حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$(ا) x^2 + 2x = 0 \text{ (ب) } x^2 + x + 1 = 0 \text{ (ج) } x^2 - 4x + 4 = 0 \text{ (د) } x^2 + x - 6 = 0$$

حل في \mathbb{R} المتراجحات التالية:

$$(ا) 2x^2 + 4x - 6 \leq 0 \text{ (ب) } -x^2 + 10x - 25 \geq 0 \text{ (ج) } x^2 - x + 4 < 0$$