

## وقل رب زدني علما

ما يجب على الطالب أن يعرف

- 1- معنى كثير حدود.
- 2- جذر كثير حدود . تحليل كثير حدود
- 3- معادلات و متراجحات من درجة ثانية
- 4- معادلات و متراجحات مضاعفة تربيع
- 5- شكل نموذجي
- 6- معادلات و متراجحات صماء
- 7- معادلات و متراجحات وسيطية
- 8- مسائل مختلفة

رياضيات

سلسلة 2

2022-2021

مستوى

ر 2 - ع 2

إعداد الأستاذ

مراد حسن

## دوال كثيرات حدود



قال رسول الله  
صلى الله عليه و سلم

إن في الجنة بابا يقال له  
الريان يدخل منه الصائمون  
يوم القيامة لا يدخل منه أحد  
غيرهم يقال أين الصائمون  
فيقومون لا يدخل منه أحد  
غيرهم فإذا دخلوا أغلق  
فلج يدخل منه أحد

قال الإمام أحمد

الناس إلى العلم  
أخرج منهم إلى الطعام  
والشراب ؛ لأن الرجل يحتاج  
إلى الطعام والشراب في اليوم  
مرة أو مرتين  
وحاجته إلى العلم بعدد  
أنفاسه.

هل تعلم ؟

إذا حفظت في 3 أيام  
آيات من قرآن كريم  
فإنك ستحفظ قرآن كله  
في مدة 5 سنوات و 10  
أشهر و 13 يوما

6/1

دالة كثير حدود هي كل دالة من شكل :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- n : عدد طبيعي يسمى درجة كثير حدود.
- $a_n, \dots, a_1, a_0$  : اعداد حقيقية ثابتة تسمى معاملات كثير حدود.

معنى  
كثير حدود

- يكون كثير حدود معدوما إذا و فقط إذا كانت كل معاملاته معدومة.
- يكون كثيرا حدود ، غير معدومين ، متساويين إذا و فقط إذا كانا من نفس الدرجة و كانت معاملات حدود من نفس الدرجة متساوية.

انتبه

- 1- مجموع، فرق و جداء كثيرات حدود هي كثيرات حدود.
- 2- مركب كثيري حدود هو كثير حدود.
- 3- جداء كثيري حدود غير معدومين درجتاهما n و p على ترتيب هو كثير حدود درجته n+p

اعلم

جذر كثير حدود  $f$  معناه  $f(\alpha)=0$

جذر كثير حدود

إذا كان  $\alpha$  جذر كثير حدود  $f$  فإنه يوجد كثير حدود  $g$  يحقق:

$$f(x) = (x - \alpha) g(x)$$

تحليل  
كثير  
حدود

تعيين  $g(x)$  نستعمل:  
\*المطابقة: تساوي كثيري حدود و ذلك بعد النشر و التبسيط و الترتيب للعبارة  $(x-\alpha).g(x)$   
\*أو: خوارزمية القسمة.

عبارة:  $ax^2 + bx + c$  هي عبارة كثير حدود من درجة ثانية

عدد:  $\Delta = b^2 - 4ac$  يسمى مميز كثير حدود من درجة ثانية

لاحظ

تسمى شكل نموذجي كثير حدود من درجة ثانية  
عبارة:  $ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

حل معادلة من درجة ثانية

معادلة من درجة ثانية

حل معادلة:  $ax^2 + bx + c = 0$  نحسب مميز:  $\Delta = b^2 - 4ac$

نسمى معادلة من درجة  
ثانية، ذات مجهول  $x$ ،  
كل معادلة  
يمكن كتابتها على شكل:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حيث  $a, b, c$  أعداد  
حقيقية ثابتة مع  $a$  غير  
معدوم .

إذا كان	فإن
$\Delta < 0$	معادلة ليس لها حل
$\Delta = 0$	معادلة تقبل حل مضاعف $x_0 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta > 0$	معادلة تقبل حلين $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

## مفاتيح النجاح الدراسي : 2- العطاء يساوي الأخذ

النجاح عمل وجد وتضحية وصبر، ومن منح طموحه صبراً وعملاً وجداً، حصد نجاحاً وثمراً .. فاعمل واجتهد وابذل الجهد لتحقيق النجاح والطموح والهدف .. فمن جدّ وجد ومن زرع حصد. وقل من جد في أمر يحاوله \* \* \* وأستعمل الصبر إلا فاز بالظفر



إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية		المتراجحة من الدرجة الثانية	
الإشارة	التحليل	إذا كان	نسمي متراجحة من الدرجة الثانية كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الأشكال التالية: $ax^2 + bx + c > 0$ $ax^2 + bx + c \geq 0$ $ax^2 + bx + c < 0$ $ax^2 + bx + c \leq 0$ حيث $a, b, c$ أعداد حقيقية ثابتة مع $a$ غير معدوم. لحلها : ندرس إشارة إشارة كثير الحدود: $ax^2 + bx + c$
$ax^2 + bx + c$	لا يحلل	$\Delta < 0$	
$ax^2 + bx + c$	$a(x-x_0)^2$	$\Delta = 0$	
$ax^2 + bx + c$	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$\Delta > 0$	

مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

$ax^2 + bx + c = 0$		
$x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	المعادلة تقبل حلين :
$S = -\frac{b}{a}$	$P = \frac{c}{a}$	مجموع الحلين $S = x' + x''$ جداء الحلين $P = x' \times x''$

لتعيين عددين علم مجموعهما  $S$  و جداهما  $P$  نحل المعادلة :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

المعادلة مضاعفة التربيع

المعادلة مضاعفة التربيع، هي كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية ثابتة مع  $a$  غير معدوم.

يؤول حلها إلى حل الجملة:

$$\begin{cases} X = x^2 \\ aX^2 + bX + c = 0 \end{cases}$$

إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية

$$\Delta > 0 \text{ مع } ax^2 + bx + c = 0$$

فإن المعادلة تقبل حلين إشارتهما مختلفتان.	$\frac{c}{a} < 0$
فإن المعادلة ت قبل حلين موجبين تماما	$\frac{c}{a} > 0$
فإن المعادلة تقبل حلين سالبين تماما	$\frac{c}{a} > 0$

المتراجحات مضاعفة التربيع

نسمي متراجحة مضاعفة التربيع، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الأشكال التالية:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

$a, b, c$  أعداد حقيقية مع  $a$  غير معدوم.

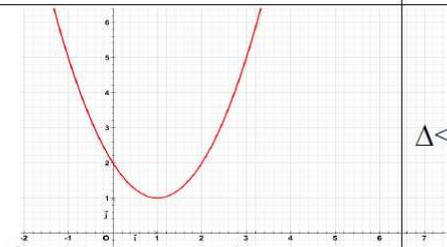
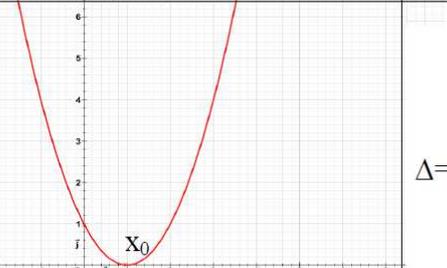
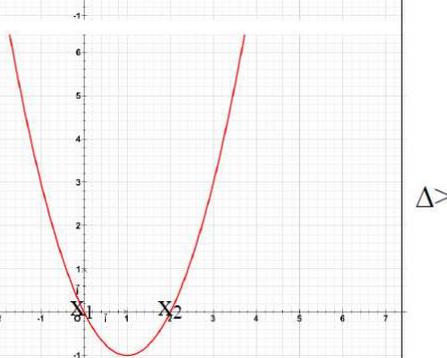
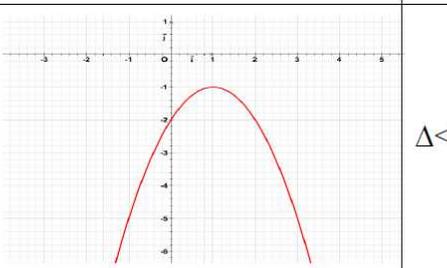
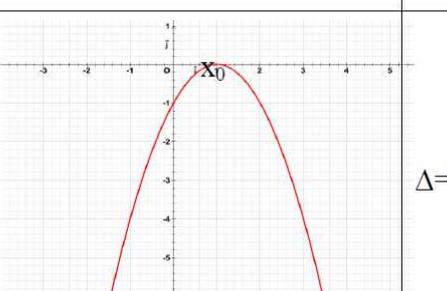
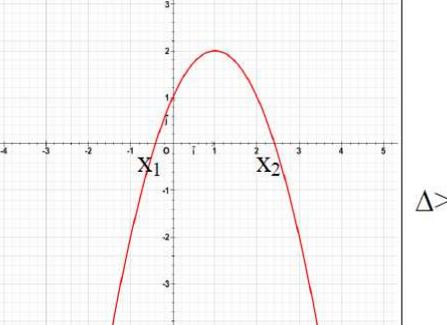
لحلها : ندرس إشارة كثير الحدود

$$ax^4 + bx^2 + c$$

قال رسول الله صلى الله عليه وسلم  
 (( من سلك طريقاً يلتمس فيه علماً سهل الله  
 له به طريقاً إلى الجنة )) رواه مسلم



التفسير البياني لإشارة كثير □ دود من الدرجة الثانية

التعليق	القراءة البيانية	الرسم		
من أجل كل عدد حقيقي $x$ $ax^2 + bx + c > 0$ يكون	المنحني يقع كليا فوق حامل محور الفواصل		$\Delta < 0$	$a > 0$
من أجل كل عدد حقيقي $x$ حيث $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$ $ax^2 + bx + c > 0$ يكون و من أجل $x = x_0$ $ax^2 + bx + c = 0$ يكون	المنحني يقع كليا فوق حامل محور الفواصل و يمسه في النقطة ذات الفاصلة $x_0$		$\Delta = 0$	
*من أجل أي عدد حقيقي $x \in ]-\infty ; x_1[ \cup ]x_2 ; +\infty[$ $ax^2 + bx + c > 0$ يكون *من أجل أي عدد حقيقي $x \in ]x_1 ; x_2[$ $ax^2 + bx + c < 0$ يكون. * يكون $ax^2 + bx + c = 0$ من أجل $x_2 ; x_1$	المنحني يقطع حامل محورا لفواصل في نقطتين فاصلتاها $x_2 ; x_1$		$\Delta > 0$	$a < 0$
من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $ax^2 + bx + c < 0$	المنحني يقع كليا تحت حامل محور الواصل		$\Delta < 0$	
من أجل كل عدد حقيقي $x$ حيث $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$ $ax^2 + bx + c < 0$ يكون و من أجل $x = x_0$ $ax^2 + bx + c = 0$ يكون	المنحني يقع كليا تحت حامل محور الفواصل و يمسه في النقطة ذات الفاصلة $x_0$		$\Delta = 0$	
*من أجل أي عدد حقيقي $x \in ]-\infty ; x_1[ \cup ]x_2 ; +\infty[$ $ax^2 + bx + c < 0$ يكون *من أجل أي عدد حقيقي من المجال $]x_1 ; x_2[$ $ax^2 + bx + c > 0$ يكون * يكون $ax^2 + bx + c = 0$ من أجل $x_2 ; x_1$	المنحني يقطع حامل محورا لفواصل في نقطتين فاصلتاها $x_2 ; x_1$		$\Delta > 0$	

تمرين 6: النشر و التحليل

تذكر

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 = (a+b)(a-b) =$$

□ لل

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} =$$

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} =$$

$$4x^2 - 3 =$$

$$-98x^2 + 72 =$$

$$(x-1)^2 - 3$$

$$-2(3x-1)^2 + 10 =$$

أنشر

$$\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 =$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 =$$

$$(3x - \sqrt{7})(3x + \sqrt{7}) =$$

$$-3(5x+2)(5x-2) =$$

$$\left[(x-7) + \sqrt{3}\right] \left[(x-7) - \sqrt{3}\right]$$

$$3(2x+3-\sqrt{2})(2x+3+\sqrt{2}) =$$

تمرين 7: الشكل النموذجي

1- أكمل النقط للحصول على عبارة من الشكل:

$$(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ مع } (x \pm \alpha)^2 \pm \beta$$

$$1) x^2 + 2x - 8 = (\dots + \dots)^2 - \dots - 8 \\ = (\dots + \dots)^2 - \dots$$

$$2) x^2 - 2x + \frac{3}{4} = (\dots + \dots)^2 - \dots + \frac{3}{4} \\ = (\dots + \dots)^2 - \dots$$

تمرين 1:

من بين الدوال التالية ما هي الدوال التي تمثل كثير □ دود من الدرجة الثانية؟

$$f(t) = (t+2)^2 - (t-2)^2 \quad (\text{ب}) \quad f(x) = -3(x-1)(x+3) \quad (\text{أ})$$

$$f(a) = \frac{1}{a} - (a-1)^2 \quad (\text{ج}) \quad f(x) = (3x+1)(x-2) - 3x^2 + x - 1$$

$$f(x) = (\sqrt{x}-1)^2 \quad (\text{و}) \quad f(x) = x^2 - \sqrt{3}x + 1 \quad (\text{هـ})$$

تمرين 2:

1. P(x) كثير حدود من الدرجة الثانية حيث :  $p(x) = x^2 - x - 2$   
أحسب p(2) ثم أعط تحليلا لـ p(x).

2. P(x) كثير حدود من الدرجة الثالثة حيث :  $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$   
أحسب p(2) ثم أعط تحليلا لـ p(x).

تمرين 3:

نعتبر الدالة p المعرفة بـ :  $p(x) = (x^2+1)^2 - (4x+2)^2$

1. بين أن p هي دالة كثير حدود مع تعيين درجتها .

2. حل المعادلة  $p(x) = 0$ .

تمرين 4:

نعتبر الدالة p المعرفة بـ :

$$p(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + k \text{ حيث } k \text{ عدد حقيقي}$$

1. عين قيمة k حتى يكون  $x = 4$  جذرا لـ p(x)

2. من أجل قيمة k المحصل عليها حل p(x).

تمرين 5:

نعتبر الدالة كثير الحدود p المعرفة بـ :

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$$

نرمز بـ  $\alpha$  ،  $\beta$  و  $\gamma$  لجذور p(x).

1. أكتب بدلالة  $\alpha$  ،  $\beta$  و  $\gamma$  العبارة p(x).

2. بين أن  $\alpha + \beta + \gamma = 5$  ;  $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 3$

و  $\alpha\beta\gamma = 1$

3. علما أن  $\alpha = 2 - \sqrt{5}$  و  $\beta = 1$  أحسب  $\gamma$ .

- 1- من الشكل تعرف على منحنى كل دالة.
- 2- بقراءة بيانية أعط جدول إشارة كل دالة.
- 3- تحقق جبريا من النتائج السابقة.

تمرين 9: المعادلات و المتراجحات من الدرجة الثانية

1 حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات

$$5x^2 - 4x + 2 = 0 \quad x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$4x^2 + 3x - 1 = 0 \quad x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$$

(2) حل المعادلتين  $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$   $x \in \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R} \quad 2x - 7\sqrt{x} - 4 = 0$

2 حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحات التالية

$$-2x^2 + 5x - 3 \leq 0 \quad ; \quad 3x^2 - 2x - 8 < 0$$

$$-3x^2 + \sqrt{3}x - 1 \geq 0 \quad ; \quad 4x^2 - 2x + 1 > 0$$

حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحات التالية:

$$(2x-1)^2 + 6 \leq (3x-2)(x-2)$$

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 3x + 1} \leq 1 \quad , \quad \frac{3x-4}{x} + \frac{8-2x}{x+2} \geq 2$$

المعادلات و المتراجحات الوسيطة

تمرين 10:

1.  $f(x)$  كثير حدود و  $\alpha$  عدد حقيقي. عين في كل من الحالات التالية قيم الوسيط  $m$  حيث يكون  $\alpha$  جذرا لـ  $f(x)$ :

$$f(x) = x^2 - 3mx + 2m - 7 \quad \alpha = 2$$

$$f(x) = (m+2)x^2 - (2m+4)x + m - 2 \quad \alpha = -3$$

2. حل و ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$

كل من المعادلات التالية :

$$x^2 + 2mx + 2m^2 + 3 = 0 \quad \bullet$$

$$(m+1)x^2 - (m+3)x - m + 3 = 0 \quad \bullet$$

3. عين مجموعة قيم العدد الحقيقي  $m$  بحيث يكون :

$$x^2 - (3m-2)x + 2m^2 - 5m - 2 > 0$$

$$m x^2 + 4(m+1)x + m - 5 < 0$$

$$3)x^2 + 6x + 7 = (\dots + \dots)^2 - \dots + 7$$

$$= (\dots + \dots)^2 - \dots$$

$$4)x^2 - 6x - 7 = (\dots + \dots)^2 - \dots - 7$$

$$= (\dots + \dots)^2 - \dots$$

2- للحصول على عبارة من الشكل:  $a[(x \pm \alpha)^2 \pm \beta]$

$$1) 2x^2 - 8x = (\dots)^2 = 2 [(\dots)^2 - \dots]$$

$$2) 4x^2 + 16x + 15 = 4 [(\dots)^2 - \dots + \dots]$$

$$= 4 [(\dots)^2 - \dots]$$

$$3) 2x^2 - x - \frac{1}{2} = 2(\dots)$$

$$= 2 [(\dots)^2 - \dots - \dots]$$

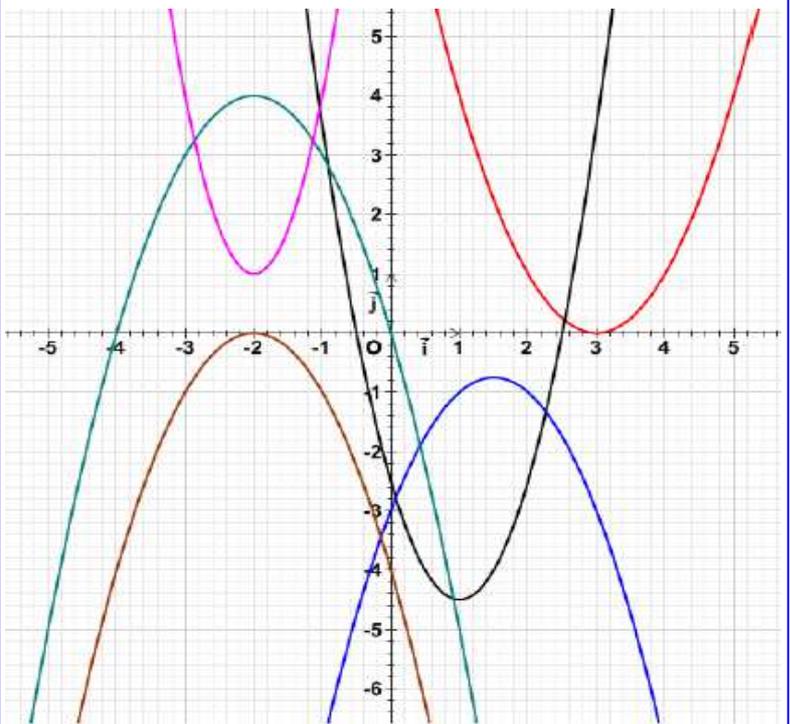
$$= 2 [(\dots)^2 - \dots]$$

$$4) -4x^2 + 8x - 1 = \dots(\dots)$$

$$= -4 [(\dots)^2 - \dots + \dots]$$

$$= -4 [(\dots)^2 - \dots]$$

تمرين 8: تعطى التمثيلات البيانية لستة دوال كثيرات حدود من الدرجة الثانية



$$f_3(x) = -x^2 + 3x - 3 \quad f_2(x) = 2x^2 - 4x + \frac{5}{2} \quad f_1(x) = x^2 - 6x + 9$$

$$f_6(x) = -x^2 - 4x - 4 \quad f_5(x) = 3x^2 + 12x + 13 \quad f_4(x) = -x^2 - 4x$$

تمرين 10:

أدرس حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  وجود إشارة حلول كل من المعادلات التالية:

$$x^2 - 2mx + 3m = 0 \quad 1.$$

$$mx^2 - 2(m+1)x - 5 = 0 \quad 2.$$

تمرين 11: المعادلات و المتراجحات مضاعفة الترتيب

1. حل في  $\mathbb{R}$  المعادلتين التاليتين :

$$4x^4 + 12x^2 + 9 = 0 \quad * \quad x^4 - 7x^2 + 1 = 0 \quad *$$

3. حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحتين التاليتين :

$$x^4 - 2x^2 + 5 \geq 0 \quad * \quad 2x^4 - 3x^2 + 1 < 0 \quad *$$

تمرين 12: المعادلات و المتراجحات الصماء

1. حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات التالية :

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4} = 1 \quad * \quad \sqrt{3x+1} = 1-x \quad * \quad \sqrt{x+3} = 2x$$

2. حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحات التالية :

$$\sqrt{x-2} - x + 4 < 0 \quad * \quad \sqrt{x-3} > x - 1$$

تمارين و مسائل عامة

تمرين 13: نعتبر كثير الحدود

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x + 12$$

(1) احسب  $f(\sqrt{3})$  ،  $f(-4)$  ،  $f(0)$

- بين أن العدد  $(-4)$  جذرا لكثير الحدود  $f(x)$ .

(2) عين الأعداد الحقيقية  $a$  ،  $b$  و  $c$  بحيث يكون من أجل

$$f(x) = (x+4)(ax^2 + bx + c) : x \in \mathbb{R}$$

(3) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات التاليتين:  $f(x) = 12$  ،  $f(x) = 0$

تمرين 14 :

نعتبر المعادلة ذات المجهول  $x$  التالية :

$$(1) \dots = 0 \quad x^2 - (m+1)x + \frac{5}{4}m - \frac{1}{4} = 0 \quad (m \text{ وسيط حقيقي})$$

عين قيم  $m$  حتى تقبل المعادلة (1)

(1) جذرا مضاعفا احسبه ، (2) حلين موجبين تماما.

(3) حلين سالبين تماما ، (4) حلين مختلفين في الإشارة

(5) لا تقبل المعادلة (1) حلويا

تمرين 15 :

نعتبر كثير الحدود :  $p(x) = 2x^3 + ax^2 + x + 2$

(1) حدد العدد  $a$  حتى يكون 1 جذر لـ  $p(x)$ .

(2) نضع

أ - اوجد كثير الحدود  $Q(x)$

$$p(x) = (x-1) \cdot Q(x) \quad \text{حيث :}$$

ب- حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $Q(x) = 0$  ثم حل في  $\mathbb{R}$

المتراجحة  $P(x) < 0$

ج- حل في المجال  $\left] \frac{-1}{2}; +\infty \right[$  المعادلة

$$x + |2x^2 - 3x - 2| = |x|$$

16 متبر دائرة قطرها  $[AB]$  حيث:  $AB=4$

$M$  نقطة من  $[AB]$

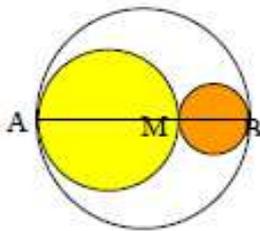
ننسى الدائرتين اللتين قطراهما  $[AM]$  و  $[MB]$  نرمز بـ  $S$  إلى مساحة الحيز غير المضلل و بـ  $a$  لمساحة القرص الذي

قطره  $[AB]$ . نضع  $AM=x$

(1) احسب  $S$  بدلالة  $x$

(2) هل توجد وضعية للنقطة  $M$  يكون من أجلها:  $S = \frac{1}{2}a$

(3) عين قيمة  $x$  التي يكون من أجلها:  $2S > a$



17 ABCD مربع ضلعه 4 و مركزه O ، النقطة M

تتحرك على حافة المربع في الاتجاه ABCD انطلاقا من A .

نسمي  $x$  المسافة التي تقطعها

النقطة M و  $f$  الدالة التي ترفق بكل

$x$  الطول  $OM$  ، نرمز له  $f(x)$ .

(1) بالاستعانة بالعلاقات الهندسية

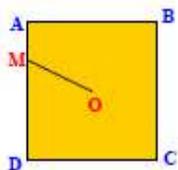
أنشئ جدول تغيرات الدالة  $f$

على المجال  $[0; 4]$ .

(2) لماذا الدالة  $f$  دالة دورية دورها 4 ؟

(3) أنشئ التمثيل البياني للدالة  $f$  على المجال  $[0; 16]$ .

(4) أعط قيمة عظمى وقيمة صغرى للدالة  $f$ .



دائما ما نخذل

أنفسنا

لأننا نحن

من نختار

من خذلونا

samir ahmed

اقوال العظماء و الحكماء