

## ① المرجح في المستوي

### ❖ مرجح نقطتين

\* مرجح النقطتين  $A$  و  $B$  المرفقتين بالمعاملين  $\alpha$  و  $\beta$   $\Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$  حيث:  $\alpha + \beta \neq 0$

○  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان

○ تسمى الثانية  $(A, \alpha)$  نقطة مثقلة و تسمى الجملة  $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  جملة نقطتين مثقلتين

\* إذا كان  $\alpha = \beta$  نحصل:  $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB}$   $\Leftrightarrow G$  منتصف  $[AB]$  ; (نأخذ في هذه الحالة:  $\alpha = \beta = 1$ )

ميرهنات:

■  $G$  مرجح  $\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Leftrightarrow$  من أجل كل نقطة  $M$  لدينا:  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$

■  $G$  منتصف  $[AB] \Leftrightarrow$  من أجل كل نقطة  $M$  لدينا:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MG}$

خواص:

•  $G$  مرجح  $\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Leftrightarrow G$  مرجح  $\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$  حيث:  $k \in \mathbb{R}^*$

•  $G$  مرجح  $\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Leftrightarrow$  فإن النقط  $A, B, G$  على استقامة واحدة

احداثيا مرجح نقطتين:

$G(x_G; y_G); B(x_B; y_B); A(x_A; y_A)$  مرجح  $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \quad ; \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

إنشاء مرجح نقطتين:

$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  مرجح  $G$

(1) نكتب  $\overrightarrow{AG}$  بدلالة  $\overrightarrow{AB}$  وفق القانون:  $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$

(2) نقسم القطعة  $[AB]$  إلى  $\alpha + \beta$  جزء متقايسة ثم انطلاقا من  $A$  نضع  $G$  على بعد  $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$  (يمكن الاستعانة بمبرهنة طالس)

### ❖ مرجح 3 نقط

\* مرجح النقط  $B, C$  و المرفقة بالمعاملات  $\alpha, \beta, \gamma$   $\Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

○  $\alpha, \beta, \gamma$  أعداد حقيقية حيث:  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

\* إذا كان  $\alpha = \beta = \gamma$  و النقط  $A, B, C$  ليست على استقامة واحدة فإن:  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$

(نأخذ في هذه الحالة:  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ )

ميرهنات:

■  $G$  مرجح  $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \Leftrightarrow$  من أجل كل نقطة  $M$  لدينا:  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$

خواص:

•  $G$  مرجح  $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \Leftrightarrow G$  مرجح  $\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$  حيث:  $k \in \mathbb{R}^*$

•  $G$  مرجح  $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ , إذا كانت  $D$  مرجح  $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  فإن:  $G$  مرجح  $\{(D, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$

احداثيا مرجح 3 نقط:

$G(x_G; y_G); C(x_C; y_C); B(x_B; y_B); A(x_A; y_A)$  مرجح  $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \quad ; \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

إنشاء مرجح 3 نقط:

$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  مرجح  $G$

طريقة 1:

(1) نكتب  $\overrightarrow{AG}$  بدلالة  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  وفق القانون:  $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC}$

(2) نرسم الشعاع  $\overrightarrow{AG}$  محصلة مجموع الشعاعين  $\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB}$  و  $\frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC}$

طريقة 2:

(1) ننشئ  $I$  مرجح نقطتين بحيث مجموع المعاملين  $\neq 0$  مثلا  $A$  و  $C$  بحيث  $\alpha + \gamma \neq 0$

(2) نكتب  $\overrightarrow{GI}$  بدلالة  $\overrightarrow{BI}$  و ننشئ  $G$

Prof Mustapha  
KHA-LD9

## المرجح في المستوي ②

❖ مجموعة النقط

	فإن مجموعة النقط هي	إذا كان	
دائرة	دائرة مركزها $G$ و نصف قطرها $r = k'$	$k' > 0$ حيث $\ \vec{MG}\  = k'$	①
	دائرة مركزها $G$ و نصف قطرها $r = AB$ (لأن $AB$ طول موجب ثابت)	$\ \vec{MG}\  = AB$	
	دائرة قطرها $GH$ و مركزها منتصف $[GH]$	$(MG) \perp (MH)$	
$\phi$	مجموعة خالية	$k' < 0$ حيث $\ \vec{MG}\  = k'$	②
نقطة	النقطة $G$ (أو هي النقطة $M$ منطبقة على $G$ )	$\ \vec{MG}\  = 0$	③
مستقيم	مستقيم محور القطعة $[GH]$	$\ \vec{MG}\  = \ \vec{MH}\ $	④
جزء من المستوي	كل النقط من المستوي التي تقع داخل و على محيط الدائرة التي مركزها $G$ و نصف قطرها $r = k'$	$\ \vec{MG}\  \leq k'$	⑤
	كل النقط من المستوي التي تقع خارج الدائرة التي مركزها $G$ و نصف قطرها $r = k'$	$\ \vec{MG}\  > k'$	
	نصف المستوي في جهة النقطة $G$ و حده محور $[GH]$	$\ \vec{MG}\  < \ \vec{MH}\ $	

\*ملاحظة 1: لإثبات أن  $B$  تنتمي إلى مجموعة النقط يكفي تعويض  $M$  ب  $B$  في العلاقة المعطاة و نحصل على علاقة صحيحة

\*ملاحظة 2: لإثبات أن شعاع أو علاقة ما مستقلة عن  $M$  يكفي استخدام علاقة شال و خواص الأشعة للتخلص من  $M$

❖ اثبات تلاقي مستقيمتين

مثال:  $ABC$  مثلث و النقط  $I, J, K$  معرفة كما يلي:

•  $I$  نظيرة منتصف  $[AB]$  بالنسبة إلى  $B$

• النقطة  $J$  تحقق:  $2\vec{JA} - 3\vec{JC} = \vec{0}$

• النقطة  $K$  تحقق:  $\vec{BK} = \frac{1}{3}\vec{BC}$

(1) أرسم شكلا توضح فيه النقط  $I, J, K$  و  $K$  مع التبرير.

(2) أثبت أن كل نقطة من النقط  $I, J, K$  هي مرجح لنقطتين من النقط  $A, B, C$  يطلب تحديد المعاملين في كل حالة.

(3) أثبت أن المستقيمتين  $(AK)$  و  $(BJ)$  و  $(CI)$  متقاطعة.

الحل:

(1) الإنشاء مع التبرير:

$$\vec{AI} = \frac{3}{2}\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AI} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AB} \quad \square$$

$$\vec{AJ} = 3\vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AJ} = \frac{-3}{2-3}\vec{AC} \Leftrightarrow 2\vec{JA} - 3\vec{JC} = \vec{0} \quad \square$$

$$\vec{BK} = \frac{1}{3}\vec{BC} \quad \square$$

(2) اثبات المرجح وتحديد المعاملات:

$$-2\vec{IA} + 3\vec{BI} + 3\vec{AI} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{AI} = 3\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{3}{2}\vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{IA} - 3\vec{IB} = \vec{0} \quad \text{ومنه } I \text{ مرجح الجملة: } \{A(1), B(-3)\}$$

$$\text{* بنفس الطريقة نجد: } J \text{ مرجح: } \{A(2), C(-3)\} \text{ و } K \text{ مرجح: } \{B(2), C(1)\}$$

(3) إثبات أن المستقيمتين  $(AK)$  و  $(BJ)$  و  $(CI)$  متقاطعة:

ليكن  $G$  مرجح  $\{(A, 2); (B, -6); (C, -3)\}$  لأن:  $2 - 6 - 3 = -7 \neq 0$

طريقة 2: (باستعمال الارتباط الخطي)

$$2\vec{GA} - 6\vec{GB} - 3\vec{GC} = \vec{0}$$

$$-7\vec{GI} + 2\vec{IA} - 6\vec{IB} - 3\vec{IC} = \vec{0}$$

$$-7\vec{GI} + 2(\vec{IA} - 3\vec{IB}) - 3\vec{IC} = \vec{0}$$

$$G \in (IC) \text{ و منه } \vec{GI} = -\frac{3}{7}\vec{IC}$$

\* بنفس الطريقة نجد:  $G \in (JB)$  و  $G \in (AK)$

و منه المستقيمتين  $(AK)$  و  $(BJ)$  و  $(CI)$  متقاطعة في  $G$

طريقة 1: (باستعمال خاصية التجميع)

$G \in (IC)$  و منه  $\{(I, -4); (C, -3)\}$  مرجح

$G \in (JB)$  و منه  $\{(J, -1); (B, -6)\}$  مرجح

$G \in (AK)$  و منه  $\{(K, -9); (A, 2)\}$  مرجح

و منه المستقيمتين  $(AK)$  و  $(BJ)$  و  $(CI)$  متقاطعة في النقطة  $G$

❖ مستقيم أولار (Euler): هو المستقيم الذي يشمل مركز ثقل مثلث ومركز الدائرة المحيطة به وملتقى الإرتفاعات فيه.