1

ملخص
الربح في الوقت مع الصديق في الرياضيات

التحضير الممتاز للرياضيات

★ الأعداد والحساب

أقدم لإخواني الأساتذة وأبنائي الطلبة هذا العمل المتواضع والمتمثل في ملخص الربح في الوقت مع الصديق في الرياضيات في الأعداد والحساب.

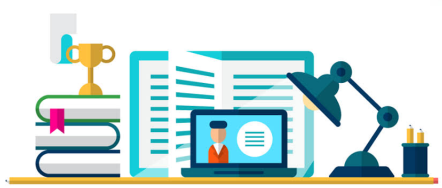
★ للسنة أولى جذع مشترك علوم وتكنولوجيا ★

للتحضير الممتاز للرياضيات.

يتضمن هذه الملخص :

- الأعداد والحساب.
- الترتيب - الحصر - المجالات - القيمة المطلقة والمسافة.
- حل معادلة أو متراجحة تتضمن القيمة المطلقة.

لا تنسونا من صالح الدعاء للوالدين الكريمين ولي. محبكم في الله الأستاذ : فراحتية المحفوظ



آخر تحديث: 2021/09/25

السنة الدراسية: 2022/2021

الأستاذ فراحتية المحفوظ للرياضيات
فراحتية المحفوظ
mahfoudferahtia@gmail.com

1 الأعداد والحساب

1.1 المجموعات الأساسية للأعداد:

❶ مجموعة الأعداد الطبيعية :

✍ 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ ...... أعداد طبيعية، ونرمز لها بـ: $\mathbb{N}$.
ونكتب $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$.

- 0 هو أصغر عدد طبيعي.
- المجموعة $\mathbb{N}$ غير منتهية.
- $\mathbb{N}^*$ هي $\mathbb{N}$ ما عدا 0 ونكتب $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.

❷ مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية :

✍ $\ldots$ ؛ -3 ؛ -2 ؛ -1 ؛ 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ ... أعداد صحيحة نسبية (سالبة، معدومة أو موجبة)، ونرمز لها بـ: $\mathbb{Z}$.
ونكتب $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.

❸ مجموعة الأعداد العشرية :

✍ العدد العشري هو العدد الذي يمكن كتابته على الشكل $\frac{p}{10^n}$ حيث p عدد صحيح نسبي و n عدد طبيعي، ونرمز الى مجموعة الأعداد العشرية بالرمز $\mathbb{D}$.

- يمكن كتابة عدد عشري على شكل عدد بالفاصلة يتكون من جزئين، جزء صحيح وجزء عشري منته.

❹ مجموعة الأعداد الناطقة :

✍ االعدد الناطق هو العدد الذي يمكن كتابته على الشكل $\frac{p}{q}$ حيث p عدد صحيح نسبي و q عدد صحيح نسبي غير معدوم، ونرمز الى مجموعة الأعداد الناطقة بالرمز $\mathbb{Q}$.

- يتميز كل عدد ناطق بكتابة عشرية تتضمن دورا.
- كل عدد ناطق يقبل كتابة وحيدة على شكل كسر غير قابل للاختزال $\frac{p}{q}$، مع p و q عددين صحيحين نسبيين و $(q \neq 0)$ أوليان فيما بينهما أي: $PGCD(p; q) = 1$.

❺ مجموعة الأعداد الحقيقية :

✍ مجموعة الأعداد الحقيقية، $\mathbb{R}$، هي مجموعة فواصل نقط مستقيم مزوّد بمعلم $(O; I)$.

- العدد الحقيقي 0 هو فاصلة المبدأ O.
- والعدد الحقيقي 1 هو فاصلة النقطة I.

ملاحظات :

- ✔ كل عدد حقيقي غير ناطق هو عدد أصم.
- ✔ $\mathbb{R}$ هي مجوعة الأعداد الناطقة مع مجموعة الأعداد الصماء.
- ✔ $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$. حيث $-\infty$ و $+\infty$ ليسا بعددين إنما رمزان يعبران عن اللانهاية.
- ✔ توجد مجموعات غير أساسية مثل: $\mathbb{N}^*$ ، $\mathbb{Z}^*$ ، $\mathbb{Q}^*$ ، $\mathbb{R}^*$ ، $\mathbb{N}^+$ ، $]-\infty; 0]$.
- ✔ كل الأعداد التي نستعملها هي أعداد حقيقية لكن لمعرفة طبيعة عدد نبسطه، ثم نبحث أصغر مجموعة ينتمي إليها.

❖ الانتقال من الكتابة العشرية الدورية لعدد ناطق إلى الكتابة الكسرية له :

طريقــة

✍ يمكن الإنتقال من الكتابة العشرية الدورية لعدد ناطق إلى الكتابة الكسرية له كما يلي:

- إذا كان الدور مباشرة بعد الفاصلة:
$2.\underline{14} = 2 + \frac{14}{10^2 - 1} = \frac{212}{99}$.
- إذا كان الدور ليس مباشرة بعد الفاصلة:
لدينا $34.1\underline{456} = 10 \times 341.\underline{456}$
ومنه $341.\underline{456} = 341 + \frac{456}{10^3 - 1} = \frac{341115}{999}$
إذن $34.1\underline{456} = \frac{341115}{999} \times \frac{1}{10} = \frac{341115}{9990}$.

✍ يمكن الإنتقال من الكتابة الكسرية لعدد ناطق إلى الكتابة العشرية الدورية له، باستعمال الحاسبة.

❖ معرفة إن كان عدد ناطق عددا عشريا

(الخاصية المميزة للعدد العشري):

طريقـــة

✍ لمعرفة إن كان عدد ناطق عددا عشريا. نكتب العدد الناطق على شكله غير القابل للاختزال $\frac{p}{q}$.

✍ ثم نحلل مقامه إلى جداء عوامل أولية. إذا كان هذا التحليل لا يشمل إلا قوى 2 أو 5، فالعدد عشري.

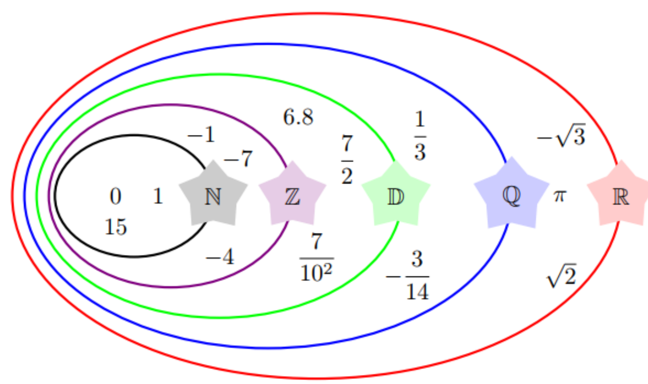
أي: إذا أمكن كتابة مقام هذا الكسر على الشكل $2^n \times 5^m$ فالعدد عشري وإن لم يكن فإنه ليس عشري.

2.1 مقارنة مجموعات الأعداد:

خاصية

✍ تحقق المجموعات العددية الاحتواءات الآتية:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



حذار: الرمز (∈) رمز الإنتماء، يربط بين عنصر و مجموعة. بينما الرمز (⊂) رمز الإحتواء، يربط بين مجموعتين.

3.1 البرهان بالخلف:

تعريف

✍ هو نمط من أنماط البرهان، وهو برهنة أساسها إثبات صحة المطلوب بإبطال نقيضه أو فساد المطلوب بإثبات نقيضه.

✍ **مبدأه:** للبرهنة على أن العبارة P صحيحة (في بعض الحالات)، نفرض أنها خاطئة وبإجراء مجموعة من العمليات نبين أن هذا الفرض يؤدي إلى تناقض، نستنتج عندئذ أن العبارة P صحيحة.

4.1 الأعداد الأولية:

تعريف

✍ نسمي عددا أوليا كل عدد طبيعي يقبل، بالضبط، قاسمين مختلفين هما: 1 والعدد نفسه.

✍ العدد 0 ليس أوليا لأنه لا يقسم نفسه، ويقبل عددا غير منته من القواسم (كل الأعداد الطبيعية قواسم لـ 0).

✍ العدد 1 ليس أوليا لأنه يقبل قاسما واحدا فقط.

❖ اختبار أولية عدد طبيعي :

طريقـــة

✍ للتعرف على أولية عدد طبيعي ما نتبع الخطوات التالية:

① نختبر قابلية قسمة العدد على كلّ من الأعداد الأولية حسب ترتيبها التصاعدي.

② نتوقف عن عمليات القسمة عند أول باق معدوم. أو عندما نصادف أول حاصل قسمة أصغر من المقسوم عليه.

③ **نستخلص:** إذا صادفنا الباقي المعدوم يكون العدد غير أولي وإلا فهو أولي.

✍ ولتسهيل العملية، يمكن استعمال جدول التالي:

هل يقبل العدد 277 القسمة على	2	3	5	7	11	13	17
حاصل القسمة	138	92	55	39	25	21	16
الباقي	1	1	2	4	2	4	5
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا

✔ بما أن $16 < 17$ (أول حاصل اقل من القاسم) والباقي غير معدوم فإن العدد 277 أولي.

❖ **تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية :**

✍ تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية يعني كتابته على شكل جداء أعداد أولية.

✍ كل عدد طبيعي غير أولي وأكبر من 2 يكتب على شكل جداء عوامل أولية.

طريقة

✍ لتحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية نتبع الخطوات التالية:

① نقسم العدد على أصغر عدد أوليّ يكون قاسما له.

② نقسم حاصل القسمة على أصغر عدد أوليّ يكون قاسما له.

③ نكرّر عمليات القسمة هذه حتى نصل إلى حاصل قسمة يساوي **1**.

④ كتابة جداء قوى كل هذه القواسم هو تحليل العدد إلى جداء عوامل أولية.

5.1 استعمال التحليل إلى جداء عوامل

أولية:

❶ لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b:

طريقة

☜ نحلل العددين a و b الى جداء عوامل أولية. ثم نحسب جداء كل العوامل الأولية المشتركة مأخوذة مرة واحدة وبأصغر أس.

ونرمز له بـ: $PGCD(a;b)$.

❷ لحساب المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b:

طريقة

☜ نحلل العددين a و b الى جداء عوامل أولية. ثم نحسب جداء كل العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة مأخوذة مرة واحدة وبأكبر أس.

ونرمز له بـ: $PPCM(a;b)$.

❸ لتعيين الشكل غير القابل للإختزال لكسر:

طريقة

☜ نقوم بتحليل كل من بسطه ومقامه إلى جداء عوامل أولية ثم نطبق قواعد الحساب على القوى لاختزال الكسر (إختزال كل العوامل المشتركة).

❹ تبسيط الجذور:

طريقة

☜ وذلك بتحليل العدد الطبيعي الذي تحت الجذر إلى جداء عوامل أولية، وبإستعمال الخاصية من أجل $a \geq 0$ فإن $\sqrt{a^2} = a$ نحصل على نتيجة.

❺ معرفة عدد قواسم عدد طبيعي:

طريقــة

وذلك بتحليل العدد الطبيعي إلى جداء عوامل أولية، ثم نضيف إلى كل أس في التحليل 1، ثم نحسب جداء الأعداد المحصل عليها.

6.1 القوى الصحيحة:

تعريف

a عدد حقيقي كيفي و n عدد طبيعي غير معدوم. نسمي القوة ذات الرتبة n للعدد الحقيقي a، العدد a^n حيث: $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{عاملا}}$.

من أجل كل عدد حقيقي a غير معدوم و n عدد طبيعي غير معدوم، $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

إصطلاح: من أجل كل عدد حقيقي a غير معدوم، $a^0 = 1$.

خــواص

a و b عددان حقيقيان غير معدومين، m و n عددان صحيحان نسبيان.

* $a^m \times a^n = a^{m+n}$ * $(a^m)^n = a^{mn}$
* $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ * $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$.

حالات خاصة:

✔ من أجل كل عدد حقيقي a غير معدوم وكل عدد طبيعي n غير معدوم: $a^n \times a^{-n} = a^0 = 1$.

✔ من أجل كل عدد حقيقي a موجب وغير معدوم وكلّ عدد طبيعي n غير معدوم:

* إذا كان n زوجيا، فإن إشارة $(-a)^n$ موجبة أي أن: $(-a)^n = a^n$.

* وإذا كان n فرديا، فإن إشارة $(-a)^n$ سالبة أي أن: $(-a)^n = -a^n$.

7.1 الجذور التربيعية:

تعريف

a عدد حقيقي موجب. نسمي الجذر التربيعي للعدد الحقيقي a العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه يساوي a ونرمز له بالرمز $\sqrt{a}$.

ملاحظات:

✔ لايمكن حساب الجذر التربيعي لعدد سالب.

✔ لايمكن أن يكون الجذر التربيعي عدد سالب.

خــواص

من أجل a موجب: $\sqrt{a} \geq 0$ و $(\sqrt{a})^2 = a$.

من أجل a و b موجبان: $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

من أجل $a \geq 0$ و $b > 0$: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

ملاحظات:

✔ من أجل كل a و b عددين حقيقين موجبين، فإن $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. حيث تتحقق المساواة إذا كان أحد العددين a و b معدوما.

✔ إذا كان a عدد حقيقي موجب، فإن $\sqrt{a^2} = a$.
وإذا كان a عدد حقيقي سالب، فإن $\sqrt{a^2} = -a$.

8.1 المتطابقات الشهيرة والحساب على

الكسور:

* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}$
* $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$
* $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

2 القيمة المضبوطة، القيم المقربة

1.2 مُدور عدد حقيقي:

تعريف

✍ A عدد حقيقي مكتوب في شكله العشري، وليكن d رقمه العشري ذو الرتبة $p+1$. نسمي مُدور A إلى 10^{-p} العدد الذي نحصل عليه كما يلي:

* إذا كان $d \geq 5$، نأخذ العدد بأرقامه العشرية إلى الرقم العشري الذي رتبته p، ونضيف 1 إلى هذا الرقم.

* إذا كان $d < 5$ نأخذ العدد بأرقامه العشرية إلى الرقم العشري الذي رتبته p.

2.2 الكتابة العلمية:

تعريف

✍ كتابة عدد عشري على الشكل العلمي، تعني التعبير عنه على الشكل $a \times 10^n$ (أو $-a \times 10^n$).
حيث a عدد عشري يحقق $1 \leq a < 10$ و n عدد صحيح نسبي.

✍ إزاحة الفاصلة تكون نحو اليسار أو نحو اليمين.

3.2 رتبة مقدار عدد:

تعريف

✍ رتبة مقدار عدد عشري مكتوب على الشكل العلمي هو العدد $k \times 10^n$ (أو $-k \times 10^n$). حيث k هو مدور العدد a إلى الوحدة، و n عدد صحيح نسبي.

طريقـــة

✍ لإيجاد رتبة مقدار عدد:

① نكتب العدد على الشكل العلمي.

② ندور العدد العشري في كتابته العلمية إلى العدد الصحيح الأقرب منه ونحتفظ بقوة 10.

✍ لإيجاد رتبة مقدار جداء عددين أو حاصل قسمة عددين، نحسب أولا رتبة مقدار كل عدد ثم نحسب رتبة مقدار الناتج.

3 الأعداد والحاسبة

1.3 تمثيل الأعداد في الحاسبة:

✍ عند استعمال الحاسبة، نتعامل مع العدد بثلاثة أشكال هي:

* القيمة المضبوطة * القيمة الظاهرة
* القيمة المخزنة حيث:

القيمة الظاهرة - لقيمة المضبوطة = القيمة المخزنة

2.3 تنظيم حساب باليد أو بالحاسبة :

✍ عند إجراء حساب ما، نتبع عادة الخطوات التالية احتراما لأولويات العمليات حيث ننجز على التوالي:

① الحسابات داخل الأقواس.

② الحسابات المتعلقة بالقوى والجذور التربيعية.

③ عمليات الضرب والقسمة حسب ترتيب كتابتها.

④ عمليات الجمع والطرح حسب ترتيب كتابتها.

4 تعلم البرهنة

1.4 البرهان على صحة مساواة:

✍ للبرهان على صحة مساواة $A = B$ حيث A و B عددان أو عبارتان، يمكن إتباع إحدى الطرق التالية:

طريقة

① ننطلق من أحد الطرفين A أو B ونحول كتابته بتطبيق قواعد الحساب ضمن عدد معين من المراحل المتتابعة إلى أن نفضي إلى الطرف الآخر.

② نحول كتابتي الطرفين A و B إلى أن نفضي إلى نفس العبارة C. ③ نبرهن أن $A - B = 0$.

2.4 معرفة إن كان نص رياضي صحيح أو خاطئ:

مثال

✔ هل مجموع ثلاثه أعداد طبيعية متتالية مضاعف لـ 3؟

- الحكم : هذا النص الرياضياتي صحيح.
- التبرير: ليكن a ، b و c ثلاث أعداد طبيعية متتالية على الترتيب:

$$a + b + c = a + (a+1) + (a+2)$$
$$= 3a + 3 = 3(a+1) = 3k$$

إذن: $a + b + c$ مضاعف للعدد 3.

5 الترتيب - الحصر - المجالات

1.5 الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية:

تعريف

✍ a و b عددان حقيقيان.

* القول إن a أكبر من b أو يساويه معناه $a - b$ عدد موجب. ونكتب: $a \geq b$ معناه $a - b \in \mathbb{R}^+$.

* القول إن a أصغر من b أو يساويه معناه $a - b$ عدد سالب. ونكتب: $a \leq b$ معناه $a - b \in \mathbb{R}^-$.

✍ مقارنة عددين a و b معناه التصريح بصحة إحدى الحالات الثلاث الآتية:

* $a > b$ * $a < b$ * $a = b$

ملاحظات :

✔ ترتيب الأعداد تصاعديا يعني، ترتيب الأعداد من اليمين إلى اليسار ومن الأصغر إلى الأكبر. والعكس صحيح.

✔ نقول أن العددان a و b مرتبان نفس ترتيب العددان c و d إذا كان $a - b$ و $c - d$ لهما نفس الإشارة.

2.5 طرائق المقارنة:

❖ مقارنة عددين عشريين :

طريقة

✍ لمقارنة عددين عشريين نتبع الخطوات التالية:

① ننظر إلى الإشارة.

② نقارن جزئيهما الصحيحان.

③ نقارن جزئيهما العشريان.

❖ مقارنة عددين ناطقين بكتابة كسرية :

✍ a ، b و c أعداد موجبة تماما.

* العددان $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{c}$ لهما نفس الترتيب مع ترتيب a و b.
* العددان $\frac{c}{a}$ و $\frac{c}{b}$ ترتيبهما متعاكسان مع ترتيب العددان a و b.

❖ مقارنة باستعمال عدد ثالث :

مبرهنة

✍ من أجل كل أعداد حقيقية a، b و c:
إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فإن $a \leq c$.

❖ مقارنة عددين حقيقين :

طريقــة

✍ لمقارنة عددين حقيقيين، يمكن:
- استعمال الحاسبة للحصول على قيم مقربة.
- مقارنة كل من العددين بعدد ثالث.
- دراسة إشارة الفرق.

3.5 الترتيب والعمليات:

مبرهنة

✍ من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c :
إذا كان $a \leq b$ فإن $a + c \leq b + c$.

✍ من أجل كل أعداد حقيقية a ، b ، c و d :
إذا كان $(a \leq b$ و $c \leq d)$ فإن $a + c \leq b + d$.

مبرهنة

✍ من أجل كل أعداد حقيقية a ، b ، c و d :
إذا كان $(a \leq b$ و $c \leq d)$ فإن $a - d \leq b - c$.

✍ a ، b و c أعداد حقيقية:
* من أجل $c > 0$ لدينا: $a \leq b$ يكافئ $ac \leq bc$.
* من أجل $c < 0$ لدينا: $a \leq b$ يكافئ $ac \geq bc$.

✍ من أجل كل أعداد حقيقية a ، b ، c و d :
إذا كان $(a \leq b$ و $c \leq d)$ فإن $ac \leq bd$.

4.5 قواعد المقارنة:

مبرهنة

✍ a ، b عددان حقيقيان.
* من أجل $a \geq 0$ و $b \geq 0$
لدينا: $a \leq b$ يكافئ $a^2 \leq b^2$.
* من أجل $a \leq 0$ و $b \leq 0$
لدينا: $a \leq b$ يكافئ $a^2 \geq b^2$.

✍ a ، b عددان حقيقيان موجبان لدينا: $a \leq b$ يكافئ $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

✍ a ، b عددان حقيقيان غير معدومين ومن نفس الإشارة لدينا: $a \leq b$ يكافئ $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

✍ a ، b عددان حقيقيان غير معدومين ومختلفين في الإشارة لدينا: $a \leq b$ يكافئ $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

✍ a عدد حقيقي لدينا:
* إذا كان $0 \leq a \leq 1$ فإن $a^3 \leq a^2 \leq 0$.
* إذا كان $a \geq 1$ فإن $a^3 \geq a^2 \geq 0$.

⚠ **حذار :** من تطبيق قواعد المقارنة بين الأعداد دون أخذ إشارتها بالإعتبار.

طريقـــة

✍ لمقارنة عددين يتضمنان جذورا تربيعية، يمكن مقارنة مربعيهما.

✍ إذا كان مربعا عددين متساويين فإن هذين العددين متساويان أو متعاكسان: أي إذا كان $A^2 = B^2$ فإن: $A = B$ أو $A = -B$.

✍ لمقارنة عددين حقيقيين مكتوبين على الشكل الجبري، يمكن استعمال خواص المتباينات على التوالي.

5.5 الحصر:

تعريف

✍ حصر عدد حقيقي x يعني إيجاد عددين a و b حيث $a \leq x \leq b$.

ملاحظات:

✔ سعة هذا الحصر $a \leq x \leq b$ هي العدد الحقيقي الموجب $b - a$.

✔ إذا كان $a < x < b$ نقول أن العدد x محصور تماما بين العددين الحقيقين a و b.

❖ حصر مجموع عددين حقيقين :

طريقـــة

✍ x و y عددان حقيقيان.

☜ لحصر مجموع عددين حقيقين نطبق خواص المتباينات.

☜ لحصر فرق عددين حقيقين نتذكر أن الطرح يعني إضافة المعاكس أي: $x - y = x + (-y)$.

❖ حصر جداء عددين حقيقين :

طريقـــة

✍ x و y عددان حقيقيان.

☜ لحصر جداء عددين حقيقين نطبق خواص المتباينات.

☜ لحصر حاصل قسمة عددين حقيقين نتذكر أن القسمة تعني الضرب في المقلوب أي: $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$.

6.5 المجالات:

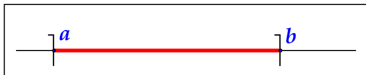
تعريف

✍ a و b عددان حقيقيان حيث $a \leq b$.
نسمي مجالا مغلقا حداه a و b، مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $a \leq x \leq b$ ، ونرمز إليه بالرمز $[a;b]$.

✍ يمثل المجال $[a;b]$ هندسيا بالشكل الآتي حيث A و B نقطتان فاصلتاهما a و b على الترتيب.

❖ أنواع المجالات :

الرمز	هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث ...	يمثل على المستقيم العددي بالشكل ...
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a;b[$	$a \leq x < b$	

$]a;b]$	$a < x \leq b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	
$]-\infty;b]$	$x \leq b$	
$]-\infty;b[$	$x < b$	
$[a;+\infty[$	$a \leq x$	
$]a;+\infty[$	$a < x$	

❖ العناصر المميزة لمجال مغلق:

✍ يتميز المجال $[a,b]$ بالعناصر الآتية:

⋆ مركزه، وهو العدد الحقيقي: $c = \dfrac{a+b}{2}$.

⋆ طوله، وهو العدد الحقيقي الموجب: $b-a$.

⋆ نصف قطره، وهو العدد الحقيقي الموجب $r = \dfrac{b-a}{2}$.

❖ تقاطع وإتحاد مجالين:

تعريف

✍ تقاطع مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I و J، ونرمز له بالرمز $I \cap J$.

✍ إتحاد مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I أو J، ونرمز له بالرمز $I \cup J$.

ملاحظات:

✔ لإيجاد التقاطع أو الإتحاد نقوم بتمثيل المجالين على نفس المستقيم الحقيقي، أو بالملاحظة.

✔ في الحالة العامة: تقاطع مجالين هو مجال، واتحاد مجالين ليس دوما مجال.

6 القيمة المطلقة والمسافة

1.6 القيمة المطلقة لعدد حقيقي:

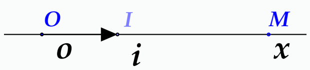
تعريف

✍ x عدد حقيقي، M نقطة من مستقيم مزود بمعلم (O,I) فاصلتها x.

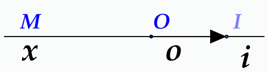
القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة OM، ونرمز لها بالرمز $|x|$. ونكتب $|x| = OM$.

✍ من التعريف نستنتج:

- $x \geq 0$ ، $|x| = OM = x$



- $x \leq 0$ ، $|x| = OM = -x$



نتائج

✍ بما أن المسافة موجبة فإن $|x| \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

✍ من أجل كل عدد حقيقي x:

$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \in [0;+\infty[\\ -x & ; \quad x \in]-\infty;0] \end{cases}.$$

⚠ **حذار:** $(-x)$ ليس عددا سالبا دوما.

خـواص

✍ بفرض x و y عددين حقيقين، لدينا:

* $|-x| = |x|$ * $\sqrt{x^2} = |x|$
* $|xy| = |x| \times |y|$
* $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ مع $y \neq 0$
* $|x+y| \leq |x| + |y|$(المتباينة المثلثية).
* عندما يكون العددان x و y من نفس الإشارة، فإن المتباينة المثلثية تصبح: $|x+y| = |x| + |y|$.

2.6 المسافة بين نقطتين:

مبرهنة

✍ إذا كان A و B نقطتين من مستقيم مزود بمعلم $(O;I)$ فاصلتاهما a و b على الترتيب، فإن:
$AB = |a-b| = |b-a|$.

3.6 المسافة بين عددين حقيقيين:

تعريف

✍ المسافة بين عددين حقيقيين a و b هي العدد $|a-b|$ (أو $|b-a|$).
ونكتب $d(a;b) = |a-b| = |b-a|$.

4.6 القيمة المطلقة، المسافة، المجال والحصر:

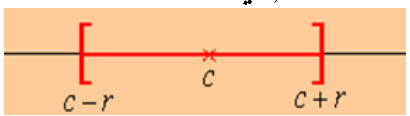
مبرهنة

✍ c عدد حقيقي، r عدد حقيقي موجب. من أجل كل عدد حقيقي x،
$|x-c| \leq r$ معناه $x \in [c-r;c+r]$.

نتيـجة

✍ c عدد حقيقي كيفي و r عدد حقيقي موجب. من أجل كل عدد حقيقي x، النصوص الآتية متكافئة:

* $x \in [c-r;c+r]$ (في صيغة مجال).
* $c-r \leq x \leq c+r$ (في صيغة حصر).
* $d(c;x) \leq r$ (في صيغة مسافة).
* $|x-c| \leq r$ (في صيغة قيمة مطلقة).



5.6 القيم المقربة لعدد حقيقي:

تعريف

✍ بفرض عدد حقيقي a وعدد عشري d وعدد طبيعي n.
القول أن d قيمة مقربة عشرية إلى 10^{-n} للعدد a معناه المسافة من a إلى d أصغر من 10^{-n} بعبارة أخرى $|a-d| < 10^{-n}$.
وتبعا لكون $d \leq a$ أو $a \leq d$ ، نتحدث عن قيمة مقربة بالنقصان أو بالزيادة.

6.6 إشارة ثنائي حد من الدرجة الأولى:

مبرهنة

✍ a و b عددان حقيقيان حيث $a \neq 0$، إشارة ثنائي الحد $ax+b$ هي:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
إشارة $ax+b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

7.6 حل معادلة أو متراجحة تتضمن القيمة المطلقة:

❖ **الحل البياني:**

طريقـــة

لحل معادلة أو متراجحة تتضمن قيما مطلقة، نعبر عن القيم المطلقة بعبارات المسافة على المستقيم العددي ونترجم المساويات أو المتباينات بعبارات المسافة بين نقطتين.

❖ **الحل الجبري (فصل الحالات):**

طريقـــة

لحل معادلة أو متراجحة تتضمن قيما مطلقة نتبع مايلي:

① ندرس إشارة العبارة الموجودة داخل القيمة المطلقة.

② اعتمادا على إشارة العبارة نكتبها دون رمز القيمة المطلقة (نفصل الحالات حسب المجالات).

③ حل المعادلة أو المتراجحة في الحالة الجديدة.

④ نتأكد من إنتماء الحلول إلى المجالات حسب الحالات.

النجاح سلالم لا تستطيع أن ترتقيها ويدك في جيبك.

بالتوفيق في السنة الدراسية