عموميات على الدوال

Prof Mustapha
KHALDI

I. تعاريف ومصطلحات

- الدالة ببساطة هي العبارة التي ترفق بكل عدد x صورة له y
- نرمز للدوال بالرمز $f(x)$، $g(x)$، $h(x)$ ....الخ
- تسمى $f(x)$ أو y حيث $f(x) = y$ الدالة أو الصورة أو الترتيبة
- يسمى x المتغير أو السابقة أو الفاصلة
- كل دالة معرفة على مجال يسمى مجموعة التعريف D

✱ملاحظة مهمة

يمكن للصورة أن يكون لها عدة سوابق لكن العكس غير صحيح للسابقة صورة وحيدة فقط

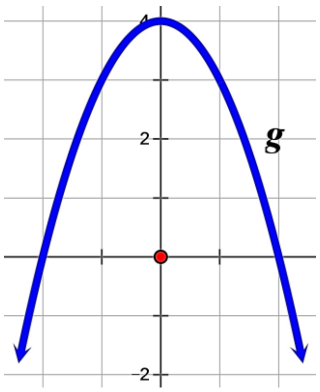
II. طرق تعريف الدوال

① دالة معرفة بدستور

مثال: $f(x) = x^2 + 2x + 1$

- مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
- صورة العدد 3 بالدالة f هي $f(3) = 3^2 + 2(3) + 1 = \boxed{16}$
- سوابق العدد 1 بالدالة f هي $f(x) = 1$ أي $x^2 + 2x + 1 = 1 \Leftarrow x^2 + 2x = 0$
  $\Leftarrow x(x+2) = 0 \Leftarrow x = \boxed{0}$ أو $x = \boxed{-2}$

② دالة معرفة بتمثيل بياني



مثال: الشكل المقابل يمثل تمثيل بياني لدالة g

- مجموعة تعريف الدالة g هي $D_g =]-3; 3[$
- صورة العدد 1 بالدالة g هي 3 و صورة 0 هي 4
- سوابق العدد 3 بالدالة g هي 1 و -1 وسوابق 0 هي 2 و -2
- العدد 5 ليس له سوابق بالدالة g

③ دالة معرفة بجدول تغيرات

x	0	4	9	$+\infty$
تغيرات h	0 ↗	2 ↗	3 ↗	

مثال: الجدول المقابل يمثل جدول تغيرات لدالة h

- مجموعة تعريف الدالة h هي $D_h = [0; +\infty[$
- صورة العدد 0 بالدالة h هي 0 و صورة 4 هي 2
- سابقة العدد 3 بالدالة h هي 9
- العدد -1 ليس له سوابق بالدالة h

④ دالة معرفة بجدول قيم

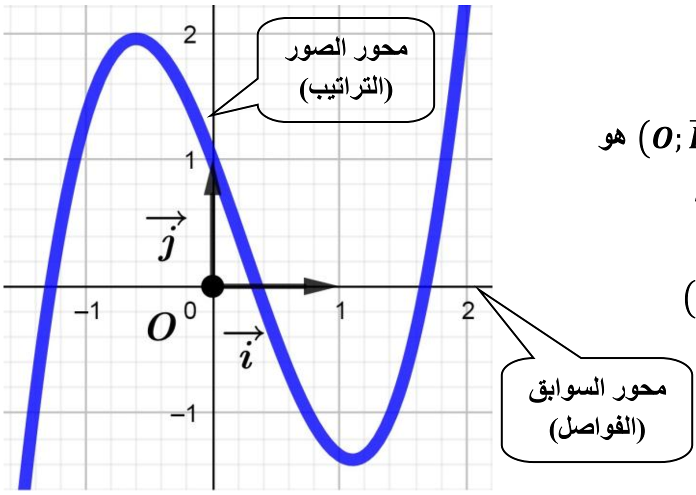
الطرود البريدية	
الوزن (Kg)	التعريفة (DA)
$]0; 5]$	25
$]5; 10]$	40
$]10; 15]$	62
$]15; 20]$	83
$]20; 30]$	110

مثال: يمثل الجدول المقابل تعريفات بريد الجزائر لسنة 2005

إذا رمزنا للطرود البريدية بالدالة h فإن:

- مجموعة تعريف الدالة h هي $D_h =]0; 30]$
- صورة 12 بالدالة h هي 62
- سوابق 83 هي كل الأعداد من المجال $]15; 20]$
- مثلا العدد 70 ليس له سوابق بالدالة h

III. التمثيل البياني لدالة



- التمثيل البياني أو المنحنى الممثل للدلة f في المعلم $(O;\vec{I},\vec{J})$ هو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $x \in D_f$ و $y = f(x)$
- نرمز إلى منحنى الدالة f بالرمز C_f
- نقول أن $y = f(x)$ هي معادلة C_f في المعلم $(O;\vec{I},\vec{J})$

✱تنبيه وملاحظة مهمة

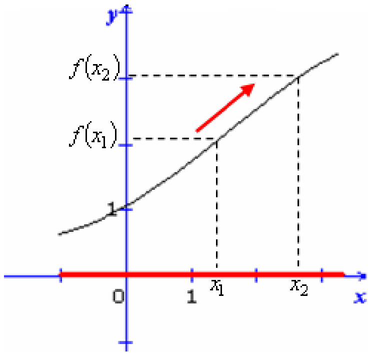
ما عدا الدوال الخطية، التآلفية والثابتة لا يمكن رسم أي دالة أخرى عن طريق الجدول المساعد أو النقاط المساعدة لأنه هناك العديد من الكيفيات للمرور من نقطة إلى أخرى فمن الضروري أن تعطى معلومات أخرى حول سلوك الدالة وسنتعلم في محور الدوال المرجعية إحدى الطرق الرئيسية لرسم الدوال.

IV. تغيرات الدالة

① **دراسة اتجاه التغير:** تعيين المجالات التي تكون فيها الدالة متزايدة تماما، متناقصة تماما أو ثابتة

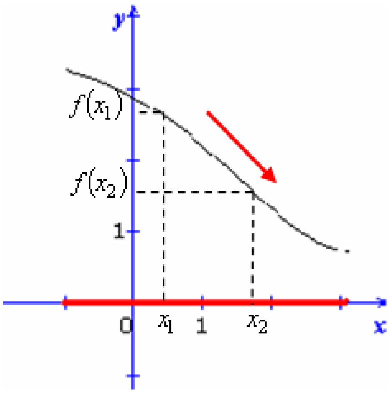
	إذا كان	و	فإن
❶	$x_1 < x_2$	$f(x_1) < f(x_2)$	f متزايدة
❷	$x_1 < x_2$	$f(x_1) > f(x_2)$	f متناقصة
❸		$f(x_1) = f(x_2)$	f ثابتة

Prof Mustapha
KHALDI



$f(x_1)$ ، $f(x_2)$ في نفس ترتيب x_1 ، x_2

الدالة المتزايدة تحفظ الترتيب



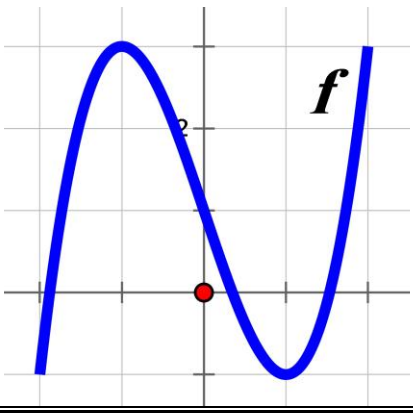
$f(x_1)$ ، $f(x_2)$ في عكس ترتيب x_1 ، x_2

الدالة المتناقصة تعكس الترتيب

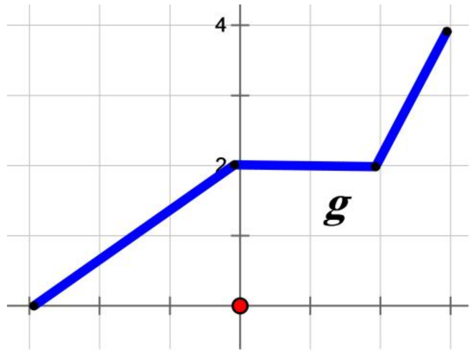
② **جدول التغيرات:** هو جدول نلخص فيه كل المعطيات عن الدوال كمجموعة التعريف واتجاه التغير والصور والسوابق والقيم الحدية...الخ

__مثال:__ جدول التغيرات التالي يلخص المنحنى المقابل الممثل للدالة f

x	-2		-1		1		2
$f(x)$	-1	↗	3	↘	-1	↗	3



✱الفرق بين متزايدة ومتزايدة تماما



مثال:

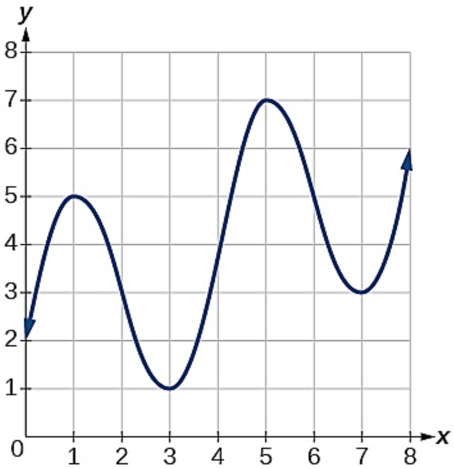
- الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-3;0]$
- الدالة g ثابتة على المجال $[0;2]$
- الدالة g متزايدة تماما على المجال $[2;3]$

✱ لكن على المجال $[-3;3]$ نقول فقط أن الدالة g متزايدة

○ نفس المفهوم بالنسبة لمتناقصة ومتناقصة تماما

V]. القيم الحدية

① **القيمة الحدية العظمى:** هي أكبر صورة $f(a)$ تبلغها f عند سابقة a من D_f



نعبر عليها وفق المثال بثلاث صيغ فنقول:

- القيمة الحدية الكبرى للدالة f هي $(5;7)$
- أو القيمة الحدية الكبرى للدالة f هي 7 عند 5
- أو القيمة الحدية الكبرى للدالة f هي $f(5)=7$

② **القيمة الحدية الصغرى:** هي أصغر صورة $f(b)$ تبلغها f عند سابقة b من D_f

نعبر عليها وفق المثال بثلاث صيغ فنقول:

- القيمة الحدية الصغرى للدالة f هي $(3;1)$
- أو القيمة الحدية الصغرى للدالة f هي 1 عند 3
- أو القيمة الحدية الصغرى للدالة f هي $f(3)=1$

✱ملاحظة:

- يمكن للدالة أن تبلغ قيمتها العظمى أو الصغرى على مجال عند أكثر من عنصر من هذا المجال
- القيم الحدية دائما تكون عددا حقيقيا (بمعنى $-\infty$ و $+\infty$ لا يمكن أن يكونا قيم حدية)

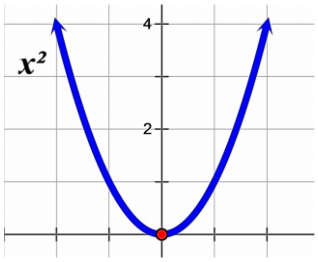
VI]. شفعية الدالة (أي زوجية أو فردية أم لا زوجية لا فردية)

① حسابيا

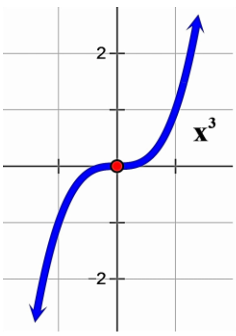
f زوجية $\Leftarrow \begin{cases} D_f \text{ متناظرة بالنسبة إلى } 0 \\ \boxed{f(-x)=f(x)} \end{cases}$

f فردية $\Leftarrow \begin{cases} D_f \text{ متناظرة بالنسبة إلى } 0 \\ \boxed{f(-x)=-f(x)} \end{cases}$

② بيانيا



الدالة الزوجية متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب



الدالة الفردية متناظرة بالنسبة للمبدأ

Prof Mustapha
KHALDI

③ **الدالة لا زوجية لا فردية:** هي الدالة التي لا يمكن كتابتها على الشكل $f(-x)=f(x)$ ولا على الشكل $f(-x)=-f(x)$ ومنحناها غير متناظر بالنسبة لمحور التراتيب و لا بالنسبة للمبدأ

✱ملاحظة: للبرهان أن دالة ما لا زوجية و لا فردية يكفي إيجاد عنصر a من D_f بحيث $f(-a)\neq f(a)$ و $f(-a)\neq -f(a)$ أو إثبات أن D_f غير متناظرة بالنسبة إلى 0

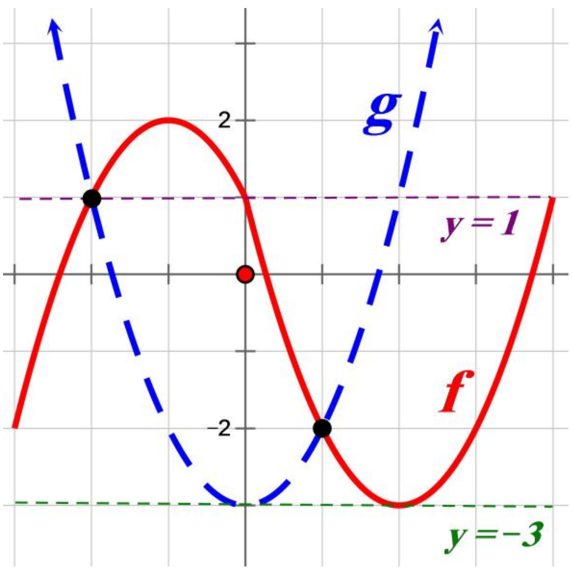
VII]. حل معادلات ومتراجحات بيانيا

$f(x) = g(x) \Leftarrow$ فواصل نقط **تقاطع** C_f مع C_g

$f(x) > g(x) \Leftarrow$ المجال من x أين يكون C_f **فوق** C_g

$f(x) < g(x) \Leftarrow$ المجال من x أين يكون C_f **تحت** C_g

مثال شامل:



$D_f = [-3; 4]$ و $D_g = [-2,5; 2,5]$

$f(x) = g(x) \Rightarrow x \in \{-2; 1\}$

$f(x) \geq g(x) \Rightarrow x \in [-2; 1]$

$f(x) > g(x) \Rightarrow x \in]-2; 1[$

$f(x) \leq g(x) \Rightarrow x \in [-3; -2] \cup [1; 4]$

$f(x) < g(x) \Rightarrow x \in]-3; -2[\cup]1; 4[$

$f(x) = 1 \Rightarrow x \in \{-2; 0; 4\}$

$f(x) \geq 1 \Rightarrow x \in [-2; 0]$

$f(x) < 1 \Rightarrow x \in [-3; -2[\cup]0; 4]$

$g(x) = 1 \Rightarrow x \in \{-2; 2\}$

$g(x) > 1 \Rightarrow x \in [-2,5; -2[\cup]2; 2,5]$

$g(x) \leq 1 \Rightarrow x \in [-2; 2]$

$f(x) = -3 \Rightarrow x = 2$

$g(x) = -3 \Rightarrow x = 0$

$f(x) \geq -3 \Rightarrow x \in [-3; 4]$

$g(x) > -3 \Rightarrow x \in [-2,5; 0[\cup]0; 2,5]$

$f(x) \leq -3 \Rightarrow x = 2$

$g(x) < -3 \Rightarrow S = \emptyset$

$f(x) \geq 3 \Rightarrow S = \emptyset$

$g(x) \leq -4 \Rightarrow S = \emptyset$

* نرمز للمجموعة الخالية بالرمز $\emptyset$ أو بالرمز {}

VIII]. إشارة الدالة

① حسابيا

f موجبة $\Leftarrow f(x) > 0$

f سالبة $\Leftarrow f(x) < 0$

f معدومة $\Leftarrow f(x) = 0$

② بيانيا

f موجبة $\Leftarrow$ C_f فوق محور الفواصل

f سالبة $\Leftarrow$ C_f تحت محور الفواصل

f معدومة $\Leftarrow$ C_f يقطع محور الفواصل

IX]. تقاطع دالة مع محوري الاحداثيات

- C_f يقطع محور الفواصل $\Leftarrow \boxed{f(x) = 0}$
- C_f يقطع محور التراتيب $\Leftarrow \boxed{x = 0}$

Prof Mustapha
KHALDI