1.1 العمليات على الأعداد الطبيعية و الأعداد الناطقة

العمليات على الأعداد الطبيعية و الأعداد الناطقة

1 قواعد الحساب على قوى العدد 10 :

$$(10^m)^n = 10^{m\times n} \quad ، \quad \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n} \quad ، \quad 10^m \times 10^n = 10^{m+n}$$

حيث m و n عددان صحيحان نسبيان.

2 A عدد عشري ، كتابته العلمية من الشكل : $A = a \times 10^n$ حيث a عدد عشري مكتوب برقم واحد غير معدوم قبل الفاصلة ، و n عدد صحيح نسبي.

3 القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين (خوارزمية الفروق المتتابعة) هو آخر فرقٍ غير معدوم ، و لايجاده نطبق الخاصية : $PGCD(a;b) = PGCD(b;a-b)$ و $a > b$.

4 القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين (خوارزمية إقليدس) هو آخر باقٍ غير معدوم ، و لايجاده نطبق الخاصية : $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$ و r هو باقي القسمة الاقليدية لـ a على b.

5 لكتابة كسر معطى على شكل كسر غير قابل للاختزال ، نقسم كل من بسطه و مقامه على القاسم المشترك الأكبر لهما.

6 نقول عن العددين a و b أنهما أوليان فيما بينهما إذا كان : $PGCD(a;b) = 1$.

أتمرّن:

1 اكتب على شكل قوة واحدة للعدد 10 ما يلي :

$$\left(\frac{10^4\times 10^{-7}}{10^9}\right)^{-2} \quad ، \quad \frac{(10^{-3})^2}{10^{-8}} \quad ، \quad \frac{10^5\times 10^4}{10^7}$$

2 اكتب ما يلي كتابة علمية :

$$C = \frac{121\times 10^2\times 10^{-8}}{44\times (10^3)^5} \quad ، \quad B = \frac{36\times (10^2)^{-6}}{1,6\times 10^4\times 25} \quad ، \quad A = \frac{5,2\times 10^{-3}}{2,5\times 10^7}$$

3 أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 561 و 231 بتطبيق خوارزمية الفروق المتتالية.

4 أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 243 و 135 بتطبيق خوارزمية إقليدس.

5 اكتب على شكل كسر غير قابل للاختزال كل من $\frac{561}{231}$ و $\frac{135}{486}$.

6 احسب قيمة كل من العبارتين A و B حيث :

$$B = \frac{135}{486} \div \frac{25}{9} - \frac{3}{10} \quad ، \quad A = \frac{12}{7} + \frac{561}{231} \times \frac{1}{3}$$

7 بيّن أنّ العددين 146 و 125 أوليان فيما بينهما.

8 هل العددان 147 و 105 أوليان فيما بينهما ؟

9 x و y عددان طبيعيان غير معدومين حيث : $105x = 147y$.

◄ اكتب الكسر $\frac{x}{y}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

الحل:

1 الكتابة على شكل قوة واحدة للعدد 10 :

$$\frac{10^5\times 10^4}{10^7} = \frac{10^{5+4}}{10^7} = 10^{9-7} = 10^2$$

$$\frac{(10^{-3})^2}{10^{-8}} = \frac{10^{-3\times 2}}{10-8} = 10^{-6-(-8)} = 10^2$$

$$\left(\frac{10^4\times 10^{-7}}{10^9}\right)^{-2} = \left(\frac{10^{4-7}}{10^9}\right)^{-2} = (10^{-3-9})^{-2} = 10^{-12\times(-2)} = 10^{24}$$

2 كتابة كل من الأعداد A ، B ، C كتابة علمية :

$$A=\frac{5,2\times10^{-3}}{2,5\times10^{7}}=\frac{5,2}{2,5}\times\frac{10^{-3}}{10^{7}}=2,08\times10^{-3-7}=2,08\times10^{-10}$$

$$B=\frac{36\times\left(10^{2}\right)^{-6}}{1,6\times10^{4}\times25}=\frac{36}{1,6\times25}\times\frac{\left(10^{2}\right)^{-6}}{10^{4}}=0,9\times10^{2\times(-6)-4}=0,9\times10^{-16}=9\times10^{-17}$$

$$C=\frac{121\times10^{2}\times10^{-8}}{44\times\left(10^{3}\right)^{5}}=\frac{121}{44}\times\frac{10^{2}\times10^{-8}}{\left(10^{3}\right)^{5}}=2,75\times\frac{10^{2-8}}{10^{3\times5}}=2,75\times10^{-6-15}=2,75\times10^{-21}$$

3 إيجـــاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 561 و 231 بتطبيق خوارزمية الفروق المتتالية:

$561-231=330$
$330-231=99$
$231-99=132$
$132-99=33$
$99-33=66$
$66-33=33$
$33-33=0$

إذا القاسم المشترك الأكبر للعددين 561 و 231 هو 33 ، و نكتب: $PGCD(561;231)=33$

4 إيجـــاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 243 و 135 بتطبيق خوارزمية إقليدس:

$243=135\times1+108$
$135=108\times1+27$
$108=27\times4+0$

إذا القاسم المشترك الأكبر للعددين 243 و 135 هو 27 ، و نكتب : $PGCD(243;135)=27$

5 الكتابة على شكل كسر غير قابل للاختزال كل من $\frac{561}{231}$ و $\frac{135}{486}$:

$$\frac{561}{231}=\frac{561\div33}{231\div33}=\frac{17}{7}$$

$$\frac{135}{486}=\frac{1}{2}\times\frac{135}{243}=\frac{1}{2}\times\frac{135\div27}{243\div27}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{18}$$

6 حساب قيمة كل من العبارتين A و B :

$$A=\frac{12}{7}+\frac{561}{231}\times\frac{1}{3}=\frac{12}{7}+\frac{17}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{12}{7}+\frac{17\times1}{7\times3}=\frac{12\times3+17}{21}=\frac{53}{21}$$

$$B=\frac{135}{486}\div\frac{25}{9}-\frac{3}{10}=\frac{5}{18}\times\frac{9}{25}-\frac{3}{10}=\frac{5\times9}{2\times9\times5\times5}-\frac{3}{10}=\frac{1}{10}-\frac{3}{10}=-\frac{2}{10}=-\frac{1}{5}$$

7 تبيان أنّ العددين 146 و 125 أوليان فيما بينهما :

لدينا:

$146=125\times1+21$
$125=21\times5+20$
$21=20\times1+1$
$20=1\times20+0$

إذا : $PGDC(146;125)=1$ و منه العددان 146 و 125 أوليان فيما بينهما.

8 العددان 147 و 105 ليسا أوليان فيما بينهما ، لأنّ كل منهما يقبل القسمة على 3.

(قواعد قابلية القسمة).

و بطريقة أخرى نقول : العددان 147 و 105 ليسا أوليان فيما بينهما ، لأنّ : $PGCD(147;105)\neq1$.

لدينا :

$147=105\times1+42$
$105=42\times2+21$
$42=21\times2+0$

إذا $PGDC(147;105)=21$ و منه العددان 147 و 105 ليسا أوليان فيما بينهما.

9 كتابة الكسر $\frac{x}{y}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال (إيجاد الكسر $\frac{x}{y}$ أولا ثم اختزاله):

$$105x=147y \qquad x=\frac{147y}{105} \qquad \frac{x}{y}=\frac{147}{105}$$

$$\frac{\cancel{105}x}{\cancel{105}}=\frac{147y}{105} \qquad \frac{x}{y}=\frac{147\cancel{y}}{105\cancel{y}} \qquad \frac{x}{y}=\frac{147\div21}{105\div21} \qquad \frac{x}{y}=\frac{7}{5}$$

2.1 العمليات على الجذور

العمليات على الجذور

1 a عدد موجب ، $\sqrt{a^2}=a$.

2 a و b عددان موجبان و : $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$.

3 a و b عددان موجبان : $\sqrt{a^2\times b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=a\sqrt{b}$

4 لتبسيط عبارة من الشكل : $a\sqrt{d}+b\sqrt{d}+c\sqrt{d}$ نُطبّق الخاصة التوزيعية : $(a+b+c)\sqrt{d}$ حيث d عدد طبيعي.

5 لكتابة النسبة $\frac{a}{\sqrt{b}}$ على شكل نسبة مقامها عدد ناطق ، نضرب كلا من بسط و مقام هذه النسبة في العدد $\sqrt{b}$ حيث $b\neq0$.

6 حل معادلة من الشكل : $x^2=a$ حيث a عدد كيفي (حقيقي) معطى يكون حسب إشارة العدد a.

- إذا كان $a>0$ فإنّ المعادلة $x^2=a$ تقبل حلّين متعاكسين هما : $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$.
- إذا كان $a=0$ فإنّ المعادلة $x^2=a$ تقبل حلاّ واحدا هو العدد 0.
- إذا كان $a<0$ فإنّ المعادلة $x^2=a$ لا تقبل أية حلول.

أتمرّن:

1 احسب ما يلي : $\sqrt{9}$ ، $\sqrt{25}$ ، $\sqrt{49}$

2 اكتب كلا من الأعداد : $\sqrt{27}$ ، $\sqrt{75}$ ، $\sqrt{147}$ على الشكل $a\sqrt{3}$ حيث a عدد طبيعي.

3 اكتب العدد $E=4\sqrt{27}+2\sqrt{75}-4\sqrt{147}$ على الشكل $b\sqrt{3}$ حيث b عدد صحيح نسبي.

4 اجعل مقام كل نسبة مما يلي عددا ناطقا : $\frac{-13}{\sqrt{7}}$ ، $\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$ ، $\frac{4}{-9\sqrt{3}}$.

5 حُل المعادلات التالية إن أمكن: $x^2=9$ ، $x^2=13$ ، $3x^2-7=20$ ، $x^2=-16$

الحل:

1 حساب كل من $\sqrt{9}$ ، $\sqrt{25}$ ، $\sqrt{49}$:

$\sqrt{9}=3$ $\qquad$ $\sqrt{25}=5$ $\qquad$ $\sqrt{49}=7$

2 كتابة كلا من الأعداد : $\sqrt{27}$ ، $\sqrt{75}$ ، $\sqrt{147}$ على الشكل $a\sqrt{3}$ حيث a عدد طبيعي

$$\sqrt{147}=\sqrt{49}\times\sqrt{3}=7\sqrt{3} \qquad \sqrt{75}=\sqrt{25}\times\sqrt{3}=5\sqrt{3} \qquad \sqrt{27}=\sqrt{9}\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

3 كتابة العدد E على الشكل $b\sqrt{3}$ حيث b عدد صحيح نسبي :

$$\begin{aligned}E&=4\sqrt{27}+2\sqrt{75}-4\sqrt{147}\\&=4\times3\sqrt{3}+2\times5\sqrt{3}-4\times7\sqrt{3}\\&=(4\times3+2\times5-4\times7)\sqrt{3}\\&=(12+10-28)\sqrt{3}\\&=-6\sqrt{3}\end{aligned}$$

4 كتابة مقام كل مما يلي على شكل عدد ناطق :

$$\frac{4}{-9\sqrt{3}}=\frac{4\times\sqrt{3}}{-9\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{-9\times 3}=-\frac{4\sqrt{3}}{27}$$

$$\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\times\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}}{2\times 5}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}}{10}$$

$$\frac{-13}{\sqrt{7}}=\frac{-13\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{-13\sqrt{7}}{7}$$

5 حَـــل كل من المعادلات التالية إن أمكن :

◄ $x^2=9$ يعنـــي أنّ : $x=\sqrt{9}$ أو $x=-\sqrt{9}$ أي $x=3$ أو $x=-3$

◄ $x^2=13$ يعنـــي أنّ : $x=\sqrt{13}$ أو $x=-\sqrt{13}$

◄ $3x^2-7=20$ يعني أنّ : $3x^2=27$ و منه : $x^2=\frac{27}{3}=9$

إذا $x=\sqrt{9}$ أو $x=-\sqrt{9}$ أي $x=3$ أو $x=-3$.

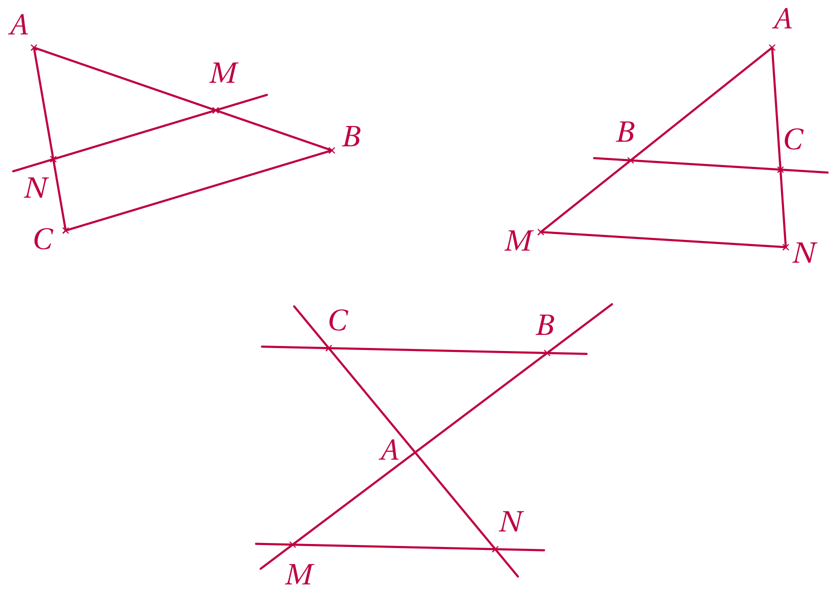
◄ المعادلة $x^2=-16$ لا تقبل حلـــولا.

3.1 خاصية طالس – الخاصية العكسية لطالس

خاصية طالس – الخاصية العكسية لطالس

1 (BM) و (CN) مستقيمان متقاطعان في النقطة A.

◄ إذا كان (BC) و (MN) متوازيان فإنّ : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$.



2 إذا كانت النقط A ، M ، B و النقط A ، N ، C في استقامية و بنفس الترتيب

و كان $\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}$ ، فإنّ المستقيمين ، (MN) و (BC) متوازيان.

أتمرّن:

1 ABC مثلث حيث : $AB=6,3cm$ ، $AC=4,5cm$ ، $BC=5,4cm$.

N نقطة من $[AB]$ حيث : $AN=4,2cm$.

المستقيم الذي يشمل النقطة N و يوازي المستقيم (BC) يقطع المستقيم (AC) في النقطة M.

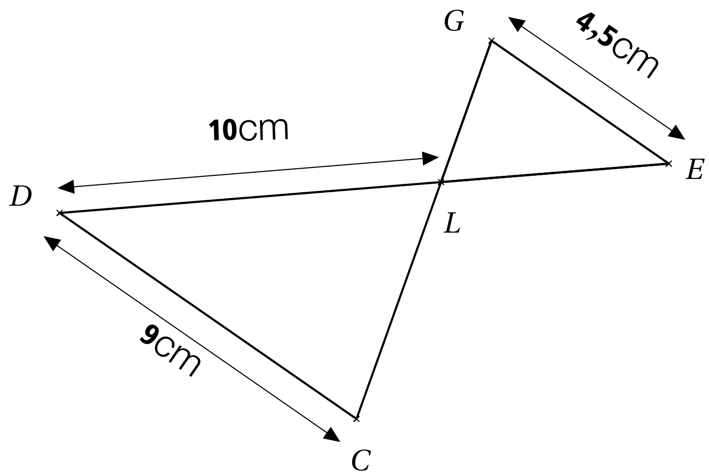
◄ أنشئ شكلا مناسبا.

◄ احسب الطــولين AM و MN.

2 في الشكل النوالي المستقيمان (EG) و (CD) متوازيان.

◄ احسب الطـــــول LE.

◄ احسب الطـــــول LG إذا علمت أنّ $LC = 6cm$.

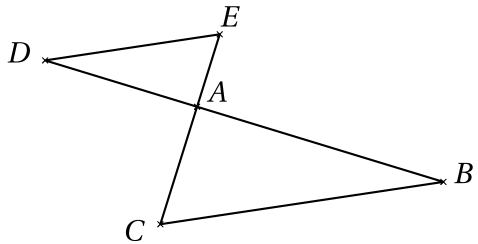


3 في كل من الشكلين المواليين أثبت أنّ : $(ED)//(BC)$ و $(ST)//(DC)$.

الشكل 1

$AB = 18cm$ ، $AD = 13,5cm$

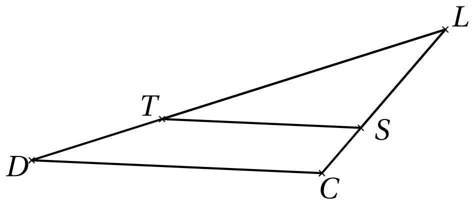
$AE = 12cm$ ، $AC = 16cm$



الشكل 2

$LD = 19,53cm$ ، $LC = 11,97cm$

$LS = 5,7cm$ ، $LT = 9,3cm$

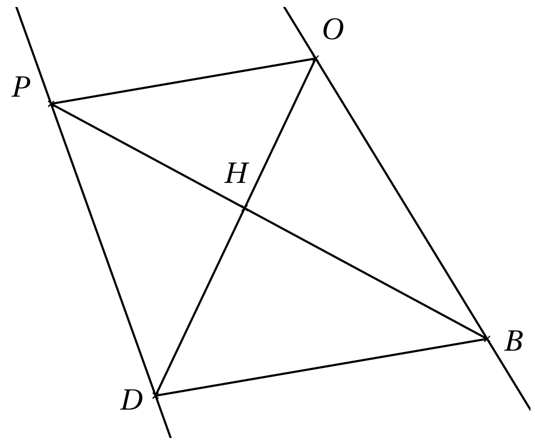


4 في الشكل الموالي هل المستقيمان (OB) و (PD) متوازيان؟

يُعطـــــى :

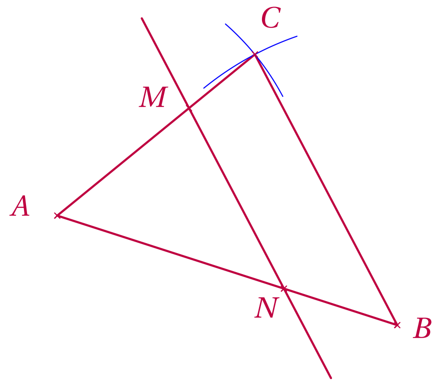
$HO = 10cm$ ، $HP = 11,5cm$

$HD = 12,4cm$ ، $HB = 14,26cm$



الحل:

1 ◄ إنشاء شكلا مناسبا :



◄ حساب كل من الطولين AM و MN:

① حساب الطـــول AM :

بما أنّ $N \in (AB)$ و $M \in (AC)$ و $(BC)//(MN)$ فإنّ : $\frac{AM}{AC}=\frac{AN}{AB}=\frac{MN}{BC}$ حسب خاصية طالس.

لدينا : $\frac{AM}{AC}=\frac{AN}{AB}$

و منه : $AM=\frac{AC\times AN}{AB}$

و بالتعويـــض نجـــد : $AM=\frac{4,5\times 4,2}{6,3}$

إذن : $AM=3cm$

② حساب الطـــول MN :

لدينا : $\frac{MN}{BC}=\frac{AN}{AB}$

و منه : $MN=\frac{BC\times AN}{AB}$

و بالتعويـــض نجـــد : $MN=\frac{5,4\times 4,2}{6,3}$

إذن : $MN=3,6cm$

2 حساب كل من الطـــولين LE و LG :

بما أنّ المستقيمين (EG) و (CD) متوازيان و بما أنّ المستقيمين (ED) و (GC) متقاطعان فـــي النقطة L

فإن : $\frac{LE}{LD}=\frac{LG}{LC}=\frac{EG}{CD}$ حسب خاصية طالس.

◄ حساب الطـــول LE :

لدينا : $\frac{LE}{LD}=\frac{EG}{CD}$

و منه : $LE=\frac{LD\times EG}{CD}$

و بالتعويـــض نجـــد : $LE=\frac{10\times 4,5}{9}$

إذن : $LE=5cm$

◄ حساب الطـــول LG علما أنّ $LC=6cm$:

لدينا : $\frac{LG}{LC}=\frac{EG}{CD}$

و منه : $LG=\frac{LC\times EG}{CD}$

و بالتعويـــض نجـــد : $LG=\frac{6\times 4,5}{9}$

إذن : $LG=3cm$

3 إثبات أنّ $(ED)//(BC)$ و $(ST)//(DC)$ في كل من الشكلين السابقين :

الشكل 1

إثبات أنّ المستقيمين (BC) و (ED) متوازيان :

بما أنّ النقط D ، A ، B و النقط E ، A ، C فـــي استقامية و بنفس التريب.

و بما أنّ : $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$ $\left(\frac{AE}{AC} = \frac{12}{16} = 0,75 \;;\; \frac{AD}{AB} = \frac{13,5}{18} = 0,75\right)$

فإنّ المستقيمين (BC) و (ED) متوازيان حسب خاصية طالس العكسية.

الشكل 2

إثبات أنّ المستقيمين (DC) و (ST) متوازيان :

بما أنّ النقط L ، S ، C و النقط L ، T ، D فـــي استقامية و بنفس التريب.

و بما أنّ : $\frac{LT}{LD} = \frac{LS}{LC}$ $\left(\frac{LT}{LD} = \frac{9,3}{19,53} \simeq 0,47 \;;\; \frac{LS}{LC} = \frac{5,7}{11,97} \simeq 0,47\right)$

فإنّ المستقيمين (DC) و (ST) متوازيان حسب خاصية طالس العكسية.

4. المستقيمان (OB) و (PD) غير متوازيين.

لدينا : النقط O ، H ، D و النقط B ، H ، P فـــي استقامية و بنفس التريب.

و $\frac{HP}{HB} \neq \frac{HD}{HO}$ $\left(\frac{HP}{HB} = \frac{11,5}{14,26} \simeq 0,8 \;;\; \frac{HD}{HO} = \frac{12,4}{10} = 1,24\right)$

إذا المستقيمان (OB) و (PD) غير متوازيين حسب خاصية طالس العكسية.

4.1 الدائرة المحيطة بالمثلث القائم

الدائرة المحيطة بالمثلث القائم

1. إذا كان المثلث قائـــا ، فإنّ وتره قطرٌ للدائـــرة المحيطة به.
2. إذا كان أحـــد أضلاع مثلث قطرا للدائـــرة المحيطة به ، فإنّ هذا المثلث قائـــم.

أتـمرّن:

1. EFG مثلث قائم فـــي E.
   - حدّد مركز الدائرة المحيطة به.
2. (C) دائرة قطرها $[RT]$ ، S نقطة من (C).
   - بيّن أنّ المثلث RST قائم في S.

الحل:

1. بما أنّ المثلث EFG قائم فـــي E فإنّ وتره $[FG]$ قطرا اللدائرة المحيطة به ، و منه مركز هذه الدائرة هو منتصف هذا الوتـــر.
2. بما أنّ S نقطة من الدائرة (C) فإنّ هذه الدائرة محيطة بالمثلث RST.

   و بما أنّ الضلع $[RT]$ قطر لها فإنّ المثلث RST قائـــم في S و وتـــره $[RT]$.

5.1 المتوسط المتعلق بالوتر في المثلث القائم

المتوسط المتعلق بالوتر في المثلث القائم

1 إذا كان مثلث قائـمـا ، فإنّ طول المتوسط المتعلق بوتر هذا المثلث يساوي نصف طول هذا الوتــر.

2 إذا كان في مثلث طول المتوسط المتعلق بأحد أضلاعه مساويا لنصف طول هذا الضلع ، فإنّ هذا المثلث قائــم.

أتمرّن:

1 MNL مثلث قائم فــي L حيث : $MN = 17cm$ و النقطة G منتصف $[MN]$.

◄ احسب الطــــول LG.

2 OPQ مثلث حيث : $OP = 14,8cm$ $OQ = 11,1cm$ $PQ = 18,5cm$.

النقطة R منتصف $[PQ]$ و $OR = 9,25cm$.

◄ بيّن أنّ المثلث OPQ قائم.

الحل:

1 حساب الطــــول LG :

بما أنّ المثلث MNL قائــم في L ، و بما أنّ G منتصف $[MN]$ فإنّ LG هو طول المتوسط المتعلق بالوتر $[MN]$.

و منه : $LG = \frac{1}{2}MN$ أي : $LG = 8,5cm$ حسب خاصية المتوسط المتعلق بالوتر في مثلث قائم.

2 تبيان أنّ المثلث OPQ قائــم :

بما أنّ النقطة R منتصف $[PQ]$ و $OR = \frac{1}{2}PQ$ $\left(\frac{1}{2} \times 18,5 = 9,25\right)$

فإنّ المثلث OPQ قائم في O وتره PQ حسب الخاصية العكسية للمتوسط المتعلق بالوتر في مثلث قائم.

6.1 الخاصية و الخاصية العكسية لفيثاغورس

الخاصية و الخاصية العكسية لفيثاغورس

1 إذا كان مثلثٌ قائــما ، فإنّ مربع طــول وتره يساوي مجمــوع مربعــي طولــي ضلعيه الآخرين.

2 إذا كان في مثلث مربع طول أحد أضلاعه يساوي مجموع مربعــي طولــي الضلعين الآخرين ، فإنّ هذا المثلث قائمٌ.

أتمرّن:

1 ABC مثلث قائم فــي A حيث : $AB = 8,1cm$ و $AC = 10,8cm$

◄ احسب الطــــول BC.

2 EFG مثلث قائم فــي E حيث : $EF = 5,7cm$ و $FG = 9,5cm$

◄ احسب الطــــول EG.

3 RST مثلث حيث : $RS = 4,2cm$ و $RT = 14,4cm$ و $ST = 15cm$.

◄ بيّن أنّ المثلث RST قائم في R.

4 LMN مثلث حيث : $LM = 6cm$ و $LN = 4,5cm$ و $MN = 9cm$.

◄ هل المثلث LMN قائم ؟ علّل.

الحل:

1 حساب الطــــول BC :

بما أنّ المثلث ABC قائـــم في A فإنّ : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ حسب خاصية فيثاغـــورس.

لدينــا :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 8,1^2 + 10,8^2$

$BC^2 = 65,61 + 116,64$

$BC^2 = 182,25$

$BC = \sqrt{182,25} = 13,5$

إذا الطـــول BC يساوي $13,5cm$

2 حساب الطـــول EG :

بما أنّ المثلث EFG قائـــم في E فإنّ : $FG^2 = EF^2+EG^2$ حسب خاصية فيثاغـــورس.

لدينـــا : $FG^2 = EF^2 + EG^2$

$EG^2 = FG^2 - EF^2$

$EG^2 = 90,25 - 32,49$

$FG^2 = 57,76$

$FG = \sqrt{57,76} = 7,6$

إذا الطـــول FG يساوي $7,6cm$

3 تبيان أنّ المثلث RST قائـــم في R :

لدينـــا :

$RS^2 = 4,2^2 = 17,64$ ، $TR^2 = 14,4^2 = 207,36$ ، $ST^2 = 15^2 = 225$

نلاحـــظ أنّ : $17,64 + 207,36 = 225$ أي أنّ : $RS^2 + RT^2 = ST^2$.

و منه ، المثلث RST قائـــم في R حسب خاصية فيثاغـــورس العكسية.

4 المثلث LMN غير قائـــم.

لدينـــا :

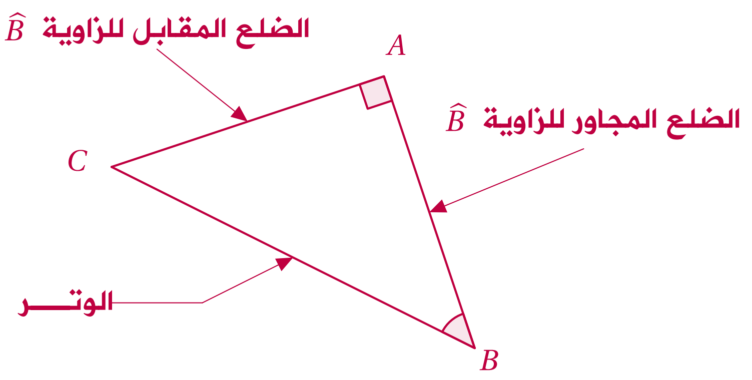
$LM^2 = 6^2 = 36$ ، $LN^2 = 4,5^2 = 20,25$ ، $MN^2 = 9^2 = 81$

نلاحـــظ أنّ : $36 + 20,25 \neq 81$ أي أنّ : $LM^2 + LN^2 \neq MN^2$.

و منه ، المثلث LMN ليس قائـــما حسب خاصية فيثاغـــورس العكسية.

7.1 النسب المثلثية في مثلث قائم

النسب المثلثية في مثلث قائم



1 النسب المثلث في مثلث قائم :

- $\cos\widehat{B} = \dfrac{AB}{BC}$
- $\sin\widehat{B} = \dfrac{AC}{BC}$
- $\tan\widehat{B} = \dfrac{AC}{AB}$

2 العلاقة بين النسب المثلثية في مثلث قائم :

x هو قيس زاوية حادة في مثلث قائـــم.

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

أتمرّن:

1 ABC مثلث قائم في A حيث :

$AB = 11cm$ و $BC = 17cm$ (يمكن الاستعانة برسم تخطيطي).

◄ احسب $\cos\widehat{ABC}$ ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{ABC}$ (تدوّر النتائج إلى $0,01$).

2 MDG مثلث قائم في D حيث :

$MG = 7cm$ و $\widehat{DMG} = 39°$ (يمكن الاستعانة برسم تخطيطي).

◄ احسب الطــول MD (تدوّر النتائج إلى $0,1$).

3 MNL مثلث قائم في L حيث :

$LM = 13cm$ و $\widehat{LMN} = 54°$ (يمكن الاستعانة برسم تخطيطي).

◄ احسب الطــول MN (تدوّر النتائج إلى $0,1$).

4 SRT مثلث قائم في S حيث :

$SR = 7cm$ و $RT = 12cm$ (يمكن الاستعانة برسم تخطيطي).

◄ احسب $\sin \widehat{STR}$ ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{STR}$ (تدوّر النتائج إلى $0,01$).

5 EBN مثلث قائم في E حيث :

$NB = 21cm$ و $\widehat{EBN} = 31°$ (يمكن الاستعانة برسم تخطيطي).

◄ احسب الطــول EN (تدوّر النتائج إلى $0,1$).

6 LGM مثلث قائم في G حيث :

$GM = 14cm$ و $\widehat{MLG} = 40°$ (يمكن الاستعانة برسم تخطيطي).

◄ احسب الطــول LM (تدوّر النتائج إلى $0,1$).

7 BRH مثلث قائم في H حيث :

$HB = 13cm$ و $HR = 8cm$ (يمكن الاستعانة برسم تخطيطي).

◄ احسب $\tan \widehat{HRB}$ ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{HRB}$ (تدوّر النتائج إلى $0,01$).

8 x هو قيس زاوية حادة في مثلث قائم حيث $\cos x = \frac{2}{3}$.

◄ أعـــط القيمة المضبوطة لــــ $\sin x$ ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لــــ $\tan x$.

9 x هو قيس زاوية حادة في مثلث قائم حيث $\sin x = \frac{5}{8}$.

◄ أعـــط القيمة المضبوطة لــــ $\cos x$ ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لــــ $\tan x$.

الحل:

1 ◄ حساب $\cos \widehat{ABC}$:

بما أنّ المثلث ABC قائـــم فـــي A فإنّ : $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$ و بالتعويـــض نجـد :

$\cos \widehat{ABC} = \frac{11}{17}$ إذا : $\cos \widehat{ABC} \simeq 0,65$

◄ استنتاج قيس الزاوية $\widehat{ABC}$:

نضغط على الزر DRG حتى يظهر أعلـى الشاشة DEG.

باتباع المراحـــل من اليسار إلى اليمين : cos 2ndf 5 6 • 0

فتظهـر على شاشة الحاسبة : $49,45839812$ إذا $\widehat{ABC} \simeq 49,46°$

2 حساب الطــول MD :

بما أنّ المثلث MDG قائـــم فـــي D فإنّ : $\cos \widehat{DMG} = \frac{MD}{MG}$ و من العلاقـــة السابقة

نجـد : $MD = \cos \widehat{DMG} \times MG$

و بالتعويـــض : $MD = \cos 39° \times 7$ إذا : $MD = 5,4cm$

3 حساب الطــول MN :

بما أنّ المثلث MNL قائـــم فـــي L فإنّ : $\cos \widehat{LMN} = \frac{LM}{MN}$ و من العلاقـــة السابقة

نجـد : $MN = \frac{LM}{\cos \widehat{LMN}}$

و بالتعويـــض : $MN = \frac{13}{\cos 54°}$ إذا : $MN = 22,1cm$

4 ◄ حساب $\sin \widehat{STR}$:

بما أنّ المثلث SRT قائـــم فـــي S فإنّ : $\sin \widehat{STR} = \frac{SR}{RT}$

و بالتعويـــض نجـد : $\sin\widehat{STR} = \frac{7}{12}$ إذا : $\sin\widehat{STR} \simeq 0,58$

◄ استنتاج قيس الزاوية $\widehat{STR}$:

نضغط على الزر DRG حتى يظهر أعلـى الشاشة DEG.

باتباع المراحـــل من اليسار إلى اليمين : sin 2ndf 8 5 . 0

فتظهـر على شاشة الحاسبة : $35,45054263$ إذا $\widehat{SRT} \simeq 35,45°$

5 حساب الطـــول EN :

بما أنّ المثلث EBN قائـــة فــي E فإنّ : $\sin\widehat{EBN} = \frac{EN}{NB}$ من العلاقـــة السابقة

نجـد : $EN = \sin\widehat{ENB} \times NB$

و بالتعويـــض : $EN = \sin 31° \times 21$ إذا : $EN \simeq 10,8cm$

6 حساب الطـــول LM :

بما أنّ المثلث LGM قائـــة فــي G فإنّ : $\sin\widehat{MLG} = \frac{GM}{LM}$ من العلاقـــة السابقة

نجـد : $IM = \frac{GM}{\sin\widehat{MLG}}$

و بالتعويـــض : $LM = \frac{14}{\sin 40°}$ إذا : $LM \simeq 21,8cm$

7 ◄ حساب $\tan\widehat{HRB}$:

بما أنّ المثلث BRH قائـــة فــي H فإنّ : $\tan\widehat{HRB} = \frac{HB}{HR}$

و بالتعويـــض نجـد : $\tan\widehat{HRB} = \frac{13}{8}$ إذا : $\tan\widehat{HRB} \simeq 1,63$

◄ استنتاج قيس الزاوية $\widehat{HRB}$:

نضغط على الزر DRG حتى يظهر أعلـى الشاشة DEG.

باتباع المراحـــل من اليسار إلى اليمين : tan 2ndf 3 6 . 1

فتظهـر على شاشة الحاسبة : $58,47101196$ إذا $\widehat{HRB} \simeq 58,47°$

8 إعطـــاء القيمة المضبوطة لـــ $\sin x$:

لديــنا : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ و من العبارة الأولـــى نجـــد : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ و

بالتعويض : $\sin^2 x = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$

أي : $\sin^2 x = 1 - \frac{4}{9}$ و منه : $\sin^2 x = \frac{9-4}{9} = \frac{5}{9}$ إذا : $\sin x = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

استنتاج القيمة المضبوطة لـــ $\tan x$

لدينا : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و بالعويض نجـــد : $\tan x = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{2}$ و منه : $\tan x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

9 إعطـــاء القيمة المضبوطة لـــ $\cos x$:

لديــنا : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ و من العبارة الأولـــى نجـــد : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ و

بالتعويض : $\cos^2 x = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^2$ أي : $\cos^2 x = 1 - \frac{25}{64}$ و منه : $\cos^2 x = \frac{64-25}{64} = \frac{39}{64}$ إذا

: $\cos x = \sqrt{\frac{39}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$

استنتاج القيمة المضبوطة لـــ $\tan x$

لدينا : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و بالتعوض نجـــد : $\tan x = \frac{5}{8} \times \frac{8}{\sqrt{39}}$ و منه : $\tan x = \frac{5}{\sqrt{39}}$