ثانوية: محمد العربي بعرير طولقـة **السنة الدراسية: 2022/2021**

المستوى : ثالثة رياضي **اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيــات** **الوقت : 3 سـا**

التمرين الأول: 8ن

I) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0\ ;\ +\infty[$ بـ : $h(x)=1+\dfrac{2\ln x}{x}$ وجدول تغيراتها

x	0		α		e		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$1+\frac{2}{e}$	↘	1

1°) بين أن : $0.7<\alpha<0.8$

2°) استنتج اشارة $h(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x

II) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0\ ;\ +\infty[$ بـ : $g(x)=1+\dfrac{\ln x}{x}$

و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1°) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا

2°) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيّراتها

III) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]0\ ;\ +\infty[$ بـ : $f(x)=g(x)+\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق

1°) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$ ، أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا

2°) أ/° بين أنه من أجل كل x من المجال $]0\ ;\ +\infty[$: $f'(x)=g'(x)\times h(x)$ حيث f' مشتقة الدالة f

ب/° استنتج اتجاه تغير الدالة f

جـ/° بين أن $f(\alpha)=\dfrac{3}{4}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3°) أ/° أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g)

ب/° أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$

جـ /° ماذا يمكن القول عن المنحنيين (C_g) و (C_f) ؟

4°) أرسم (C_g) و (C_f) في نفس المعلم

التمرين الثاني: 5ن

نعتبر المعادلة التفاضلية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $y'-y=2e^x-1$ ....(1)

أ/° عين العددين الحقيقيين a ، b بحيث تكون الدالة : $U:x\to axe^x+b$ حلا للمعادلة التفاضلية (1)

ب/° نضع : $a=2$ و $b=1$

1°) عين حلول المعادلة التفاضلية : $y'-y=0$ ....(2)

2°) أثبت أن : الدالة V حل للمعادلة التفاضلية (1) اذاوفقط اذاكانت الدالة $V-U$ حلا للمعادلة التفاضلية (2)

3°) أ/° استنتج مجموعة الدوال V حلول المعادلة التفاضلية (1)

ب /°عيّن الدالة f حيث : f حلا للمعادلة التفاضلية (1) و تحقق $f(0)=-1$

اقلب الصفحة

التمرين الثالث: 7ن

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=2(x-1)e^{x}+1$

1°) أحسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

2°) أ°/ أحسب $f'(x)$ حيث f' مشتقة الدالة f

ب°/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3°) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين فقط α و β حيث : $0.7<\alpha<0.8$ و $-1.7<\beta<-1.6$

II) المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

ليكن (C_g) ، $(C_{\exp})$ التمثيلين البيانيين للدالتين $\exp: x\to e^{x}$ ، $g: x\to 1-e^{-x}$ على الترتيب

و (T_a) مماسا للمنحني $(C_{\exp})$ عند النقطة A ذات الفاصلة a

و (T_b) مماسا للمنحني (C_g) عند النقطة B ذات الفاصلة b

1°) أكتب معادلة لكل من المماسين (T_a) و (T_b)

2°) أثبت أن المماسيّن (T_a) و (T_b) متطابقان معناه $\begin{cases} b=-a \\ \text{و} \\ 2(a-1)e^{a}+1=0 \end{cases}$

3°) استنتج عدد المماسات المتطابقة للمنحنيين $(C_{\exp})$ و (C_g)

انتهى **بالتوفيق**

ثانوية محمد العربي بن بريك طولقة

تصحيح الاختبار الأول ثالثة رياضي 2021/2022

ص

التمرين الأول:

I)

$h(x) = 1 + \frac{e\ln x}{x} \,/\, x \in]0, +\infty[$

1) لدينا الدالة h مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0 \, ; e]$ فهي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0{,}7 \, ; 0{,}8]$

$f(0{,}8) \simeq 0{,}44$ و $f(0{,}7) \simeq -0{,}02$

$f(0{,}7) \cdot f(0{,}8) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

$0{,}7 < \alpha < 0{,}8$

2)

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$	||	$-$	0	$+$	

II)

1) $g(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

$x = 0$ مستقيم مقارب لـ (C_g)

$y = 1$ مستقيم مقارب لـ (C_g)

2) $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$g'(x) > 0$ معناه $1 - \ln x > 0$

معناه $\ln x < 1$

معناه $x < e$

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0, e]$ ومتناقصة تماما على المجال $[e ; +\infty[$

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$1 + \frac{1}{e} \simeq 1{,}4$	$\searrow$	1

III)

1) $f(x) = g(x) + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \,/\, x \in]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \left[1 + \frac{\ln x}{x} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right]$

$= \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \left[1 + \frac{\ln x}{x}\left[1 + \frac{\ln x}{x}\right]\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$x = 0$ مستقيم مقارب لـ (C_f)

$y = 1$ مستقيم مقارب لـ (C_f)

2) أ)

$f'(x) = g'(x) + 2\frac{\ln x}{x}\left(\frac{\ln x}{x}\right)'$

$= g'(x) + 2\frac{\ln x}{x}\left(g(x) - 1\right)'$

$= g'(x) + \frac{e\ln x}{x} g'(x)$

$= g'(x)\left(1 + \frac{e\ln x}{x}\right)$

$= g'(x)\, h(x)$

ب)

x	0		α		e		$+\infty$
$h(x)$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	||	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha , e]$ ومتناقصة تماما على كل من المجالين $]0 , \alpha]$ ، $[e , +\infty[$

جـ)

$f(x) = g(x) + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$

$= \frac{h(x) + 1}{2} + \left[\frac{h(x) - 1}{2}\right]^2$

$f(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

x	0		α		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1+e+e^2}{e^2} \simeq 1{,}5$	$\searrow$	1

3) أ)

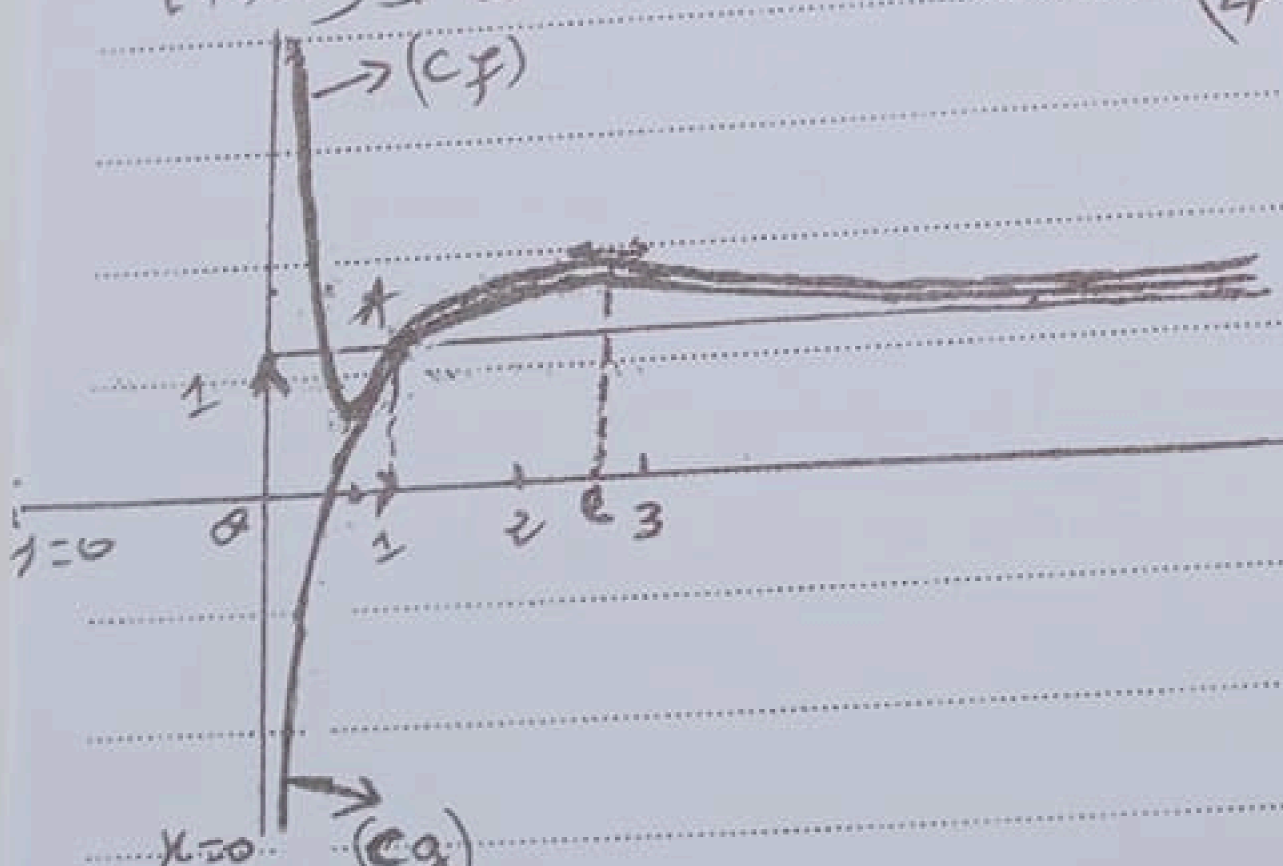
x		1	
$f(x) - g(x)$	$+$	0	$+$

(C_f) فوق (C_g) ويلامسه في النقطة $A(1, 1)$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = 0$

جـ) (C_f) يقارب (C_g) من الأعلى بجوار $(+\infty)$

4)



ص

التمرين الثاني

$y' - y = 2e^x - 1$ ----> (1)

أ) $u(x) = axe^x + b$

الدالة u حلا للمعادلة (1) معناه

من أجل كل x من IR ; $u'(x) - u(x) = 2e^x - 1$

من أجل كل x من IR :

$u'(x) - u(x) = (ax+a)e^x - axe^x - b$

$= ae^x - b$

بالمطابقة نجد $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

$\boxed{u(x) = 2xe^x + 1}$

ب) 1°) $y' - y = 0$ ....> (2)

حلول المعادلة (2) هي الدوال المعرفة على IR ب

$x \to ce^x \; / \; c \in IR$

2°) ① نفرض أن h حلا للمعادلة (1)

$h'(x) - h(x) = 2e^x - 1 \longrightarrow (I)$

لدينا $u'(x) - u(x) = 2e^x - 1 \longrightarrow (II)$

نطرح (II) من (I) نجد

$(h-u)'(x) - (h-u)(x) = 0$

ومنه $h-u$ حلا للمعادلة (2)

② نفرض $h-u$ حلا للمعادلة (2)

لدينا

$h'(x) - u'(x) - h(x) + u(x) = 0$

ومنه $h'(x) - h(x) = u'(x) - u(x)$

$= 2e^x - 1$

لأن u حلا للمعادلة (1)

3°) لدينا $h-u$ حلا للمعادلة (2)

ومنه $h(x) - u(x) = ce^x$ حيث c عدد حقيقي

ومنه $h(x) = ce^x + 2xe^x + 1$

ج) $h(0) = -1$ معناه $c + 1 = -1$

معناه $\boxed{c = -2}$

$f(x) = -2e^x + 2xe^x + 1$

$\boxed{f(x) = 2(x-1)e^x + 1}$

التمرين الثالث I)

$f(x) = 2(x-1)e^x + 1$

1°) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2\left(1 - \frac{1}{x}\right)xe^x + 1 = 1$

2°) أ) $f'(x) = (2x - 2 + 2)e^x$

$= 2xe^x$

ب) الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0]$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	-1	↗	$+\infty$

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0,7 ; 0,8]$

$f(0,8) \simeq 0,11$ و $f(0,7) \simeq -0,21$

ومنه $f(0,7) \times f(0,8) < 0$

إذن حسب م ق م المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$

لدينا الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[-1,7 ; -1,6]$

$f(-1,7) \simeq 0,13$ و $f(-1,6) \simeq -0,05$

ومنه $f(-1,7) \times f(-1,6) < 0$

إذن حسب م ق م المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $-1,7 < \beta < -1,6$

II) 1°) $(T_a) : y = e^a(x-a) + e^a$

$= e^a x + e^a - ae^a$

$(T_b) : y = e^{-b}(x-b) + 1 - e^{-b}$

2°) (T_a) منطبقة على (T_b) معناه

$\begin{cases} e^{-b} = e^a \\ -be^{-b} - e^{-b} + 1 = e^a - ae^a \end{cases}$

معناه $\begin{cases} b = -a \\ ae^a - e^a + 1 = e^a - ae^a \end{cases}$

معناه $\begin{cases} b = -a \\ 2ae^a - 2e^a + 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} b = -a \\ 2(a-1)e^a + 1 = 0 \end{cases}$

3°) حسب الجزء (I) $2(a-1)e^a + 1 = 0$ هي $f(a) = 0$ وهي تقبل حلين α و β

ومنه عدد المماسات هو اثنان