ثانوية ابن عليوي صالح — المستوي : 3 ت ر
2021/2020 — المدة : ساعتين

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الاول (7 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $U_0=\frac{1}{5}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=1-\frac{1}{2U_n+1}$

/1 بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0<U_n<\frac{1}{2}$

/2 ا) تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n، $U_{n+1}-U_n=\frac{U_n(1-2U_n)}{2U_n+1}$ استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

ب) بين ان المتتالية (U_n) متقاربة

/3 (V_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n=\frac{3U_n}{1-2U_n}$

ا) اثبت ان المتتالية (V_n) هندسية أساسها 2 يطلب حساب حدها الأول

ب) اكتب عبارة V_n بدلالة n ثم بين ان $U_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}$، احسب $\lim U_n$

/4 احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\frac{1}{U_0}+\frac{1}{U_1}+....+\frac{1}{U_n}$

التمرين الثاني (13 نقاط)

I g الدالة معرفة على $]1\,;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$

/1 احسب $\lim_{x\to 1} g(x)$ وبين أن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

/2 ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها

/3 ا) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α على $]1\,;+\infty[$ ، ثم تحقق ان $\alpha\in[e^2+1\,;e^3+1]$

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

II f الدالة المعرفة على $]1\,;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{\ln(x^2-1)}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

/1 احسب $\lim_{x\to 1} f(x)$ ، وبين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

/2 ا) بين أنه من اجل كل x من $]1\,;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$

ب) بين ان f متزايدة تماما على المجال $]1\,;\sqrt{\alpha}]$ و ومتناقصة تماما على المجال $[\sqrt{\alpha}\,;+\infty[$

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f

/3 بين أن $f(\sqrt{\alpha})=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

/4 يبين ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها β حيث $1,4<\beta<1,5$

/5 ارسم (C_f) (نأخذ $\sqrt{\alpha}\simeq 3$)

/6 m وسيط حقيقي ، عين قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=f(m)$ حلين متمايزين

/7 h دالة معرفة على $]0\,;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=f(e^x)$

ادرس اتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيراتها (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)

تصحيح اختبار الفصل الأول في الرياضيات 3ع ت

التمرين الأول (7ن)

$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+1}$ ، $u_0=\frac{1}{3}$

① من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<\frac12$

$n=0$: $u_0=\frac13$ ، $0<u_0<\frac12$ ومنه $P(0)$ صحيحة

نفرض $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$

$P(n)$ صحيحة : $0<u_n<\frac12$

$P(n+1)$ صحيحة : $0<u_{n+1}<\frac12$

$0<u_n<\frac12$ ومنه $1<2u_n+1<2$ إذن

$-1<\frac{-1}{2u_n+1}<-\frac12$ ومنه $0<u_{n+1}<\frac12$

من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<\frac12$

(u_n) محدودة

② P- $u_{n+1}-u_n = 1-\frac{1}{2u_n+1}-u_n = \frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1} = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+2}$

$0<u_n<\frac12$ ومنه $0<1-2u_n<1$ إذن $1-2u_n>0$

و $u_n>0$ ومنه $u_{n+1}-u_n>0$

(u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ج) (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $\frac12$ فهي متقاربة

③ $v_n=\frac{3u_n}{1-2u_n}$

أ) $v_{n+1}=\frac{3u_{n+1}}{1-2u_{n+1}}=\frac{6u_n}{1-2u_n}=2v_n$

(v_n) هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول $v_0=1$

ب) $v_n=2^n$

ج) الحساب : $v_n=\frac{3u_n}{1-2u_n}$ ومنه $u_n=\frac{v_n}{2v_n+3}$ ، $u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n[2+\frac{3}{2^n}]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2+\frac{3}{2^n}}=\frac12$

4) $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\dots+\frac{1}{u_n}$

$\frac{1}{u_n}=\frac{2^{n+1}+3}{2^n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}+\frac{3}{2^n}=2+3\left(\frac12\right)^n$

$w_n=3\left(\frac12\right)^n$ هي هندسية أساسها $q=\frac12$ ، $w_0=3$

$S_n=2+w_0+2+w_1+\dots+2+w_n$

$=2(n+1)+w_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$

$=2n+2+6-6\left(\frac12\right)^{n+1}$

$\boxed{S_n=2n+8-6\left(\frac12\right)^{n+1}}$

التمرين الثاني (13ن)

I) $D=]1,+\infty[$; $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$

① $\lim_{x\to1} g(x)=2$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} (x-1)\left[\frac{2x}{x-1}-\ln(x-1)\right]=-\infty$

② $g'(x)=2-\ln(x-1)-\frac{x-1}{x-1}=1-\ln(x-1)$

$g'(x)=0$ تعني $1-\ln(x-1)=0$ تعني $x=e+1$

x	1	$e+1$	$+\infty$
$1-\ln(x-1)$	+	0	−

g متزايدة تماما على $]1,e+1]$ ومتناقصة تماما على $[e+1,+\infty[$

$g(e+1)=2(e+1)-e\ln e = e+2$

x	1	$e+1$	α	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−	
$g(x)$	2 ↗	$e+2$	↘ 0	↘ $-\infty$

3) P- $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $]1,+\infty[$

من جدول التغيرات لدينا g مستمرة ومتناقصة تماما على $[e+1,+\infty[$

$g(e+1)\times\lim_{x\to+\infty}g(x)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $]1,+\infty[$ ومنه في $[e+1,+\infty[$

$\alpha\in[e^2+1;e^3+1]$ نحسب :

$g(e^2+1)=2$ ، $g(e^3+1)=2-e^3$

لدينا $g(e^2+1)\times g(e^3+1)<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

$e^2+1<\alpha<e^3+1$ ، $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

تحقق $g(\alpha)=0$

ب)

x	1	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	−

II) $D=]1,+\infty[$ ، $f(x)=\frac{\ln(x^2-1)}{x}$

1) $\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln(x^2-1)}{x}=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2(1-\frac1{x^2}))}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln(1-\frac{1}{x^2})}{x}=0$

$y=0$ معادلة مقارب أفقي

2) $f'(x)=\frac{\frac{2x}{x^2-1}x-\ln(x^2-1)}{x^2}$

$=\frac{2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}=\frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x^2)$

$g(x^2)=0$ تعني $x^2=\alpha$ وتعني $x=\sqrt\alpha$

x	1	$\sqrt\alpha$	$+\infty$
$g(x^2)$	+	0	−

f متزايدة تماما على $]1,\sqrt\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\sqrt\alpha,+\infty[$

ج)

x	1	$\sqrt\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\sqrt\alpha)$	↘ 0

③ لدينا $f(\sqrt\alpha)=\frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt\alpha}$

ولدينا $g(\alpha)=0$ أي $2\alpha-(\alpha-1)\ln(\alpha-1)=0$ ومنه $\ln(\alpha-1)=\frac{2\alpha}{\alpha-1}$ ومنه

$f(\sqrt\alpha)=\frac{2\alpha/(\alpha-1)}{\sqrt\alpha}=\frac{2\alpha}{(\alpha-1)\sqrt\alpha}=\frac{2\sqrt\alpha}{\alpha-1}$

④ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث $1,4<\beta<1,5$

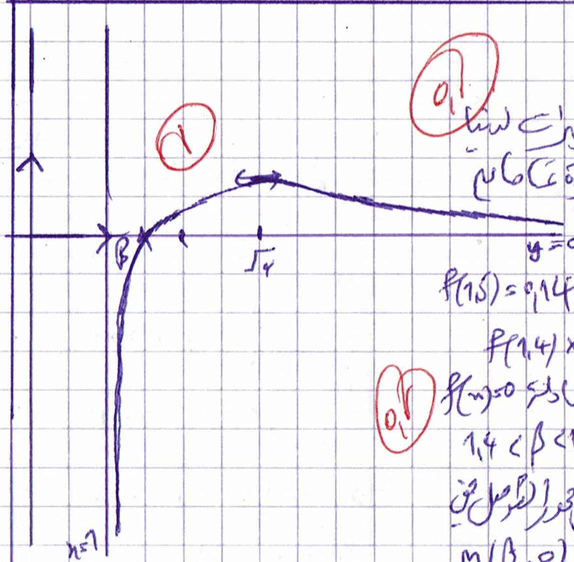
* من جدول التغيرات لدينا f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1,4;1,5]$

$f(1,5)=0,14$ ، $f(1,4)=-0,029$

$f(1,4)\times f(1,5)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $1,4<\beta<1,5$

و (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة الوحيدة $M(\beta,0)$



5) نأخذ $\sqrt\alpha=3$ و $f(3)=\frac34$ ، $x=1$ معادلة مقارب عمودي

6) $f(x)=f(m)$ تقبل حلين متمايزين من أجل $m\in]\beta,\sqrt\alpha[\cup]\sqrt\alpha,+\infty[$

⑦ h معرفة على $]0,+\infty[$ ، $h(x)=f(e^x)$ (دالة مركبة $v\circ u$)

* $h'(x)=e^x\times f'(e^x)$

لدينا $x>0$ ومنه $e^x>1$ أي $e^x\in]1,+\infty[$ (تنتمي لمجال f)

إذن إشارة $h'(x)$ من إشارة $f'(e^x)$ لأن $e^x>0$

$h'(x)=0$ تعني $f'(e^x)=0$ أي $e^x=\sqrt\alpha$ ومنه $x=\ln\sqrt\alpha$

إذن h متزايدة تماما على $]0,\ln\sqrt\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\ln\sqrt\alpha,+\infty[$

$\lim_{x\to0} h(x)=\lim_{x\to0} f(e^x)$ $(e^x=X)$ $=\lim_{X\to1} f(X)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty} f(e^x)$ $(e^x=X)$ $=\lim_{X\to+\infty} f(X)=0$

x	0	$\ln\sqrt\alpha$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{2\sqrt\alpha}{\alpha-1}$	↘ 0

$h(\ln\sqrt\alpha)=f(e^{\ln\sqrt\alpha})=f(\sqrt\alpha)=\frac{2\sqrt\alpha}{\alpha-1}$