الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: **2020**

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: **03** سا و **30** د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كلّ حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

1) قانون احتمال المتغيّر العشوائي X معرّف بالجدول المقابل :

x_i	-2	0	1	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغيّر العشوائي X هو:

أ) $-\frac{1}{20}$ ب) $-\frac{1}{10}$ جـ) $-\frac{3}{20}$

2) المتتالية العددية (w_n) معرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = 4\times 5^n - 2n + 1$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$

S_n يساوي: أ) $5^{n+1} - (n+1)^2$ ب) $5^{n+1} - n^2$ جـ) $5^n - n^2$

3) نعتبر المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x : $-2e^{2x} + 5e^x - 2 \geq 0$

مجموعة حلول هذه المتراجحة في مجموعة الأعداد الحقيقية هي:

أ) $[-\ln 2;\ln 2]$ ب) $[-1;-\ln 2]$ جـ) $[\ln 2;+\infty[$

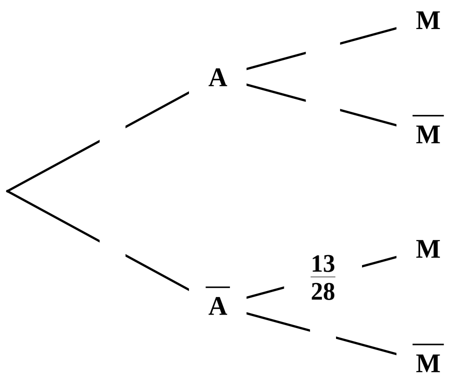
التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي وعاء U على 4 كريات حمراء و 6 سوداء، ويحتوي وعاء V على 5 كريات حمراء و 3 سوداء وكل الكريات متماثلة ولا نفرّق بينها عند اللّمس. نسحب عشوائيا كريتين في آنٍ واحد من أحد الوعاءين بالكيفية التالية:

نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس يحتوي على 6 بطاقات متماثلة ومرقمة من 1 إلى 6 ، إذا تحصلنا على أحد الرقمين 3 أو 5 نسحب الكريتين من U و في باقي الحالات نسحب الكريتين من V .

نسمّي A الحدث: " الحصول على أحد الرقمين 3 أو 5 " .

نسمّي M الحدث: " الحصول على كريتين من نفس اللّون".



1) تحقق أنّ $P(\overline{A})$ احتمال السّحب من الوعاء V هو $\frac{2}{3}$.

2) علماً أنّ الكريتين المسحوبتين من U، بيّن أنّ احتمال أن تكونا من نفس اللّون هو $\frac{7}{15}$.

3) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها واستنتج $P(M)$.

4) احسب $P_{\overline{M}}(A)$ احتمال السّحب من الوعاء U علما أنّ الكريتين المسحوبتين مختلفتا اللّون؟

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بِـ : $u_0 = \alpha$ (α عدد حقيقي)، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1$.

1) نفرض أنّ $\alpha = -4$.

برهن بالتّراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -4$.

2) نفرض أنّ $\alpha \neq -4$.

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + 4$.

أ . أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.

ب. اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n و α ثمّ بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

جـ. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

احسب S_n بدلالة n و α ثم احسب $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـِ: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$.

$(\mathcal{C}_f)$ التمثيل البياني لـ f في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(تُؤخذ وحدة الطول $2cm$)

1) أ . احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و فسّر النتيجة هندسيا ثمّ بيّن أنّ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

ب. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$.

جـ. ادرس وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2) الدالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـِ: $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

أ . بيّن أنّ g متزايدة تماماً على $]0;+\infty[$.

ب. احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

3) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) بيّن أنّ التمثيل البياني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ)، ويُطلب تعيين معادلة له.

5) أنشئ (T)، (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$.

6) الدالة العددية h معرّفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ : $h(x) = -|x| + 1 + \frac{\ln|x|}{x^2}$.

أ . بيّن أنّ h دالة زوجية.

ب. اشرح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_h) الممثّل للدالة h انطلاقا من (C_f). (لا يُطلب انشاء (C_h)).

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

1) نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالشكل : $f(x)=-x+\ln x$.

على المجال $]0;+\infty[$ ، الدّالة f :

أ) متزايدة تماما   **ب)** متناقصة تماما   **جـ)** غير رتيبة

2) يتكون فريق عمل من 4 إناث و 3 ذكور، يراد تشكيل لجنة تضم 3 أعضاء.

احتمال أن تكون اللجنة من الجنسين هو:

أ) $\frac{6}{7}$ **ب)** $\frac{4}{7}$ **جـ)** $\frac{1}{7}$

3) لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها e وحدها الأول u_0 ، حيث: $u_0=e^{-\frac{1}{2}}$. (eأساس اللوغاريتم النيبيري)

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n=\ln(u_0\times u_1\times\cdots\times u_n)$

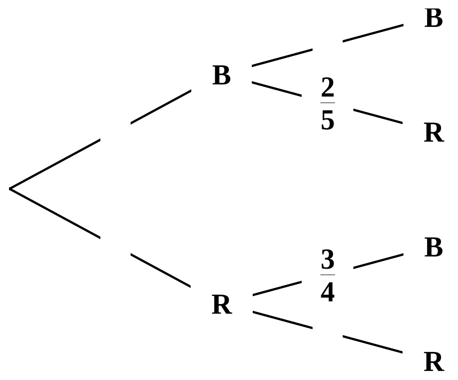
S_n يساوي:

أ) $\frac{n^2-1}{2}$ **ب)** $\frac{n^2+1}{2}$ **جـ)** $\frac{n^2}{2}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس به ثلاث كريات بيضاء وكريتين حمراوين لا نميّز بينها عند اللمس، نسحب عشوائيا كريتين على التوالي من الكيس بالكيفية التالية: إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء نعيدها إلى الكيس و إذا كانت حمراء لا نعيدها إلى الكيس .

1) أ. انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها.



B يرمز إلى الحصول على كرية بيضاء و R إلى الحصول على كرية حمراء.

ب. احسب احتمال أن تكون الكرية المسحوبة الثانية حمراء.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكريتين عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

أ. عيّن مجموعة قيم المتغير العشوائي X .

ب. بيّن أنّ: $P(X=1)=\frac{27}{50}$ ، ثمّ عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

جـ. احسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n-2n+3$

1) احسب كلا من u_1 و u_2 ثم خمّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n-n+1$.

أ . بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 ، يُطلب حساب حدّها الأول.

ب. اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n .

جـ. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=\dfrac{1}{2}\left(3^{n+1}+n^2-n-3\right)$.

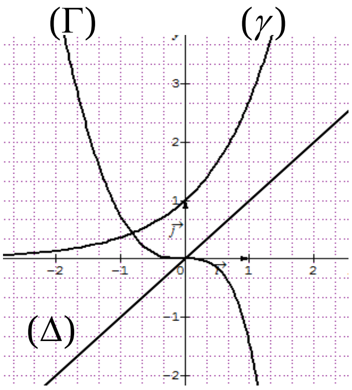
ب. احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

في الشّكل المرفق، (Γ) المنحنى الممثِّل للدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2x^2+2x-2xe^x$

(Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=x$ و (γ) المنحنى الممثل للدالة: $x\mapsto e^x$.



بقراءة بيانية:

1) برّر أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x-x>0$

2) حدّد تبعا لقيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$ علما أنّ $g(0)=0$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-1+\dfrac{2e^x}{e^x-x}$.

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ واحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ فسِّر نتيجتي النهايتين هندسيا.

2) أ . بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x)=\dfrac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$.

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكِّل جدول تغيّراتها.

3) أ . اكتب معادلة لـ(T) المماس للمنحنى (C_f) في النّقطة A ذات الفاصلة 0.

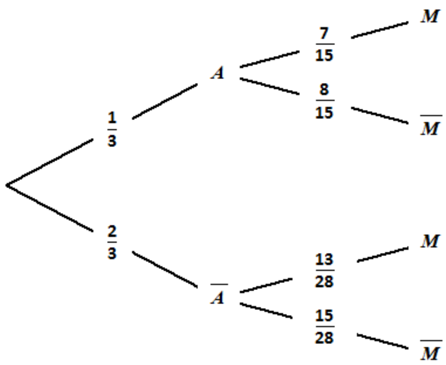
ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x يكون: $f(x)-(2x+1)=\dfrac{g(x)}{e^x-x}$.

جـ. استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) على $\mathbb{R}$، ماذا تمثّل النقطة A بالنسبة إلى (C_f)؟

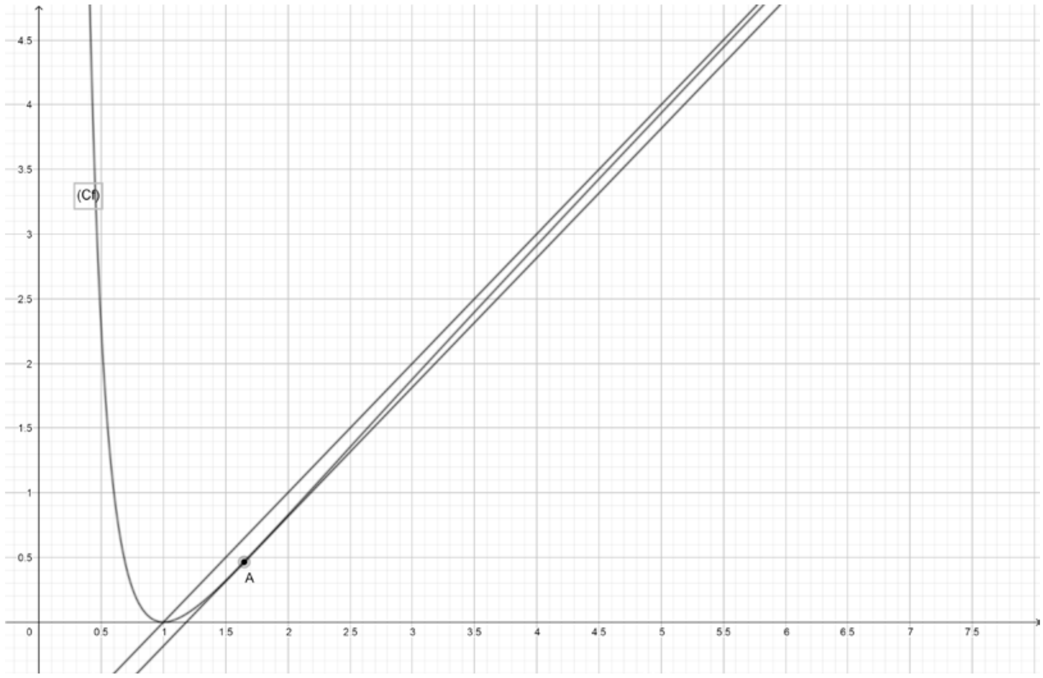
4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;1]$، ثم تحقق أنّ: $-0.6\langle\alpha\langle-0.5$.

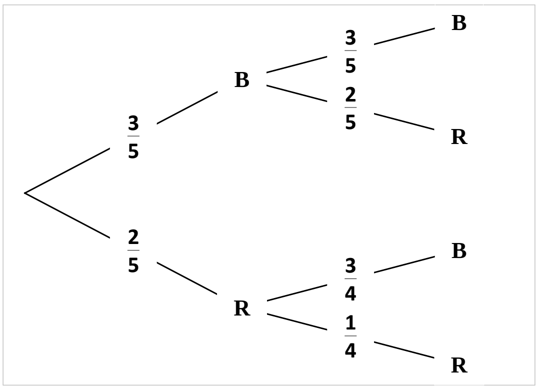
5) أنشئ المماس (T) والمستقيمين المقاربين ثم المنحنى (C_f).

انتهى الموضوع الثاني

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة	
	مجزأة	مجموعة
التّمرين الأوّل: (04 نقاط)		
1) الاقتراح الصحيح: جـ) $E(X)=-\dfrac{3}{20}$، التبرير .	2x0.5	1
2) الاقتراح الصحيح: ب) $5^{n+1}-n^2$ التّبرير : $S_n=4(1+5^1+5^2+...+5^n)-2(1+2+...+n)+(n+1)=5^{n+1}-n^2$	0.5+1	1.5
3) الاقتراح الصحيح: أ) $[-\ln 2;\ln 2]$ التّبرير : $-2e^{2x}+5e^x-2\geq 0$ تكافئ $(e^x-2)(2e^x-1)\leq 0$	0.5+1	1.5
التّمرين الثّاني: (04 نقاط)		
1) $P(\overline{A})=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.	0.5	0.5
2) $P_A(M)=\dfrac{C_4^2+C_6^2}{C_{10}^2}=\dfrac{6+15}{45}=\dfrac{7}{15}$	0.75	0.75
3) شجرة الاحتمالات:  الاستنتاج: $P(M)=P(A)\times P_A(M)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(M)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{7}{15}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{13}{28}=\dfrac{293}{630}$	1 0.75	1.75
4) $P_{\overline{M}}(A)=\dfrac{P(A\cap\overline{M})}{P(\overline{M})}=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}}{1-\frac{293}{630}}=\dfrac{8}{45}\times\dfrac{630}{337}=\dfrac{112}{337}$	0.25x4	1
التّمرين الثّالث: (05 نقاط)		
1) لدينا: $u_0=-4$، من أجل n كيفي من $\mathbb{N}$ نفرض أنّ: $u_n=-4$، نجد: $u_{n+1}=-4$ ، بالتّالي من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n=-4$.	0.25 + 0.75	1

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة	
	مجموعة	مجموعة
2) أ) لدينا: $v_{n+1}=u_{n+1}+4=\frac{3}{4}(u_n+4)=\frac{3}{4}v_n$	0.75	4
ب) نجد: $v_0=\alpha+4$ و $v_n=(\alpha+4)\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ومنه: $u_n=(\alpha+4)\left(\frac{3}{4}\right)^n-4$ لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-4$ أي (u_n) متقاربة.	0.5+0.25 0.5 0.5	
ج) نجد: $S_n=4\left[(\alpha+4)\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)-(n+1)\right]$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\infty$	1 0.5	
التّمرين الرابع: (07 نقاط)		
1) أ) بالحساب نجد: $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}f(x)=+\infty$ التّفسير: المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب لـ (C_f) ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$.	0.5 0.25 0.5	2
ب) لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{\ln x}{x^2}=0$ ، إذن المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$	0.25	
ج) المنحنى (C_f) فوق (Δ) على المجال $]0;1[$، المنحنى (C_f) تحت (Δ) على المجال $]1;+\infty[$ و $(C_f)\cap(\Delta)=\{A(1;0)\}$	0.5	
2) أ) من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)=3x^2+\frac{2}{x}$ و $g'(x)>0$ بالتّالي g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$	0.25x2 0.25	1.5
ب) لدينا: $g(1)=0$ و بما أنّ g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ نجد: $g(x)<0$ على المجال $]0;1[$ و $g(x)>0$ على المجال $]1;+\infty[$	0.25 0.5	
3) أ) من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=1-\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$	0.5	1.25
ب) الدّالة f متناقصة تماما على $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$ جدول التّغيرات	0.5 0.25	
4) لدينا $f'(x)=1$ تعني $1-2\ln x=0$ أي $x=\sqrt{e}$ بالتّالي (C_f) يقبل مماسا (T) معادلة له $y=x-1-\frac{1}{2e}$	0.25 0.25	0.5

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
5) انشاء (T)، (Δ) و (C_f) 	0.25x2 0.5	1
6) أ) بيان أنّ h دالة زوجية	0.25	0.75
ب) لدينا $\begin{cases} h(x)=-f(x) \;;\; x>0 \\ h(x)=x+1+\dfrac{\ln(-x)}{x^2} \;;\; x<0 \end{cases}$ ومنه: على المجال $]0;+\infty[$ يكون (C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ونحصل على (C_h) على المجال $]-\infty;0[$ بالتّناظر بالنسبة إلى حامل محور التّراتيب.	0.25 0.25	

عناصر الإجابة (الموضوع الثّاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
التّمرين الأوّل: (04 نقاط)		
1) الاقتراح الصحيح: **جـ)** غير رتيبة. التّبرير: $f'(x)=\frac{1-x}{x}$ و f' تغيّر إشارتها على المجال $]0;+\infty[$	1+0.5	1.5
2) الاقتراح الصحيح: أ) $\frac{6}{7}$ ، التّبرير: $P=\frac{C_3^1\times C_4^2+C_3^2\times C_4^1}{C_7^3}=\frac{6}{7}$	0.5+0.5	1
3) الاقتراح الصحيح: أ) $\frac{n^2-1}{2}$ ، التّبرير: $\ln(u_n)=n-\frac{1}{2}$ و $S_n=(0-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{2})+(2-\frac{1}{2})+...+(n-\frac{1}{2})=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n+1}{2}=\frac{n^2-1}{2}$	1+0.5	1.5
التّمرين الثّاني: (04 نقاط)		
1) أ) شجرة الاحتمالات: 	0.25x4	1.5
ب) احتمال أنّ تكون الكريّة المسحوبة الثّانية حمراء: $P=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{17}{50}$	0.5	
2) أ) مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي: $\{0;1;2\}$.	0.5	2.5
ب) لدينا: $P(X=1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{50}$ ونجد: $P(X=0)=\frac{9}{25}$ و $P(X=2)=\frac{1}{10}$	3x0.5	
جـ) نجد: $E(X)=\frac{37}{50}$	0.25x2	
التّمرين الثّالث: (05 نقاط)		
1) نجد: $u_1=3$ و $u_2=9$ ، التّخمين: (u_n) متزايدة تماما.	0.25x3	0.75
2) أ) نجد: $v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)-1=3v_n$ بالتّالي (v_n) هندسية أساسها 3 و $v_0=1$	0.25+1	2.75
ب) نجد: $v_n=3^n$ و $u_n=3^n+n-1$	0.5+0.5	
جـ) لدينا: $u_{n+1}-u_n=2\times3^n+1$ نجد: (u_n) متزايدة تماما	0.25x2	

عناصر الإجابة (الموضوع الثّاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
3) أ) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $S_n=(v_0+v_1+v_2+...+v_n)+(-1+0+1+....+(n-1))$ إذن: $S_n=\frac{1}{2}\left(3^{n+1}+n^2-n-3\right)$	0.25x2 0.5	1.5
ب) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$	0.5	
التّمرين الرابع: (07 نقاط)		
I)1) لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x-x>0$ لأنّ (γ) يقع فوق (Δ) على $\mathbb{R}$	0.25	0.25
2) على $]-\infty;0[$ لدينا: $g(x)>0$ و على $]0;+\infty[$ لدينا : $g(x)<0$	0.25	0.25
II)1) لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{2}{1-xe^{-x}}\right)=1$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ التّفسير: $y=1$ و $y=-1$ معادلتا مستقيمين مقاربين لـ: (C_f)	2x0.25 2x0.25	1
2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=\frac{2e^x(e^x-x)-2e^x(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\frac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$	0.5	1.75
ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-x)$ بالتّالي: الدّالة f متزايدة تماما على $]-\infty;1]$ ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$. $f(1)=\frac{e+1}{e-1}$ ، جدول التّغيرات.	0.5 2x0.25 0.25	
3) أ) معادلة للمماس (T): $y=2x+1$	0.5	1.75
ب) بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-(2x+1)=\frac{g(x)}{e^x-x}$	0.5	
جـ) المنحنى (C_f) فوق (T) على المجال $]-\infty;0[$ ، المنحنى (C_f) تحت (T) على المجال $]0;+\infty[$ و $(C_f)\cap(T)=\{A(0;1)\}$ A نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)	0.5 0.25	
4) بيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;1]$ التّحقق أنّ: $-0.6\langle\alpha\langle-0.5$.	0.5 0.25	0.75

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثّاني)
مجموعة	مجزأة	
1.25	0.25 2x0.25 0.5	**5)** انشاء (T) والمستقيمين المقاربين ثم المنحنى (C_f)