**الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية**

**وزارة التربية الوطنية** **الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات**

**امتحان بكالوريا التعليم الثانوي** **دورة : 2016**

**الشعبة: علوم تجريبية**

**اختبار في مادة: الرياضيات** **المدة: 03 سا و 30 د**

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:**

## الموضوع الأول

### التمرين الأوّل: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر المستويين $(P)$ و $(P')$ معادلتيهما على الترتيب : $2x+y-z+1=0$ و $x-2y+z-2=0$.

1) بيّن أنّ المستويين $(P)$ و $(P')$ متقاطعان.

2) عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقّق : $d\left(M,(P)\right)=d\left(M,(P')\right)$ حيث $d\left(M,(P)\right)$ المسافة بين النقطة $M$ والمستوي $(P)$ ، $d\left(M,(P')\right)$ المسافة بين $M$ و $(P')$.

3) تحقّق أنّ النقطة $A(1;2;0)$ تنتمي إلى المجموعة $(\Gamma)$.

4) $H$ و $H'$ المسقطان العموديان للنقطة $A$ على المستويين $(P)$ و $(P')$ على الترتيب.

أ - جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين $(AH)$ و $(AH')$.

ب - استنتج إحداثيات كل من النقطتين $H$ و $H'$.

5) عيّن إحداثيات النقطة $I$ منتصف القطعة $[HH']$ ثمّ احسب مساحة المثلث $AHH'$.

### التمرين الثاني: (05 نقاط)

**I)** $f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{2x+8}$.

$(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب - ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى $(C)$ مع المستقيم $(\Delta)$ الذي $y=x$ معادلة له.

3) ارسم $(C)$ و $(\Delta)$.

**II)** $(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) مثّل في الشكل السابق على محور الفواصل ، الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ ( بدون حسابها ) موضّحا خطوط الإنشاء.

2) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ و تقاربها.

3) أ - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $0\le u_n<4$.

ب - ادرس اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$.

جـ - بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$

ثمّ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$.

د - استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

**التمرين الثالث: ( 04,5 نقطة)**

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. من أجل كل نقطة $M$ من المستوي لاحقتها العدد المركب $z$ حيث $\left(z\neq 1\right)$ نرفق النقطة $M'$ لاحقتها العدد المركب $z'$ حيث: $z'=\frac{z-2}{z-1}$.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $z'=z$ .

2) النقطتان $A$ و $B$ لاحقتاهما على الترتيب $z_1$ و $z_2$ حيث: $z_1=1-i$ و $z_2=\overline{z_1}$ .

أ - اكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي.

ب - بيّن أنّ النقطة $B$ هي صورة للنقطة $A$ بالدوران $R$ الذي مركزه المبدأ $O$ ، يُطلب تعيين زاوية له.

3) نضع $z'\neq z$. نعتبر النقطتين $C$ و $D$ لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب.

عيّن $\left(\Gamma\right)$ مجموعة النقط $M$ حيث $M'$ تنتمي إلى محور التراتيب ثم أنشئ $\left(\Gamma\right)$.

4) $h$ التحاكي الذي مركزه المبدأ $O$ ونسبته 2 .

أ - عيّن طبيعة التحويل النقطي $S=h\circ R$ وعناصره المميّزة .

ب - اكتب العبارة المركبة للتحويل $S$.

جـ - عيّن ثمّ أنشئ المجموعة $\left(\Gamma'\right)$ صورة $\left(\Gamma\right)$ بالتحويل النقطي $S$.

**التمرين الرابع: ( 06,5 نقطة)**

**I)** $g$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $\left]0;+\infty\right[$ بـ: $g\left(x\right)=x^2+1-\ln x$ .

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ .

2) احسب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثمّ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $\left]0;+\infty\right[$، $g\left(x\right)>0$ .

**II)** $f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $\left]0;+\infty\right[$ بـ: $f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}+x-1$

و $\left(C\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ .

2) أ - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $\left]0;+\infty\right[$، $f'(x)=\frac{g\left(x\right)}{x^2}$ .

ب - شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$ .

3) اكتب معادلة للمماس $\left(T\right)$ للمنحنى $\left(C\right)$ في النقطة التي فاصلتها 1.

4) أ - بيّن أنّ $\left(C\right)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $\left(\Delta\right)$حيث: $y=x-1$ معادلة له.

ب - ادرس الوضع النسبي لـ $\left(C\right)$ و $\left(\Delta\right)$.

5) ارسم المستقيمين $\left(T\right)$ و $\left(\Delta\right)$ ثمّ المنحنى $\left(C\right)$.

6) $m$ عدد حقيقي. $\left(\Delta_m\right)$ المستقيم حيث : $y=mx-m$ معادلة له.

أ - تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $m$، النقطة $A(1;0)$تنتمي إلى المستقيم $\left(\Delta_m\right)$.

ب - ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة: $f\left(x\right)=mx-m$ .

7) أ - جد دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ على المجال $\left]0;+\infty\right[$ .

ب - احسب $I_n$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $\left(C\right)$ ، المستقيم $\left(\Delta\right)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=n$ حيث $n$ عدد طبيعي ( $n>1$ ).

جـ - عيّن أصغر عدد طبيعي $n_0$ بحيث إذا كان $n>n_0$ فإنّ : $I_n>2$ .

**انتهى الموضوع الأول**

## الموضوع الثاني

**التمرين الأول: ( 04,5 نقطة)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقطتين $A(5;-1;-2)$ و $B(3;12;-7)$ .

$(\Delta)$المستقيم المعرّف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=1+3k \\ y=1+2k \quad ; \quad (k\in\mathbb{R}) \\ z=4k \end{cases}$ .

1) أ) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta')$ الذي يشمل النقطة $A$ و $\vec{u}(-2;1;1)$ شعاع توجيه له .

ب) بيّن أنّ المستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta')$متعامدان ، ثمّ تحقق أنّ النقطة $C(1;1;0)$ نقطة تقاطعهما.

2) $(P)$ المستوي المعيّن بالمستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta')$.

أ) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;11;-7)$ ناظمي للمستوي $(P)$، ثمّ جد معادلة ديكارتية له.

ب) بيّن أنّ النقطة $C$ هي المسقط العمودي للنقطة $B$ على المستوي $(P)$.

3) $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان و $(P')$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء المعرفة بـ : $\begin{cases} x=3-\beta \\ y=12+12\alpha+9\beta \\ z=-7-6\alpha-11\beta \end{cases}$

أ) أثبت أنّ المجموعة $(P')$ هي مستوٍ ثمّ تحقق أنّ $13x-y-2z-41=0$ هي معادلة ديكارتية له .

ب) عيّن إحداثيات $D$ و $E$ نقطتي تقاطع المستوي $(P')$ مع المستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta')$على الترتيب.

ج) احسب حجم رباعي الوجوه $BCDE$ .

**التمرين الثاني: (04 نقاط)**

**I)** $f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـِ: $f(x)=\dfrac{5x}{x+2}$ .

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[0;+\infty[$ : $f(x)\geq 0$ .

**II)** $(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=\dfrac{5u_n}{u_n+2}$.

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $1\leq u_n\leq 3$ .

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ ، ثمّ استنتج أنها متقاربة .

2) $(v_n)$ المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=1-\dfrac{3}{u_n}$ .

أ) برهن أنّ $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$ ، يطلب حساب حدها الأول $v_0$ .

ب) اكتب بدلالة $n$ عبارة $v_n$ ثم استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$.

ج) احسب نهاية المتتالية $(u_n)$.

3) اكتب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n=\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\ldots+\dfrac{1}{u_n}$ .

**التمرين الثالث: ( 04,5 نقطة )**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة : $\left(z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$ .

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ . $A$ ، $B$ و $C$ نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ ، $z_B=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$ .

أ) اكتب $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسي .

ب) بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر $S$ مركزه $B$ ويحوّل النقطة $C$ إلى النقطة $A$ يطلب تعيين عناصره المميزة.

3) أ) عيّن لاحقة النقطة $D$ حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثمّ حدّد بدقة طبيعته.

ب) عيّن $(E)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ والتي تحقق : $\left|z-z_A\right|=\left|\overline{z}-z_B\right|$ حيث $\overline{z}$ هو مرافق $z$ .

ج) عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ والتي تحقق : $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما $\theta$ يتغير على $\mathbb{R}$ ثم تحقّق أنّ النقطة $A$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ .

**<u>التمرين الرابع</u>: ( 07 نقاط)**

**I)** $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+\left(x^2+x-1\right)e^{-x}$ .

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

2 ) أ ) بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلّين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث : $-1{,}52<\alpha<-1{,}51$ .

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ .

**II)** $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}$ و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، ( وحدة الطول $1cm$ ) .

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x)=-g(x)$ .(حيث $f'$ هي الدالة المشتقة للدالة $f$ ).

ج) شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ ، ( نأخذ $f(\alpha)\approx 0{,}38$ ) .

د) عيّن دون حساب: $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

2) أ) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=-x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$ .

ب) ادرس وضعية المنحنى $\left(C_f\right)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ .

ج) بيّن أنّ للمنحنى $\left(C_f\right)$ نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثييهما.

د) ارسم $(\Delta)$ و $\left(C_f\right)$ على المجال $\left]-2;+\infty\right[$ .

هـ) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-x)e^{x}+\left(x^2+3x+2\right)=0$ على المجال $\left]-2;+\infty\right[$.

**III)** $h$ و $H$ الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x+f(x)$ و $H(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$ .

1) عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ حتّى تكون الدالة $H$ دالة أصلية للدالة $h$ على $\mathbb{R}$ .

2) أ) احسب التكامل التالي : $A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx$ حيث $\lambda$ عدد حقيقي موجب تماما وفسّر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$ .

**انتهى الموضوع الثاني**

| عناصر الإجابة ( الموضوع الأوّل ) | العلامة | |
|---|---|---|
| | مجزأة | مجموع |
| **<u>التمرين الأوّل:</u> ( 04 نقاط )** | | |
| 1) $\overrightarrow{n_{(P)}}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي لـ $(P)$، $\overrightarrow{n_{(P')}}(1;-2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P')$.<br>$\overrightarrow{n_{(P)}}$ و $\overrightarrow{n_{(P')}}$ غير مرتبطين خطيا ومنه $(P)$ و $(P')$ يتقاطعان وفق مستقيم. | 0,75 | |
| 2) $d(M,(P))=d(M,(P'))$ معناه $\frac{\lvert x-2y+z-2\rvert}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{\lvert 2x+y-z+1\rvert}{\sqrt{4+1+1}}$ أي<br>$\lvert x-2y+z-2\rvert=\lvert 2x+y-z+1\rvert$ أي $x+3y-2z+3=0$ أو $3x-y-1=0$. ومنه<br>مجموعة النقط $(\Gamma)$ هي إتحاد مستويين معادلتيهما: $x+3y-2z+3=0$ و $3x-y-1=0$. | 0,50 | |
| 3) $A(1;2;0)$، $3x_A-y_A-1=0$ أو $d(A,(P))=d(A,(P'))=\frac{5}{\sqrt{6}}$ ومنه $A\in(\Gamma)$. | 0,25 | |
| 4) أ . $(AH):\begin{cases}x=2t+1\\y=t+2\\z=-t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ ؛ $(AH'):\begin{cases}x=t'+1\\y=-2t'+2\\z=t'\end{cases}\ (t'\in\mathbb{R})$.<br>( تقبل أيّ تمثيلات وسيطية صحيحة ) . | 0,50 | 04 |
| ب . نعوّض في معادلة $(P)$: نجد $t=-\frac{5}{6}$ و منه $H\left(-\frac{2}{3};\frac{7}{6};\frac{5}{6}\right)$.<br>نعوّض في معادلة $(P')$: نجد $t'=\frac{5}{6}$ و منه $H'\left(\frac{11}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$. | 01 | |
| 5) $I\left(\frac{7}{12};\frac{3}{4};\frac{5}{6}\right)$ . | 0,25 | |
| المثلث $AHH'$ متساوي الساقين $AH=AH'$ ومنه $S_{AHH'}=\frac{1}{2}(HH'\times AI)(u.a)$<br>$\overrightarrow{HH'}\left(\frac{15}{6};-\frac{5}{6};0\right)$ ؛ $HH'=\frac{5\sqrt{10}}{6}$ ؛ $\overrightarrow{AI}\left(-\frac{5}{12};-\frac{5}{4};\frac{5}{6}\right)$ و منه : $AI=\frac{5\sqrt{14}}{12}$،<br>وبالتالي $S_{AHH'}=\frac{25}{72}\sqrt{35}(u.a)$. | 0,75 | |
| **<u>التمرين الثاني:</u> ( 05 نقاط )** | | |
| I) 1) أ . $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ . | 0,25 | |
| ب . من أجل كل $x\in[0;+\infty[$، $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+8}}$ إذن $f$ متزايدة تماما على $[0;+\infty[$<br>. <u>جدول التغيّرات</u>: | 0,25<br>0,25 | |
| 2) $\begin{cases}y=f(x)\\y=x\end{cases}$ أي $\begin{cases}\sqrt{2x+8}=x\\x\geq 0\end{cases}$ و منه $\begin{cases}x^2-2x-8=0\\x\geq 0\end{cases}$<br>( $x_1=-2$ مرفوض ) ، $x_2=4$ إذن نقطة تقاطع $(C_f)$ مع $(\Delta)$ هي: $A(4;4)$. | 0,25 | 02 |
| 3) رسم $(C_f)$ و $(\Delta)$: | 0,50 | |
| II) 1) تمثيل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ على حامل محور الفواصل . | 0,50 | |

| عناصر الاجابة ( الموضوع الأوّل ) | العلامة | |
|---|---|---|
| | مجزأة | مجموع |
| 2) التخمين: نلاحظ $u_0<u_1<u_2<u_3$ إذن يبدو أنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما وأنها متقاربة وتتقارب نحو العدد 4. | $0,25$ | |
| 3) أ. لدينا $u_0=0$ ومنه $0\le u_0<4$<br>نفرض أنّ $0\le u_n<4$ و منه $f(0)\le f(u_n)<f(4)$ أي $0\le 2\sqrt{2}\le u_{n+1}<4$<br>أي $0\le u_{n+1}<4$ وهذا هو المطلوب. | $0,75$ | |
| ب. من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+8}-u_n=\frac{(4-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{2u_n+8}+u_n}$ بما أن $0\le u_n<4$ فإن $u_{n+1}-u_n>0$ وعليه فالمتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما. | $0,50$ | |
| جـ. من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $4-u_{n+1}=4-\sqrt{2u_n+8}=\frac{2(4-u_n)}{4+\sqrt{2u_n+8}}$<br>$4+\sqrt{2u_n+8}\ge 4$ ومنه $\frac{1}{4+\sqrt{2u_n+8}}\le\frac{1}{4}$ إذن $4-u_{n+1}\le\frac{2(4-u_n)}{4}$<br>و بالتالي: من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$ . | $0,50$ | 03 |
| $4-u_1\le\frac{1}{2}(4-u_0)$ ؛ $4-u_2\le\frac{1}{2}(4-u_1)$ ؛ ... ؛ $4-u_n\le\frac{1}{2}(4-u_{n-1})$ بالضرب طرف إلى طرف نجد: $(4-u_1)(4-u_2)...(4-u_n)\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(4-u_0)(4-u_1)...(4-u_{n-1})$<br>إذن $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$ ( تقبل أيّ طريقة أخرى ) . | $0,50$ | |
| د) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}(4-u_0)=0$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $0<4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(4-u_n)=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$ . | $0,50$ | |
| **التمرين الثالث: ( 04,5 نقطة )** | | |
| 1) $z'=z$ معناه $z-2=z(z-1)$ مع $z\ne1$<br>أي $z^2-2z+2=0$ مع $z\ne1$ ؛ $\Delta=(2i)^2$ و $z_1=1-i$ ، $z_2=1+i$ . | $0,75$ | |
| 2) أ . $\frac{z_2}{z_1}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ | $0,75$ | |
| ب - $\frac{z_2}{z_1}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $R$ الدوران الذي مركزه $O$ و $\frac{\pi}{2}$ زاوية له. ( تُقبل أي طريقة أخرى ). | $0,50$ | 02,75 |
| 3) $z'\ne0$ : $\arg(z')=\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_D}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ؛ $(\overrightarrow{DM};\overrightarrow{CM})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، $(k\in\mathbb{Z})$<br>أو $z'=0$ أي $z=2$ و $M=C$ .<br>إذن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ هي الدائرة التي قطرها $[CD]$ باستثناء النقطة $D$ . ( تُقبل أي طريقة أخرى ). | $0,50$ | |
| إنشاء المجموعة $(\Gamma)$: | $0,25$ | |

| العلامة | | عناصر الإجابة ( الموضوع الأوّل ) |
|---|---|---|
| مجموع | مجزأة | |
| 01,75 | 0,50 | 4) أ - $S=h\circ R$ ؛ $h$ تحاك مركزه $O$ نسبته 2 و $R$ دوران مركزه $O$ زاويته $\frac{\pi}{2}$ إذن $S$ التشابه المباشر الذي مركزه $O$ ، نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{2}$. |
| | 0,25 | ب - $z'=2e^{i\frac{\pi}{2}}z$ أي $z'=2iz$ . |
| | 0,75 | جـ - $S(\Gamma)=(\Gamma')$ إذن $(\Gamma')$ هي الدائرة التي قطرها $[C'D']$ باستثناء النقطة $D'$ حيث $C'=S(C)$ و $D'=S(D)$ أي $z_{C'}=4i$ و $z_{D'}=2i$ . ( تُقبل أي طريقة أخرى ). |
| | 0,25 | - إنشاء $(\Gamma')$. |
| 06 | | **التمرين الرابع: ( 06,5 نقطة )** |
| | 0,50 | I) 1) $g'(x)=\frac{2x^2-1}{x}$ ؛ إشارة $g'(x)$ على $]0;+\infty[$ : $0 \quad - \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad + \quad +\infty$ |
| | 0,25 | الدالة $g$ متناقصة تماما على $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ . |
| | 0,5 | 2) $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 1,85$ ؛ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g(x)>g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ إذن $g(x)>0$ . |
| | 0,50 | II) 1) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ . |
| | 0,25 | 2) أ . من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+1=\frac{g(x)}{x^2}$ . |
| | 0,25 | إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$ : إذن من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ . |
| | 0,25 | ب . جدول تغيّرات الدالة $f$ . |
| | 0,25 | 3) معادلة المماس لـ $(C)$ عند النقطة التي فاصلتها 1 هي : $(T): y=2x-2$. |
| | 0,25 | 4) أ . $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ إذن المنحنى $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا $(\Delta)$ عند $+\infty$ معادلة له : $y=x-1$ . |
| | 0,50 | ب . وضعية $(C)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$: إشارة $f(x)-(x-1)=\frac{\ln x}{x}$ و الوضعية |
| | 0,75 | 5) رسم المستقيمين $(T)$ ، $(\Delta)$ و المنحنى $(C)$. |
| | 0,25 | 6) أ . $y_A=mx_A-m$ أي $0=m\times 1-m$ |
| | 0,50 | ب . المناقشة بيانيا:من أجل كل $m$ من $\mathbb{R}$، المستقيم ذو المعادلة $y=mx-m$ يشمل النقطة $A(1;0)$ . $(\Delta_m)$ معامل توجيهه $m$ و $(\Delta)$ معامل توجيهه 1 و $(T)$ معامل توجيهه 2 .<br>– إذا كان $m\le 1$ فإنّ المعادلة تقبل حلا وحيدا.<br>– إذا كان $1<m<2$ أو $m>2$ فإنّ المعادلة تقبل حلين متمايزين ( 1 و آخر )<br>– إذا كان $m=2$ فإنّ المعادلة تقبل حلا مضاعفا ( هو 1 ). |
| | 0,25 | 7) أ . الدالة: $x\mapsto\frac{1}{2}(\ln x)^2$ هي أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$ . |
| | 0,75 | ب - $\left(\int_1^n\frac{\ln x}{x}dx\right)u.a=\left(\int_1^n\left(f(x)-(x-1)\right)dx\right)u.a=I_n$ أي: $I_n=\left(\frac{1}{2}(\ln n)^2\right)u.a$ . |

| عناصر الإجابة (الموضوع الثاني ) | العلامة مجزأة | العلامة مجموع |
|---|---|---|
| جـ - أصغر قيمة لـ $n_0$ بحيث إذا كان $n > n_0$ فإنّ $I_n > 2$ .<br>$I_n > 2$ معناه $(\ln n)^2 > 4$ أي $n > e^2$ وعليه: أصغر قيمة لـ $n_0$ هي: $n_0 = 8$ . | $0,50$ | $0,50$ |
| **<u>التمرين الأول:</u> ( 04,5 نقطة )** | | $04,5$ |
| 1-أ) تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta')$ هو : $(\Delta'):\begin{cases} x = 5-2t \\ y = -1+t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2+t \end{cases}$ | $0,50$ | |
| ب) نبين أنّ $(\Delta) \perp (\Delta')$ ، $(\Delta) \cap (\Delta') = \{C\}$ حيث : $C(1;1;0)$ . | $01$ | |
| 2-أ) نبيّن أنّ : $\vec{n}(2;11;-7)$ ناظمي لـ $(P)$ يكفي أن نبيّن أنّ $\vec{n} \perp \vec{u}$ و $\vec{n} \perp \vec{v}$<br>معادلة المستوي $(P)$ هي : $2x+11y-7z-13=0$ . | $0,50$<br>$0,50$ | |
| ب) نبيّن أن $C$ هي المسقط العمودي لـ $B$ على $(P)$ :لدينا $C \in (P)$ و $\overrightarrow{BC}(2;11;-7) = \vec{n}$ .<br>( تُقبل أيّ طريقة أخرى صحيحة ). | $0,50$ | |
| 3-أ) إثبات أنّ $(P')$ هي مستو: المستوي $(P')$ مزود بالمعلم $(B;\vec{w},\vec{v})$ حيث $B(3;12;-7)$ و $\vec{W}(0;12;-6)$ و $\vec{V}(-1;9;-11)$ والشعاعين $\vec{W}$ و $\vec{V}$ غير مرتبطين خطيا ، معادلة المستوي $(P')$ هي: $-13x+y+2z+41=0$. | $0,50$ | |
| ب) $(P') \cap (\Delta) = \{D\}$ و $(P') \cap (\Delta') = \{E\}$ حيث: $D(4;3;4)$ و $E(3;0;-1)$ . | $0,50$ | |
| جـ) حجم رباعي الوجوه $BCDE$ : $V_{BCDE} = \frac{1}{3} S_{CDE} \times CB = \frac{1}{6} \times CD \times CE \times CB$ .<br>ومنه : $V_{BCDE} = 29\,u.v$. | $0,50$ | |
| **<u>التمرين الثاني:</u> ( 04 نقاط )** | | $03,5$ |
| I) 1- أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$ . | $0,25$ | |
| ب. $f'(x) = \frac{10}{(x+2)^2}$ و منه $f'(x) > 0$ أي $f$ متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.<br>جدول تغيّرات الدالة $f$ . | $0,25$<br>$0,25$ | |
| 2) تبيان أنّ: من أجل كل $x$ من $[0;+\infty[$، $f(x) \geq 0$ . | $0,25$ | |
| II) 1 - أ. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $1 \leq u_n \leq 3$ . | $0,5$ | |
| ب. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ . لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n(u_n-3)}{u_n+2} \geq 0$ ومنه المتتالية $(u_n)$ متزايدة على $\mathbb{N}$. بما أنّ $(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة. | $0,25$<br>$0,25$ | |
| **2-** أ. البرهان أنّ $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ ، $v_0 = -2$ . | $0,50$ | |
| ب. من أجل كل عدد طبيعي $n$: $v_n = -2\left(\frac{2}{5}\right)^n$ ، $u_n = \frac{3}{1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n}$. | $0,75$ | |
| جـ. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$ . | $0,25$ | |

| عناصر الإجابة (الموضوع الثاني) | العلامة مجزأة | العلامة مجموع |
|---|---|---|
| 3- حساب $S_n$ : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+....+\frac{1}{u_n}=\frac{1}{3}\left[(1+1+...+1)-(v_0+v_1+...+v_n)\right]$<br>ومنه $S_n=\frac{1}{3}\left[(n+1)-\left(v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)\right]$ أي أنّ : $S_n=\frac{1}{3}\left[(n+1)+\frac{10}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)\right]$ . | 0,50 | 0,50 |
| **<u>التمرين الثالث:</u> ( 04,5 نقطة )** | | 04,5 |
| 1- حلول المعادلة في $\mathbb{C}$ هي: $z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ، $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_3=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ . | 0,75 | |
| 2- أ) كتابة $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسي: $z_A=e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_A=e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_A=e^{i\frac{7\pi}{6}}$ . | 0,75 | |
| ب) تبيان أنّه، يوجد تشابه مباشر $S$ :لدينا $z_A-z_B=i\sqrt{3}(z_C-z_B)$ . | 0,25 | |
| ج) نسبة التشابه المباشر $S$ هي $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ صيغته المركبة هي: $z'-z_B=i\sqrt{3}(z-z_B)$ | 0,75 | |
| 3-أ) لاحقة $D$ : لدينا: $z_D-z_C=z_A-z_B$ ومنه: $z_D=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ الرباعي $ABCD$ مستطيل. | 0,75 | |
| ب) تعيّين المجموعة $(E)$ :لدينا $\lvert z-z_A\rvert=\lvert\bar{z}-z_B\rvert$ تكافئ $\lvert z-z_A\rvert=\lvert\overline{z-z_C}\rvert$<br>وتكافئ $\lvert z-z_A\rvert=\lvert z-z_C\rvert$ ومنه $AM=CM$ وعليه $(E)$ هي المستقيم المحوري لـ $[AC]$ | 0,50 | |
| ج) المجوعة $(\Gamma)$ هي دائرة مركزها $B$ و نصف قطرها لدينا : $\sqrt{3}$<br>النقطة $A$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ لأنّ $AB=\sqrt{3}$. | 0,75 | |
| **<u>التمرين الرابع :</u> ( 07 نقاط )** | | 04 |
| I ) 1- أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$ . | 0,50 | |
| ب) من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا : $g'(x)=(-x^2+x+2)e^{-x}$ ومنه : $g'(x)\leq 0$ من أجل $x\in]-\infty;-1]\cup[2;+\infty[$ و $g'(x)\geq 0$ من أجل $x\in[-1;2]$ و هذا يعني أنّ الدالة $g$ متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-1]$ و $[2;+\infty[$ ومتزايدة تماما على $[-1;2]$.<br>جدول التغيّرات للدالة $g$ . | 01 | |
| 2- أ ) تبيّان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث : $-1{,}52<\alpha<-1{,}51$ .( مبرهنة القيم المتوسطة ) . | 0,75 | |
| ب) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ : $g(x)\leq 0$ من أجل $x\in[\alpha;0]$ .<br>$g(x)\geq 0$ من أجل $x\in]-\infty;\alpha]\cup[0;+\infty[$ . | 0,25 | |
| II -1- أ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ . | 0,50 | |
| ب) بيّن أنه ، من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x)=-g(x)$ . | 0,25 | |
| ج) تشكّيل جدول تغيّرات الدالة $f$ على $\mathbb{R}$. | 0,25 | |
| د) تعيّين : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)=0$ ، النتيجة :المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا<br>عند النقطة ذات الفاصلة $\alpha$ معامل توجيهه معدوم ( يوازي حامل محور الفواصل ) . | 0,25<br>0,25 | |

| العلامة | | عناصر الإجابة (الموضوع الثاني ) |
|---|---|---|
| مجموع | مجزأة | |
| 03 | 0,50 | 2- أ) تبيان أنّ $(\Delta)$ مستقيم مقار بمائل لـ $(C_f)$:<br>$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}=0$ |
| | 0,25 | ب) دراسة الوضعية النسبية: $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ عند النقطتين $A(-1;1)$ و $B(-2;2)$<br>و $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ من اجل $x\in]-\infty;-2]\cup[-1:+\infty[$ و $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ من أجل $x\in[-2;-1]$. |
| | 0,50 | ج) تبيّان أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثياهما.<br>لدينا : $f''(x)=-g'(x)$ و منه $f''(x)=0$ من أجل $x=-1$ أو $x=2$ و بالتالي<br>المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطتي انعطاف هما: $A(-1;1)$ و $C\left(2;-2+\frac{12}{e^2}\right)$. |
| | 0,50 | د) رسم $(\Delta)$ و $(C_f)$ على المجال $[-2;+\infty[$ . |
| | 0,50 | هـ) المناقشة البيانية :لدينا $(m-x)e^x+\left(x^2+3x+2\right)=0$ تكافئ $f(x)=-m$ . |
| | 0,25 | III) 1- من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ :لدينا $H'(x)=h(x)$ ومنه $H(x)=\left(-x^2-5x-7\right)e^{-x}$ . |
| | 0,25<br>+<br>0,25 | 2- حساب: $A(\lambda)=\int_0^\lambda h(x)dx=\left[H(x)\right]_0^\lambda=\left(-\lambda^2-5\lambda-7\right)e^{-\lambda}+7$ .<br>النتيجة $A(\lambda)$ هي مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات: $(C_f)$ ،<br>$x=\lambda$ و $x=0$ .<br>$\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=7$ . |