



دورة: 2020

المدة: 04 سا و 30 د

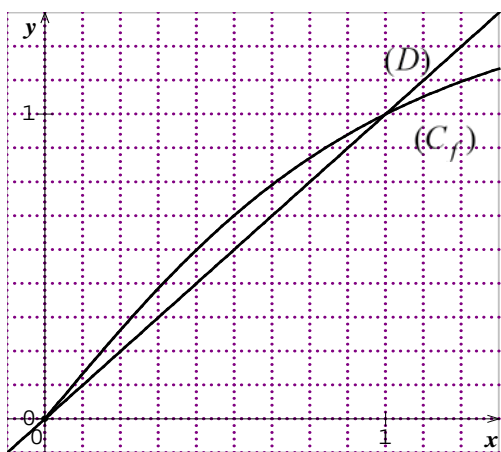
اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الدالة العددية f معرفة ومتزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + 5}}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.



المتتالية العددية (u_n) معرفة بحددها الأول u_0 حيث: $u_0 = \frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أ . أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل

الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط الإنشاء .

ب . ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

(2) أ . برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$.

ب . بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على \mathbb{N} ب: $v_n = \frac{u_n^2}{1 - u_n^2}$

برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{9}{5}$ يُطلب تعيين حددها الأول v_0 .

(4) أ . اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ب . احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر المعادلتين : $(E_1) 693x - 216y = 738 \dots$ و $(E_2) 77x - 24y = 82 \dots$ حيث x و y عدنان صحيحان .

(1) جد $PGCD(693; 216)$ و استنتج أن المعادلتين (E_1) و (E_2) متكافئتان .

(2) تحقّق أن الثنائية $(2; 3)$ حلّ للمعادلة (E_2) ثم أوجد حلولها في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(3) جد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E_2) التي تُحقّق : $|y - x| \leq 54$.

(4) ليكن N عددا طبيعيا يُكتب $\overline{\beta 68 \alpha}$ في النظام ذي الأساس 9 و يكتب $\overline{1 \alpha \beta 0 \alpha}$ في النظام ذي الأساس 6 .

حيث α و β عدنان طبيعيان .

جد العددين α و β ، ثم اكتب العدد N في النظام العشري .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- يحتوي كيس على أربع كريات حمراء مرقمة بـ: 2، 2، 2، 2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3، 3، 3. الكريات لا نفرق بينها باللمس، نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من هذا الكيس.
- (1) نعتبر الحدثين: A "الحصول على كرتين تحملان نفس الرقم" و B "الحصول على كرتين مختلفتين في اللون". أ. احسب احتمال كل من الحدثين A و B .
- ب. بيّن أنّ احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس الرّقم ومختلفتين في اللون يساوي $\frac{4}{21}$.
- ج. استنتج احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس الرّقم أو مختلفتين في اللون.
- (2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب جُداء الرّقمين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين. عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X .
- (3) في لعبة، يقوم لاعب بسحب كرتين: إذا كان جُداء رقميهما 4 يربح x^2 دينار، إذا كان جُداء رقميهما 6 يخسر y^2 دينار و إذا كان جُداء رقميهما 9 يخسر 130 دينار. (x و y عدنان طبيعيان غير معدومين) عيّن قيمة كلّ من x و y حتى تكون هذه اللعبة عادلة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) الدالة العددية g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + x + 2 \ln x$.
- (1) ادرس اتجاه تغيرات الدالة g .
- (2) احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$.
- (II) الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{-1 + (x-2) \ln x}{x}$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أ. احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.
- ب. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (2) أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- ب. عيّن اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
- (3) ليكن (Γ) المنحنى البياني الممثل للدالة: $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.
- أ. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.
- ب. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المنحنى (Γ) .
- (4) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاها α و β ، ثمّ تحقّق أنّ:
- $0,5 < \alpha < 0,6$ و $2,9 < \beta < 3$.
- (5) ارسم (Γ) ثمّ (C_f) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على كرتين خضراوين تحملان الرقمين 1 ، 2 ، وثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 و أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 2 ، 3 ، 3 ، 4 . (الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

I (نسحب من هذا الكيس 3 كريات في آن واحد .

1) احسب احتمال كل من الحدثين A و B التاليين:

A : " الحصول على 3 كريات من نفس اللون ."

B : " الحصول على كرية بيضاء على الأقل ."

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب أكبر الأرقام المحصل عليها.

أ . بين أن: $P(X=3)=\frac{3}{7}$ ثم عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ب. احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

II) نسحب الآن 3 كريات على التوالي دون إرجاع.

ليكن C الحدث: " الحصول على 3 أرقام جُداؤها عدد زوجي " .

احسب احتمال C .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) أ . ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .

ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $8^{2020} - 2 \times 3^{1441} - 1$ على 5 .

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نعتبر العدد الطبيعي a_n حيث: $a_n = 3^{n+1} + 4$.

عَيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $a_n \equiv 0[5]$.

3) نعتبر العدد الطبيعي b_n حيث: $b_n = 7a_n + 5$.

أ . عَيّن القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و b_n .

ب. بين أن: $a_n \equiv 0[5]$ إذا وفقط إذا كان $b_n \equiv 0[5]$.

ج. استنتج الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون a_n و b_n أوليين فيما بينهما.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n + 2}$.

(1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 < u_n < 2$

(2) أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$

ب. حدّد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

(3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على \mathbb{N} بـ : $v_n = \frac{u_n + \alpha}{u_n + 1}$ ، حيث α عدد حقيقي.

أ. اوجد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ، ثمّ احسب حدّها الأول v_0 .

ب. بيّن عندئذٍ أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2 \times 4^n - 1}{4^n + 1}$ ، ثمّ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على المجال $[-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{4}(2e^{-x} - 1)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2 cm).

(1) أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[-1; +\infty[$: $f'(x) = (1 - e^{-x})(2e^{-x} + 1)$

ب. ادرس إشارة $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغيّر الدالة f .

ج. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

(2) أ. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x - \frac{3}{4}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(3) بيّن أنّ المنحنى البياني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

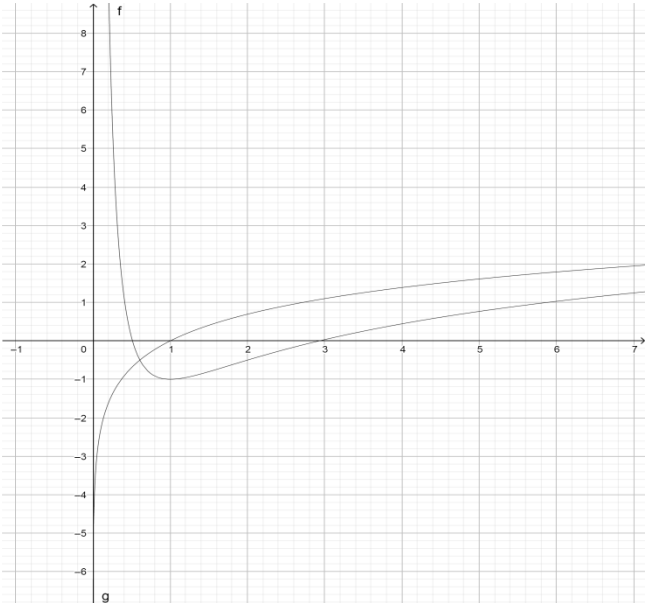
(4) بيّن أنّ المنحنى البياني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها.

(5) ارسم (Δ) ، (T) و المنحنى البياني (C_f) .

(6) ليكن m وسيطا حقيقيا. عيّن مجموعة قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة : $f(x) = x + m$ حلين مختلفين.

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموعة	مجزأة	
التمرين الأول: (04 نقاط)		
0.75	0.5	(1 أ) نقل الشكل وتمثيل الحدود الأربعة الأولى على محور الفواصل
	0.25	(ب) وضع تخمين: (u_n) متزايدة تماما ومقاربة.
1.5	0.5	(2 أ) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : \frac{1}{2} \leq u_n < 1$
	0.5	(ب) لدينا: من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(3 - \sqrt{4u_n^2 + 5})}{\sqrt{4u_n^2 + 5}}$
	0.25	وبما أن $3 - \sqrt{4u_n^2 + 5} > 0$ فإن (u_n) متزايدة تماما. (تقبل كل طريقة صحيحة للحل)
	0.25	استنتاج أن المتتالية (u_n) مقاربة.
0.75	0.5 0.25	(3) من أجل كل عدد طبيعي $n : v_{n+1} = \frac{9}{5}v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{9}{5}$ و $v_0 = \frac{1}{3}$
1	0.25	(4 أ) عبارة الحد العام $v_n : v_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^n$ و $u_n = \sqrt{\frac{1}{1 + 3\left(\frac{5}{9}\right)^n}}$
	0.5	
	0.25	(ب) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
0.75	0.5+ 0.25	(1) نجد: $PGCD(693; 216) = 9$ واستنتاج: (E_1) و (E_2) متكافئتان
1	0.25	(2) التَّحَقُّقُ أَنَّ الثَّنَائِيَّةَ (2;3) حَلٌّ للمعادلة (E_2)
	0.75	و حلول المعادلة (E_2) في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ هي الثنائيات: $(24k + 2; 77k + 3); k \in \mathbb{Z}$
0.75	0.75	(3) لدينا: $ y - x \leq 54$ يكافئ $k \in \{-1; 0; 1\}$ وبالتالي: $(x; y) \in \{(-22; -74), (2; 3), (26; 80)\}$
1.5	2x0.5	(4) $N = \overline{1\alpha\beta 0\alpha}^6 = 217\alpha + 36\beta + 1296$ و $N = \overline{\beta 68\alpha}^9 = \alpha + 729\beta + 558$
	0.25	مع $0 < \beta < 6$ و $0 \leq \alpha < 6$
	0.25	لدينا: $\alpha + 729\beta + 558 = 217\alpha + 36\beta + 1296$ تكافئ $693\beta - 216\alpha = 738$ ومنه: $N = 2019$ و $\beta = 2$ و $\alpha = 3$

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)							
مجموعة	مجزأة								
التمرين الثالث: (05 نقاط)									
1.5	2x0.75	(1) $P(A) = \frac{11}{21}$ ، $P(B) = \frac{12}{21}$							
1	0.5	(2) أ) $P(A \cap B) = \frac{C_4^1 \times C_1^1}{21} = \frac{4}{21}$							
	0.5	ب) الاستنتاج: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{19}{21}$							
1.5	0.25	(3) مجموعة قيم X هي $\{4; 6; 9\}$ وقانون احتمال X معرف بالجدول التالي:							
	1.25		<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x_i</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>$P(X = x_i)$</td> <td>$\frac{10}{21}$</td> <td>$\frac{10}{21}$</td> <td>$\frac{1}{21}$</td> </tr> </table>	x_i	4	6	9	$P(X = x_i)$	$\frac{10}{21}$
x_i	4	6	9						
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{21}$						
1	2x0.5	(4) تكون اللعبة عادلة من أجل $x^2 - y^2 = 13$ ومنه: $x = 7$ ، $y = 6$							
التمرين الرابع: (07 نقاط)									
0.75	0.5	(I) 1) من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{x+2}{x}$ و $g'(x) > 0$							
	0.25	ومنه g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.							
1	0.25+0.75	(2) نجد: $g(1) = 0$ ، $g(x)$ سالبة تماما على $]0; 1[$ وموجبة تماما على $]1; +\infty[$							
1	2x0.25	(II) 1) أ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. المستقيم ذي المعادلة $x = 0$ مقارب للمنحنى (C_f)							
	0.5	ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$							
1.25	0.5	(2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$							
	0.5	ب) الدالة f متناقصة تماما على $]0; 1[$ ومتزايدة تماما على $]1; +\infty[$							
	0.25	جدول التغيرات							
1.5	0.5	(3) أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x} - \frac{2 \ln x}{x} \right) = 0$							
	0.25	التفسير الهندسي: المنحنى (Γ) مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$							
	0.25	ب) لدينا: $f(x) - \ln x = -\frac{1}{x}(1 + 2 \ln x)$ إشارة المقدار $f(x) - \ln x$ يكون المنحنى (C_f) فوق (Γ) على المجال $]0; e^{\frac{-1}{2}}[$ و تحت (Γ) على $]e^{\frac{-1}{2}}; +\infty[$ و $(C_f) \cap (\Gamma) = \left\{ A \left(e^{\frac{-1}{2}}; \frac{-1}{2} \right) \right\}$							

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموعة	مجزأة	
0.75	0.5 0.25	<p>4) تبيان أن المنحنى (C_f) يتقاطع مع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β والتحقق أن: $0.5 < \alpha < 0.6$ و $2.9 < \beta < 3$</p>
0.75	0.25 0.5	<p>5) رسم (Γ) رسم (C_f)</p> 

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)							
مجموعة	مجزأة								
التمرين الأول: (04 نقاط)									
1.25	0.25 2x0.5	(I) لدينا عدد الحالات الممكنة : $C_9^3 = 84$ نجد: $P(A) = \frac{5}{84}$ ، $P(B) = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$							
2.25	0.25	(2) أ) قيم X هي 2 ، 3 و 4							
	0.75 2x0.5	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>x_i</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>$P(X = x_i)$</td> <td>$\frac{5}{21}$</td> <td>$\frac{9}{21}$</td> <td>$\frac{7}{21}$</td> </tr> </table> $P(X = 3) = \frac{3}{7}$ وقانون احتمال X :	x_i	2	3	4	$P(X = x_i)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{9}{21}$
x_i	2	3	4						
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{7}{21}$						
	0.25	ب) $E(X) = \frac{65}{21}$							
0.5	2x0.25	(II) عدد الحالات الممكنة: $A_9^3 = 504$ و منه: $P(C) = 1 - \frac{A_4^3}{504} = \frac{20}{21}$							
التمرين الثاني: (04 نقاط)									
1.5	1	(1) أ) دراسة بواقي قسمة 3^n على 5: من أجل $n = 4k$ نجد $3^n \equiv 1[5]$ ، من أجل $n = 4k + 1$ نجد $3^n \equiv 3[5]$ من أجل $n = 4k + 2$ نجد $3^n \equiv 4[5]$ ، من أجل $n = 4k + 3$ نجد $3^n \equiv 2[5]$							
	0.5	ب) باقي قسمة العدد: $8^{2020} - 2 \times 3^{1441} - 1$ على 5 هو 4							
0.75	0.75	(2) لدينا: $a_n \equiv 0[5]$ يكافئ: $n = 4k + 3$ و k عدد طبيعي							
1.75	0.5	(3) أ) القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و b_n هي 1 و 5							
	0.5	ب) بيان أنّ: $a_n \equiv 0[5]$ اذا وفقط اذا كان $b_n \equiv 0[5]$							
	0.25	ج) قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون القاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و b_n هو 5 هي $n = 4k + 3$ و k عدد طبيعي، بالتالي:							
	0.25 0.25	قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها a_n و b_n أوليان فيما بينهما هي: $n = 4k$ ، $n = 4k + 1$ و $n = 4k + 2$ مع k عدد طبيعي							
التمرين الثالث: (05 نقاط)									
1	1	(1) برهان بالتراجع، أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 < u_n < 2$							
1.25	0.5	(2) أ) بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{u_n + 2}$							
	0.5	ب) المتتالية (u_n) متزايدة تماما على \mathbb{N} . الاستنتاج: المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة							

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموعة	مجزأة	
2.75	1	<p>(3) لدينا: $v_n = \frac{u_n + \alpha}{u_n + 1}$ حيث α عدد حقيقي.</p> <p>(أ) قيمة α حتى تكون (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ هي -2.</p> <p>ونجد $v_0 = -1$</p>
	0.25	
	0.5	<p>(ب) من: $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$ نجد: $u_n = \frac{v_n + 2}{1 - v_n}$ ولدينا: $v_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^n$</p> <p>بالتالي: $u_n = \frac{2 \times 4^n - 1}{4^n + 1}$</p> <p>ونجد: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$</p>
	0.25	
التمرين الرابع: (07 نقاط)		
2	0.5	<p>(1) (أ) بيان أنه من أجل كل x من $[-1; +\infty[$: $f'(x) = (1 - e^{-x})(2e^{-x} + 1)$</p> <p>(ب) $f'(x) < 0$ على $[-1; 0[$: و $f'(x) > 0$ على $]0; +\infty[$ مع: $f'(0) = 0$</p> <p>الاستنتاج: الدالة f متناقصة تماما على $[-1; 0[$ و متزايدة تماما على $]0; +\infty[$</p> <p>(ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$</p> <p>جدول التغيرات</p>
	0.5	
	0.25	
	0.25	
1.25	0.5	<p>(2) (أ) لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(x - \frac{3}{4}\right) \right] = 0$ ومنه (Δ) مقارب مائل لـ (C_f)</p> <p>(ب) من إشارة $\left[f(x) - \left(x - \frac{3}{4}\right) \right]$</p> <p>نجد: (C_f) فوق (Δ) على $[-1; 0[$ و (C_f) تحت (Δ) على $]0; +\infty[$</p> <p>و $(C_f) \cap (\Delta) = \left\{ A \left(0; -\frac{3}{4} \right) \right\}$</p>
	0.5	
	0.25	
0.75	0.5	<p>(3) لدينا: $f'(x) = 1$ يكافئ: $x = \ln 2$ بالتالي (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ)</p> <p>في النقطة التي فاصلتها $\ln 2$</p> <p>و $(T): y = x - 1$</p>
0.25		
1.25	0.5	<p>(4) لدينا: من أجل كل x من $[-1; +\infty[$: $f''(x) = e^{-x}(4e^{-x} - 1)$</p> <p>و f'' تنعدم عند $\ln 4$ مغيرة إشارتها بالتالي $w \left(\ln 4; -\frac{15}{6} + \ln 4 \right)$ نقطة انعطاف</p>
0.5		
0.25		

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموعة	مجزأة	
1	2×0.25	<p>5) رسم (Δ) و (T) رسم (C_f)</p>
	0.5	
0.75	0.25 0.5	<p>6) حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y = x + m$ بالتالي للمعادلة حلان مختلفان يكافئ $m \in]-1; -\frac{3}{4}[$</p>