

موضوع الرياضيات لشعبة تقني رياضي بكالوريا 2011

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

دورة: جوان 2011

وزارة التربية الوطنية

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: تقني رياضي

المدة: 04 ساعات ونصف

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $(E) z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة (E) ، ثم اكتب حلولها على الشكل المثلثي.

(2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقاط A, B, C التي لاحقاتها على

الترتيب: $z_A = 2i$ ، $z_B = \sqrt{3} + i$ ، $z_C = \sqrt{3} - i$ ، نضع: $L = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(أ) اكتب L على الشكل الأسّي.

(ب) أثبت أن: $z_A - z_B = L(z_C - z_B)$ ، ثم استنتج أن صورة C بتحويل نقطي يطلب تعيينه وتحديد

عناصره المميزة.

(ج) استنتج نوع المثلث ABC ثم احسب مساحته S .

التمرين الثاني: (06 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{a+b \ln 2x}{4x^2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان و (C_f)

المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1/ عيّن a و b بحيث يكون المماس في النقطة $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ للمنحنى (C_f) موازيا لحامل محور الفواصل.

2/ g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{1+2 \ln 2x}{4x^2}$ و (C_g) المنحنى الممثل لها في

المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ ، فسّر النتيجة هندسيا.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(ج) حل في $]0; +\infty[$ المعادلة $g(x) = 0$.

(د) أنشئ (C_g) .

3/ (أ) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = \frac{1 + \ln 2x}{2x}$ احسب $h'(x)$.

(ب) تحقق أن: $g(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{\ln 2x}{2x^2}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- 1/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ، ثم استنتج أن: $u_n > 1$
- 2/ ادرس اتجاه تغير (u_n) ثم بيّن أنها متقاربة ، احسب نهاية (u_n) .
- 3/ ليكن الجداء p_n المعروف كما يلي: $p_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$
- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$
- 4/ (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي: $v_n = \ln u_n$ حيث \ln دالة اللوغاريتم النيبيري
- عبر بدلالة p_n عن S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ثم احسب نهاية S_n لما n ينتهي إلى $+\infty$

التمرين الرابع: (05 نقاط)

- أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:
- 1/ المعادلة: $21x + 14y = 40$ لا تقبل حولا في مجموعة الأعداد الصحيحة
- 2/ في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون: $3421 + 1562 = 5413$
- 3/ باقي القسمة الإقليدية للعدد: $3^{2011} + 3^2 + \dots + 3 + 1$ على 7 هو: 6
- 4/ الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- أ- المستوي (ρ) الذي معادلته $2x + y - z + 1 = 0$ والمسقيم (d) الذي يشمل النقطة $A(2; 1; -1)$ و $\vec{u}(1; -1; 1)$ شعاع توجيهه لا يشتركان في أية نقطة.
- ب- معادلة المستوي (ρ) الذي يشمل مبدأ المعلم O ويوازي المستوي (ρ) هي: $x - y + z = 0$

الموضوع الثاني

(المدة: 20 دقيقة)

التمرين الأول: (04.5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط A, B, C و D حيث:

$$\overline{AD}(1; 5; 2), \overline{BD}(0; 7; 3), \overline{CD}(1; -3; 7) \text{ و } C(2; 8; -4)$$

1/ بين أن النقط A, B, C, D تعين مستويا.

2/ بين أن المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD)

3/ المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)

أ) بين أن المستقيم (AB) يعامد المستوي (CDI)

ب) عين معادلة للمستوي (CDI) واكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

ج) استنتج إحداثيات النقطة I

4/ احسب الأطوال AB, CD, DI واستنتج حجم رباعي الوجوه $ABCD$

$$\left(\text{مساحة رباعي الوجوه} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع} \right)$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

$$L = \frac{-4\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{5 + 3i} \text{ . العدد المركب المعرف كما يلي:}$$

1/ أ) اكتب L على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي.

ب) بين أن: $L^2 + 1 = 0$ ، ثم احسب: $(-4\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{12} + (5 + 3i)^{12}$.

ج) n عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي أثبت أن: $L^{4n} + L^{4p} = 0$.

2/ أ) النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = 5 + 3i$ و $z_B = 5 - 3i$ عين اللاحقة z_A للنقطة

A' صورة النقطة A بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة B ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$.

ب) عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABA' .

التمرين الثالث: (07.5 نقطة)

(أ) f الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} كما يلي:

$$f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$$

(C_f) منحناها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- ادرس تغيّرات الدالة f .
- 2- عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .
- 3- بيّن أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها ثم اكتب معادلة لمماس (C_f) عندها.
- 4- لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = f(x) - x$.
أ- ادرس تغيّرات الدالة g .

ب- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2,7 < \alpha < 2,8$

5- أ- حل في \mathbb{R} المعادلة: $f(x) = 0$.

ب- ارسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = x$ والمنحنى (C_f) .

(ب) (U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$

- 1- باستخدام (C_f) والمستقيم (Δ) مثّل U_0 و U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل.
- 2- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1 \leq U_n < \alpha$.
- 3- بيّن أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما.
- 4- استنتج أن (U_n) متقاربة و بيّن أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

التمرين الرابع: (04 نقاط)

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

- 1) تحقّق أن: $4 \equiv -3[7]$ ثم بيّن أن: $A_3 \equiv 6[7]$.
- 2) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 7.
- 3) بيّن أنه إذا كان n فرديا فإن: $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7 واستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7.
- 4) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7؟

التصحيح الرسمي لموضوع الرياضيات شعبة تقني رياضي بكالوريا 2011

الإجابة النموذجية و سلم التنقيط

امتحان شهادة البكالوريا دورة : 2011

المادة : رياضيات الشعبة: تقني رياضي

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	محاور الموضوع												
المجموع	مجزأة														
04	0,25×2	<p>الموضوع الأول</p> <p>التمرين الأول: (04 نقاط)</p> <p>1/ حلل المعادلة (E) : $z_1 = \sqrt{3} - i$ ، $z_2 = \sqrt{3} + i$</p> <p>$z_1 = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$ و $z_2 = 2 \left[\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \right]$</p> <p>(2) أ) $L = e^{\frac{4\pi}{3}}$</p> <p>ب) إثبات أن $z_A - z_B = L(z_C - z_B)$ ومنه A صورة C بالدوران الذي مركزه النقطة B ذات اللاحقة $\sqrt{3} + i$ وقيس زاويته $\frac{4\pi}{3}$</p> <p>ج) المثلث ABC مثلث متقايس الساقين $AB = BC$ مساحته s حيث</p> <p>$s = \frac{1}{2} AC \times BH = \sqrt{3}ua$ حيث H منتصف [AC]</p>	<p>الشكل الأسّي للعدد المركب الدوران</p>												
	0,5×2														
	0,5														
	0,25×3														
	0,5														
	0,75														
06	0,5×2	<p>التمرين الثاني: (06 نقاط)</p> <p>1/ من $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ نجد $a = 1$ ثم من $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ نجد $b = 2$</p> <p>2/ أ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$</p> <p>ب) $(d_1) : y = 0$ و $(d_2) : x = 0$ مستقيمان متقاطعان لـ (C_f)</p> <p>ج) $g'(x) = \frac{-\ln 2x}{x^2}$ وإشارته</p> <p>0 $\xrightarrow{+}$ $\frac{1}{2}$ $\xrightarrow{-}$ $+\infty$</p> <p>g متزايدة تماما على $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ و متناقصة تماما على $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$</p> <p>جدول التغيرات:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>g'(x)</td> <td>+</td> <td> </td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>g(x)</td> <td>$-\infty$</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </table> <p>د) إنشاء (C_g)</p> <p>هـ) $h(x) = -\frac{\ln 2x}{2x}$ (1/3)</p> <p>ب) التحقق $g(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{\ln 2x}{2x^2}$ ثم $G(x) = -\frac{3+2\ln 2x}{4x}$</p>	x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	g'(x)	+		-	g(x)	$-\infty$	1	0	<p>دراسة الدالة اللوغاريتمية الدوال الأصلية</p>
	x		0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$										
	g'(x)		+		-										
	g(x)		$-\infty$	1	0										
	0,25+0,5														
	0,25×2														
	0,5+0,25														
	0,25														
0,25															
0,5															
0,5															
0,5															
0,75+0,25															

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	محاور الموضوع
مجموع	مجزأة		
05	0.5×2	التمرين الثالث: (05 نقاط) 1/ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ، $u_n > 1$	اتجاه تغير متتالية البرهان بالتراجع نهاية متتالية
	1	2/ حيث $u_n = f(n)$: $f(x) = 1 + \frac{1}{x(x+2)}$ ، $f'(x) = -\frac{2x+2}{x^2(x+2)^2} < 0$ من أجل $x > 0$ ومنه (u_n) متناقصة تماما على \mathbb{N}^*	
	0.5×2	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ ، (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة ،	
	0.25	3/ البرهان بالتراجع أن: $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$ من أجل : $n=1$ ، $p_1 = u_1 = \frac{4}{3}$	
	0.75	نفرض $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$ ولدينا : $p_{n+1} = \frac{2n+4}{n+3}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$	
	0.5×2	4/ $s_n = \ln p_n$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \ln 2$	
05	1	التمرين الرابع: (05 نقاط) 1/ صحيح لأن: $PGCD(21;14) = 7$ و 7 لا يقسم 40	التعداد الموافقة القواسم هندسة فضائية
	1	2/ خطأ لأن: $3421 + 1562 = 5313$	
	0.5×3	3/ خطأ لأن: $3^{66+6} = 3^6 [7]$ و $1+3+3^2+\dots+3^{2011} = \frac{3^{2012}-1}{2}$ حيث $\alpha \in \{0,1,2,3,4,5\}$ و $2012 = 6 \times 335 + 2$ ومنه $[7] = \frac{3^{66+6}-1}{2} = 4$	
	1	4/ صحيح لأن: $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي لـ (P) و \vec{u} شعاع توجيه (d) متعامدان وعليه $(P) \parallel (d)$ و $A \in (P)$ و $A \in (d)$ إذن $(P) \cap (d) = \emptyset$	
	0.5	ب) خطأ لأن: معادلة (Q) هي : $2x + y - z = 0$ <u>ملاحظة:</u> في كل سؤال تمنح 0.25 للاختيار الصحيح والباقي للتبرير.	

العلامة		عناصر الإجابة	مخاور الموضوع									
المجموع	مجزأة											
4.5	0.25×3	<p>الموضوع الثاني</p> <p>التمرين الأول: (04.5 نقطة)</p> <p>1/ \overline{AD} و \overline{BD} غير متوازيين فالنقاط A, B, D تعين مستويا</p> <p>2/ بما أن $\overline{CD} \cdot \overline{BD} = 0$ و $\overline{CD} \cdot \overline{AD} = 0$ فإن: (CD) يعامد (ABD)</p> <p>3/ (CD) عمودي على (AB) و (CI) عمودي على (AB) ومنه (AB) يعامد (CDI)</p> <p>ب) $\overline{AB}(1, -2, -1)$ نأخذ للمستوي (CDI) و C نقطة منه فإن المعادلة الديكارتيّة</p> $\lambda \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ <p>هي: $x - 2y - z + 10 = 0$ ، التمثيل الوسيطى لـ (AB)</p> <p>ج) $I\left(\frac{1}{6}, \frac{11}{3}, \frac{17}{6}\right)$</p> <p>$AB = \sqrt{6}$ ، $CD = \sqrt{59}$ ، $DI = \frac{\sqrt{354}}{6}$ /4</p>	<p>تطبيقات الجداء السلمي التمثيل الوسيطى لمستقيم الحجم</p>									
	1											
	0.5											
	0.5×2											
	0.5											
0.25×3												
04	0.5×2	<p>التمرين الثاني: (04 نقاط)</p> <p>1/ $L = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$</p> <p>ب) نبدأ $L^{12} = -1$ ومنه $L^{12} + 1 = 0$ و $(-4\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{12} + (5 + 3i)^{12} = 0$</p> <p>ج) $L^{4n} + L^{-4n} = (-1)^n + (-1)^n = 0$</p> <p>1/2 $z_A = -1 - 9i$</p> <p>ب) $z_C = 3 - 3i$</p>	<p>الشكل المثلثي ، موافق ، التشابه</p>									
	0.5×2											
	0.75											
	0.75											
	0.5											
7.5	0.25×2	<p>التمرين الثالث: (07.5 نقطة)</p> <p>أ- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$</p> <p>المشتق وإشارته : $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$</p> <p>جدول التغيرات:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f'(x)$</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">+</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f(x)$</td> <td style="padding: 5px;">-1</td> <td style="padding: 5px;">3</td> </tr> </table> <p>ب- المستقيمان المقاربان معادلتهما $y = 3$ ، $y = -1$</p>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f'(x)$		+	$f(x)$	-1	3	
	x		$-\infty$	$+\infty$								
	$f'(x)$			+								
	$f(x)$		-1	3								
0.25×2												
0.25												
0.25×2												

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع
المجموع	مجزأة		
0.5	0.25	(3) $f''(x) = \frac{4e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$ ، إشارته : $\xrightarrow{+ \quad 0 \quad -}$	الدوال العددية والمتتاليات
0.25	0.25	نقطة الانعطاف $\omega(0,1)$ معادلة المماس: $y = x + 1$	
0.25×2	0.25	(4) أ- تغيرات g : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$	
0.25	0.25	المشتق : $g'(x) = -\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ وهو سالب جدول التغيرات	
0.25	0.25	جدول التغيرات	
0.25	0.25×2	ب- g مستمرة ومنتقصة تماما على $[2,7; 2,8]$ $g(2,7) = 0,048$ و $g(2,8) = -0,029$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α وحيد حيث $g(\alpha) = 0$ و $2,7 < \alpha < 2,8$	
0.25	0.75	(5) أ- $f(x) = 0$ تكافئ $x = -\ln 3$ ب- رسم C_f و المنصف الأول والمماس.	
0.5	0.75	ب- 1- تمثيل : U_2, U_1, U_0 2- إثبات أن : $1 \leq U_n < \alpha$ $2,7 < \alpha < 2,8$ و $U_0 = 1$ لأن $1 \leq U_0 < \alpha$	
0.25	0.25	نفرض $1 \leq U_n < \alpha$ و f متزايد تماما ومنه $f(1) \leq f(U_n) < f(\alpha)$ ومنه $1 \leq U_{n+1} < \alpha$ و $f(1) > 1$ ومنه $1 \leq U_n < \alpha$ من أجل كل عدد طبيعي n	
0.25	0.25×2	3- المتتالية (U_n) متزايدة تماما : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) > 0$ لأن $1 \leq U_n < \alpha$ 4- (U_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$	
		التمرين الرابع: (04 نقاط)	
0.25	0.5	(1) $4 = -3[7]$	الموالات في Z
0.5	0.75	$A_3 = 6[7]$ ومنه $A_3 = -1[7]$ أي $A_3 = 2^3 + 3^3 + (-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 [7]$	
0.75	0.75	(2) $2^{3k+2} = 4[7]$ ، $2^{3k+1} = 2[7]$ ، $2^{3k} = 1[7]$	
0.75	0.75	$3^{6k+5} = 5[7]$ ، $3^{6k+4} = 4[7]$ ، $3^{6k+3} = 6[7]$ ، $3^{6k+2} = 2[7]$ ، $3^{6k+1} = 3[7]$ ، $3^{6k} = 1[7]$	
0.75	0.25	(3) $A_n = -1[7]$: إذا كان n فرديا فإن : $A_n = 2^n + 3^n + (-3)^n + (-2)^n + (-1)^n [7]$	
0.25	0.75	ومنه $A_{7011} = 6[7]$ ، $A_{7011} + 1$ يقبل القسمة على 7 ، الباقي هو 6	
0.75	0.75	(4) $A_{1432} = 6[7]$ ومنه $A_{1432} = 2 \times 2^{3 \times 477 + 1} + 2 \times 3^{6 \times 238 + 4} + 1[7]$	