

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين  
الموضوع الأول : (20 نقطة)

التمرين الأول: (04 نقاط)

- 1) أ) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^2 - 2z + 2 = 0$  حيث  $z$  هو المجهول.  
ب) استنتج في  $\mathbb{C}$  حلول المعادلة ذات المجهول  $z$ :  $(\bar{z} + 3)^2 - 2(\bar{z} + 3) + 2 = 0$  حيث  $\bar{z}$  مرافق  $z$ .
- 2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$   
النقط  $A, B, M$  لواحقتها  $(1-i), (1+i), z$  على الترتيب.
- أ- عين  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي حيث:  $z = 1 - i + ke^{i\frac{5\pi}{4}}$  عندما  $k$  يمسح  $\mathbb{R}^+$ .
- ب- عين  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي حيث:  $|z - 1 + i| = |z - 1 - i|$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1. أ) عين الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2009  
 $u_0$  و  $a$  عدنان طبيعيان غير معدومين،  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $a$  وحدها الأول  $u_0$  بحيث
- $$u_1^2 + u_2 + 35a^2 = 2009$$
- ب) احسب  $a$  و  $u_0$ .
- 2 نضع  $a = 7$  و  $u_0 = 2$ ، احسب  $u_n$  بدلالة  $n$
- 3 نضع  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
- أ) عبّر عن  $S_n$  بدلالة  $n$
- ب) عين العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون  $S_n = 800$

التمرين الثالث: (07 نقاط)

تعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$

وكن  $(\mathcal{B}_f)$  تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. احسب  $f(x) + f(-x)$  من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ، ثم استنتج أن النقطة  $\omega(0;1)$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$

2. ادرس تغيّرات الدالة  $f$  على المجال  $[0; +\infty[$  ثم استنتج جدول تغيّراتها على  $\mathbb{R}$ .

3. بيّن أن المستقيم ذي المعادلة  $y = x$  هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  عند  $+\infty$ .

احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+2)]$  ، استنتج المستقيم المقارب للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  عند  $-\infty$ .

4. بيّن أن للمعادلة  $f(x) = 0$  حلا وحيدا  $\alpha$  بحيث  $-1,7 < \alpha < -1,6$

5. ارسم  $(\mathcal{C}_f)$  من أجل  $x \in \mathbb{R}$

6. بيّن أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f(x) = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1}$

7. احسب  $\mathcal{A}(\alpha)$  مساحة الحيز من المستوي المحدّد بالمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  والمستقيمت ذات المعادلات :

$$x = \alpha \text{ و } x = 0 \text{ و } y = x + 2$$

بيّن أن  $\mathcal{A}(\alpha) = 2 \ln(-\alpha)$  ثم استنتج حصرا للعدد  $\mathcal{A}(\alpha)$

### التمرين الرابع: (05 نقاط)

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 2 \\ z = t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \text{ : بالجملة التالية معطى بالمتجه } \vec{u} \text{ مستقيم من الفضاء تمثيله الوسيطى معطى بالجملة التالية:}$$

$$P \text{ مستو معرف بالمعادلة } x + 3y + z + 1 = 0$$

عين في كل حالة من الحالات التالية الاقتراح أو الاقتراحات الصحيحة مع التعليل

$C_1$ : النقطة $\left(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ تنتمي إلى $(\Delta)$	$B_1$ : النقطة $(-1, 0, 2)$ تنتمي إلى $(\Delta)$	$A_1$ : النقطة $(1, 1, 2)$ تنتمي إلى $(\Delta)$	1
$C_2$ : الشعاع $\vec{u}(3, 1, 0)$ شعاع توجيه $(\Delta)$	$B_2$ : الشعاع $\vec{u}(1, 3, 1)$ شعاع توجيه $(\Delta)$	$A_2$ : الشعاع $\vec{u}\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ شعاع توجيه $(\Delta)$	2
$C_3$ : $(\Delta)$ يوازي $P$	$B_3$ : $(\Delta)$ يقطع $P$	$A_3$ : $(\Delta)$ محتو في $P$	3
$C_4$ : المستوي $Q_3$ ذو المعادلة $x - y + 2z + 5 = 0$ يعامد $P$	$B_4$ : المستوي $Q_2$ ذو المعادلة $2x - y + \frac{1}{2}z = 0$ يعامد $P$	$A_4$ : المستوي $Q_1$ ذو المعادلة $x + 3y + z - 3 = 0$ يعامد $P$	4
$C_5$ : المسافة بين النقطة $(1, 3, 0)$ والمستوي $P$ هي $\sqrt{11}$	$B_5$ : المسافة بين النقطة $O(0, 0, 0)$ والمستوي $P$ هي $\frac{\sqrt{11}}{11}$	$A_5$ : المسافة بين النقطة $D(1, 1, 1)$ والمستوي $P$ هي $\frac{6}{\sqrt{11}}$	5

## الموضوع الثاني : (20 نقطة)

### تمرين الأول: (04 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة: (1) .....  $z^2 - 6z + 18 = 0$

2. ليكن العدد المركب  $z_1$  حيث  $z_1 = 3 - 3i$

(  $i$  هو العدد المركب الذي طويلته 1 و  $\frac{\pi}{2}$  عمدة له)

(أ) اكتب  $z_1$  على الشكل الأسّي .

(ب) احسب طويلة العدد  $z_3$  وعمدة له حيث  $z_1 \times z_3 = 6(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$

استنتج قيمتي  $\cos \frac{\pi}{12}$  و  $\sin \frac{\pi}{12}$  .

3. نعتبر في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  ذات اللاحقات  $3+3i$  ،

$3-3i$  ،  $\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$  على الترتيب

(أ) عين قيم العدد الحقيقي  $\alpha$  حتى تقبل الجملة المثقلة  $\{(A;1), (B;-1), (C;\alpha)\}$  مرجحا نرسم له بالرمز  $G_\alpha$

(ب) عين مجموعة النقط  $G_\alpha$  لما يتغير  $\alpha$  في  $\mathbb{R}^*$  .

### تمرين الثاني: (05 نقاط)

1. نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقط  $A(1,1,2)$  ،  $B(-1,0,-2)$

$C(-1,0,-6)$

بين أن مجموعة النقط  $M(x,y,z)$  التي تحقق  $MA^2 - MB^2 = 1$  هي مستو عمودي على المستقيم  $(AB)$  نرسم له بالرمز  $P$  يطلب تعيين معادلة له.

2. لتكن  $S$  مجموعة النقط  $M(x,y,z)$  التي تحقق المعادلة  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$

برهن أن  $S$  هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها  $\Omega$  ونصف قطرها  $R$

3.  $G$  نقطة من الفضاء معرفة بالعلاقة:  $\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

(أ) عين إحداثيات  $G$  ثم تأكد أنها تنتمي إلى  $S$  .

(ب) اكتب معادلة المستوي  $Q$  الذي يمس سطح الكرة  $S$  في النقطة  $G$  .

### تمرين الثالث: (07 نقاط)

1.  $g$  دالة معرفة على  $[1; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = 2x + \ln x$

(أ) احسب نهاية الدالة  $g$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  .

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  .

(ج) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[1; +\infty[$  فإن  $g(x) \neq 0$  .

2. لتكن  $f$  دالة معرفة على  $[1; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \frac{6 \ln x}{2x + \ln x}$

$\frac{6 \ln x}{2 + \frac{\ln x}{x}}$

(أ) بين أنه يمكن كتابة  $f(x)$  على الشكل  $f(x) = \frac{x}{2 + \frac{\ln x}{x}}$  من أجل  $x \in [1; +\infty[$

(ب) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ، ماذا تستنتج؟

ج) ادرس اتجاه تغيّر الدالة  $f$   
 د) شكل جدول تغيّرات  $f$  ، ما هي قيم العدد الحقيقي  $k$  بحيث تقبل المعادلة  $f(x) = k$  حلين متمايزين؟  
 هـ) جد معادلة للمماس  $(\Delta_1)$  للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  عند النقطة التي فاصلتها 1 حيث  $(\mathcal{C}_f)$  يرمز إلى التمثيل البياني للدالة  $f$  في المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

3. نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $[1; +\infty[$  بالعلاقة:  $h(x) = f(e^x)$  و  $(\mathcal{C}_h)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق.  
 أ) شكل جدول تغيّرات الدالة  $h$ .  
 ب) جد معادلة للمماس  $(\Delta_2)$  للمنحنى  $(\mathcal{C}_h)$  عند النقطة التي فاصلتها 1.  
 ج) ارسم كلا من  $(\Delta_1)$  ،  $(\Delta_2)$  ،  $(\mathcal{C}_f)$  و  $(\mathcal{C}_h)$  في نفس المعلم السابق.

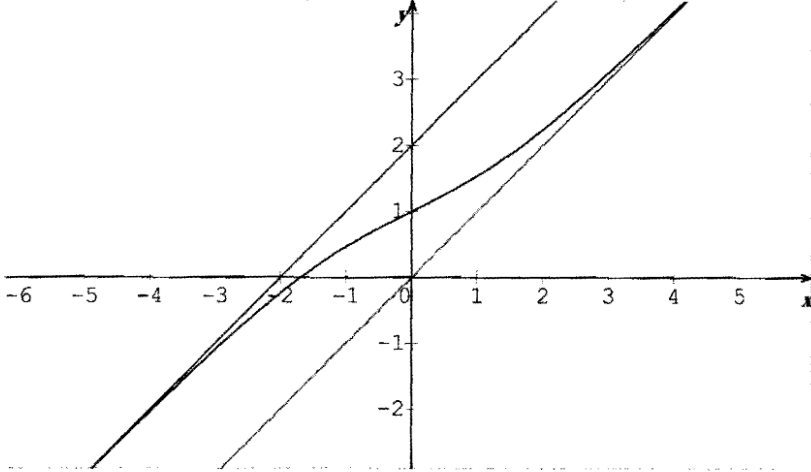
### التمرين الرابع: (04 نقاط)

1. حل المعادلة التفاضلية:  $y' = (\ln 2)y$
2. نسمي  $f$  الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق  $f(0) = 1$  ، عيّن عبارة  $f(x)$
3.  $n$  عدد طبيعي.  
 أ) ادرس بواقى القسمة الإقليدية على 7 للعدد  $2^n$  .  
 ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد  $f(2009) - 4$ .
4. أ) احسب، بدلالة  $n$  ، المجموع  $S_n$  حيث  $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$ .  
 ب) عيّن قيم العدد الطبيعي  $n$  التي يقبل من أجلها  $S_n$  القسمة على 7.

الإجابة النموذجية وسلم التقييم لامتحان شهادة البكالوريا دورة 2009  
المادة : رياضيات الشعبة: تقني رياضي

الإجابة النموذجية وسلم التقييم

العلامة		عناصر الإجابة	مجاور الموضوع
مجزأة	المجموع		
		الموضوع الأول	
04	1	التمرين الأول : (04 نقط) أ (1) $\Delta' = i^2$ ، $z_1 = 1+i$ ، $z_2 = 1-i$ .....	الأعداد المركبة
	1	ب) $z' = -2-i$ ، $z'' = -2+i$ .....	
	1	أ (2) $(\Gamma)$ هي نصف المستقيم الذي مبدؤه $A$ و شعاع توجيهه $\vec{v}$ يحقق $(\vec{i}, \vec{v}) = \frac{5\pi}{4}$ .....	
	1	ب) $(E)$ هي محور قطعة المستقيم $[AB]$ .....	
04	0.5	التمرين الثاني : (04نقط) أ- $2009 = 41 \times 49$ الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2009 هي 1 و 7 .....	المتتاليات
	0.5	ب- حساب $u_0$ : $u_0^2 \cdot a^2 + u_0 \cdot a^2 + 35a^2 = 2009$ .....	
	0.75	$\frac{2009}{a^2} = u_0^2 + u_0 + 35$ ومنه $a = 7$ أو $a = 1$ مرفوض .....	
	0.25	$a = 7; u_0 = 2$ .....	
	0.75	(2) عبارة $u_n$ بدلالة العدد $n$ .....	
	0.75	(3) أ- عبارة $u_n$ بدلالة $n$ .....	
0.5	ب- $n = 3$ .....		
0.5+0.5		التمرين الثالث (07 نقاط) أ (1) $f(x) + f(-x) = 2$ و $\omega(0;1)$ مركز تناظر .....	

العلامة		عناصر الإجابة	محااور الموضوع
المجموع	مجزأة		
07	0.5+0.25	(2) تغيرات الدالة : حساب النهاية و $f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$ .....	الدوال العددية
	0.25+0.5	جدول التغيرات و إشارة المشتق : .....	
	0.5	(3) تبيان أن المستقيم الذي معادلته $y = x$ مقارب عند $+\infty$ .....	
	0.5	حساب و استنتاج المستقيم المقارب عند $-\infty$ .....	
	0.25×4	(4) تبيان أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha$ : $-1.7 < \alpha < -1.6$ .....	
	0.5	إستعمال مبرهنة القيم المتوسطة .....	
	0.5	(5) رسم المنحنى .....	
			
	0.5	(6) تبيان أن $f(x) = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1}$ .....	
		(7) حساب المساحة :	
	0.5+0.25	$A(\alpha) = \int_{\alpha}^0 (y - f(x)) dx = [2x + 2 \ln(e^{-x} + 1)]_{\alpha}^0$ .....	
	0.5	$A(\alpha) = 2[\ln 2 - \ln(e^{\alpha} + 1)] = 2 \ln(-\alpha)$ .....	
	0.25	حصر العدد $A(\alpha)$ .....	
05	0.25×2+0.5	التمرين الرابع (05نقط) (1) $A_1; C_1$ مع التعليل .....	الهندسة الفضائية
	4×0.25	(2) $A_2$ مع التعليل (تعيين شعاع توجيه $(\Delta)$ ) .....	
	2×0.25+0.5	(3) $C_3$ مع التعليل ( $\vec{n} \perp \vec{u}$ و $2t - 1 + 3(-t + 2) + t + 1 + 1 = 0$ مستحيلة الحل) .....	
	1	(4) $C_4$ مع التعليل .....	
	0.5×2	(5) بإستعمال المسافة بين نقطة و مستوى .....	
		كل الإجابات صحيحة .	

الإجابة النموذجية وسلم التقييط لامتحان شهادة البكالوريا دورة 2009  
المادة : رياضيات الشعبة: تقني رياضي

الإجابة النموذجية وسلم التقييط

العلامة		عناصر الإجابة	محاو الموضوع
المجموع	مجزأة		
		الموضوع الثاني	
		التمرين الأول: (04 نقط)	
	0,25×3	1. حلا المعادلة : $\Delta = (6i)^2$ ، $z_1 = 3 - 3i$ ، $z_2 = 3 + 3i$ .....	
	0,5	2. (أ) $z_1 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ .....	
	0,5×2	(ب) $Arg(z_3) = \frac{\pi}{3}$ ، $ z_3  = \sqrt{2}$ .....	
	0,25×2	$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ، $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ .....	
	0,25	3. (أ) $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .....	
	0,25	(ب) $G_\alpha \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\alpha\sqrt{6}-12}{2\alpha} \right)$ .....	
04	0,75	مجموعة النقط $G_\alpha$ هي المستقيم ذي المعادلة $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ما عدا النقطة $D \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$ .....	
		التمرين الثاني: (05 نقط)	
	1	1. المجموعة المعطاة مميزة بالمعادلة: $2x + y + 4z = 0$ وهي مستو $p$ .....	
	0,25×2	الشعاع الناظم على $p$ هو $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ، $\overline{AB}(-2; -1; -4)$ .....	
	0,25×2	بالحساب نجد $\overline{AB} = -\vec{n}$ ومنه $p$ عمودي على $(AB)$ .....	
	0,5	2. معادلة $S$ هي $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$ .....	
	0,25×2	منه $S$ سطح كرة مركزها $\Omega(1,1,1)$ ونصف قطرها $R = 3$ .....	
	0,5	3. (أ) $G(1,1,-2)$ .....	
05	0,5	$G \in S$ لأن إحداثيات $G$ تحقق معادلة $S$ .....	

العلامة		عناصر الإجابة	محاوَر الموضوع					
المجموع	مجزأة							
	0,5×2	(ب) لتكن $M$ نقطة من المستوي $Q$ الذي يمس سطح الكرة $S$ في النقطة $G$ إذن $\overrightarrow{G\Omega GM} = 0$ ومنه نجد $z + 2 = 0$ .....						
	0.25	التمرين الثالث: (07 نقط) أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .....	الدوال العددية					
	0.25×3	(ب) $g'(x) = 2 + \frac{1}{x}$ ، $g'(x) > 0$ منه $g$ متزايدة تماما على $[1; +\infty[$ .....						
	0.25	(ج) لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $g(1) = 2$ و $g$ متزايدة تماما على $[1; +\infty[$ إذن $g(x) \geq 2$ و.هـ. م .....						
	0,5	2. أ) كتابة على الشكل $f(x) = \frac{6 \frac{\ln x}{x}}{2 + \frac{\ln x}{x}}$ .....						
	0.5+0.25	(ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ نستنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى معادلته $y = 0$ .....						
	0,5	(ج) $f'(x) = \frac{12 - 12 \ln x}{(2x + \ln x)^2}$ .....						
	0,25	$f'(x) \geq 0$ على المجال $[1; e]$ منه $f$ متزايدة تماما على $[1; e]$ .....						
	0,25	$f'(x) < 0$ على المجال $]e; +\infty[$ منه $f$ متناقصة تماما على $]e; +\infty[$ .....						
	0,5	(د) جدول التغيرات .....						
	0,5	تقبل المعادلة $f(x) = k$ حلين متمايزين إذا وفقط إذا كان $k \in ]0; f(e)[$ .....						
	0,5	(هـ) معادلة $(\Delta_1)$ .....						
	0,5	3- أ- جدول تغيراتها الدالة $h$ : <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>h(x)</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{6}{2e+1}</math></td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> </table>	$x$	1	$+\infty$	$h(x)$	$\frac{6}{2e+1}$	0
$x$	1	$+\infty$						
$h(x)$	$\frac{6}{2e+1}$	0						
	0,5	ب- معادلة المماس $(\Delta_2)$ .....						
07	01	ج- رسم $(\Delta_1)$ ، $(\Delta_2)$ ، $(\mathcal{L}_f)$ و $(\mathcal{L}_h)$ .....						
	0,5	التمرين الرابع: (04 نقط) حلول المعادلة هي $y = ke^{x(\ln 2)}$ .....	المعادلات التفاضلية والمواقفات					
	0,5	1. عبارة $f(x) = e^{x(\ln 2)}$ هي .....						
	0,25×3	أ.3) $2^{3k+2} \equiv 4[7]$ ، $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ ، $2^{3k} \equiv 1[7]$ .....						
	0,75	(ب) $f(2009) - 4 \equiv 0[7]$ .....						
	0,75	أ.4) $S_n = 2^{n+1} - 1$ .....						
04	0,25+0,5	(ب) $S_n \equiv 0[7]$ تكافئ $2^{n+1} \equiv 1[7]$ ومنه $n = 3k + 2$ .....						