الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2024

الشعبة: تسيير واقتصاد

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=0$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{5}{6}u_n-\frac{1}{3}$

1) احسب u_1 و u_2

2) أ) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $-2<u_n\leq 0$

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_n+2$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{6}$

ب) اكتب v_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n=2\left(\frac{5}{6}\right)^n-2$

ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، نضع: $S_n=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$

– احسب S_n بدلالة n ثمّ استنتج T_n بدلالة n

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كلّ حالة من الحالات الآتية مع التبرير:

1) المعادلة $2e^{2x}+3e^{x}-2=0$ ذات المجهول الحقيقي x :

أ) تقبل حلاً وحيدا. ب) تقبل حلّين مختلفين. ج) لا تقبل حلولا.

2) $\int_0^1\left(3x^2+3e^{3x}\right)dx$ يساوي:

أ) e^3+1 ب) e^3 ج) e^3-1

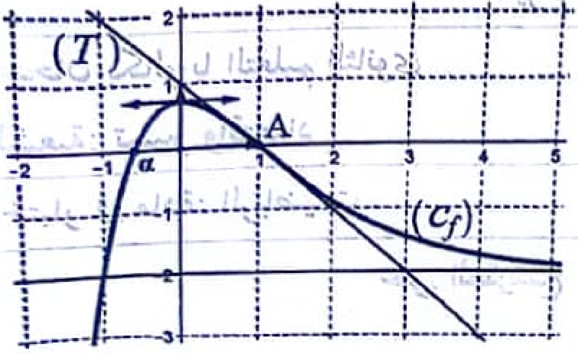
3) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=1$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=2u_n+1$

عبارة الحدّ العام u_n هي: أ) $2^{n+1}+1$ ب) 2^n-1 ج) $2^{n+1}-1$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(2x)}{1+\ln x}\right)$ تساوي: أ) $\ln 2$ ب) 1 ج) 2

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$



في الشكل المقابل ، (C_f) التمثيل البياني لدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ والذي يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما 1 و α و (T) مماس المنحني (C_f) في النقطة $A(1;0)$

بقراءة بيانية:

1) عيّن $f(1)$ و $f'(1)$ ثمّ أعط معادلة للمماس (T)

2) برّر أنّ A نقطة انعطاف لـ (C_f)

3) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)\times f'(x)=0$

4) F دالّة أصلية للدّالة f على $\mathbb{R}$

– حدّد حسب قيم x إشارة $f(x)$ ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة F

التمرين الرابع: (08 نقاط)

f الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=1+\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

2) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{-4\ln x}{x^3}$

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,52<\alpha<0,53$

4) أ) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1$

ب) احسب $f(e)$ ثمّ ارسم كلاً من (Δ) و (C_f)

5) أ) أثبت أنّ $H:x\mapsto\dfrac{-3-2\ln x}{x}$ دالة أصلية للدّالة $h:x\mapsto\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$ على المجال $]0;+\infty[$

ب) استنتج $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين اللّذين معادلتاهما: $x=1$ ، $x=e$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=8x^3+1$

الدّالة الأصلية للدّالة f على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند 1 هي الدّالة F حيث :

أ) $F(x)=x^4+x-2$ ب) $F(x)=2x^4+x-3$ جـ) $F(x)=2x^4-2x$

2) g الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

القيمة المتوسطة للدّالة g على المجال $[-\ln 2\,;\ln 2]$ هي:

أ) $2\ln 2$ ب) $\dfrac{1}{2\ln 2}$ جـ) $\dfrac{1}{2}$

3) للمعادلة $\ln(x-2)+\ln(x-4)=3\ln 2$ حل وحيد في المجال $]4\,;+\infty[$ هو:

أ) 6 ب) 8 جـ) 9

4) الدّالة h المعرّفة على $]-1\,;1[$ بـ: $h(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ هي دالة:

أ) زوجية. ب) فردية. جـ) لا زوجية ولا فردية.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

P الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $P(X)=(2X-1)(X^2+X-2)$

1) ادرس إشارة $P(X)$ حسب قيم X من $\mathbb{R}$

2) أ) حلّ في المجال $]0\,;+\infty[$ المعادلة: $(2\ln x-1)\left((\ln x)^2+\ln x-2\right)=0$

ب) استنتج في المجال $]0\,;+\infty[$ حلول المتراجحة: $(2\ln x-1)\left((\ln x)^2+\ln x-2\right)<0$

3) حلّ في المجال $]-1\,;+\infty[$ المعادلة: $(\ln(x+1))^2+\ln(x+1)-2=0$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=4$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{3}{4}u_n-\dfrac{1}{2}$

1) احسب u_1 و u_2

2) أ) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n>-2$

ب) أثبت أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + 2$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.

ب) اكتب v_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = 6\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2$

جـ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) احسب بدلالة n كلّا من المجموعين S_n و T_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n \quad \text{و} \quad T_n = \frac{1}{2+u_0} + \frac{1}{2+u_1} + \frac{1}{2+u_2} + \dots + \frac{1}{2+u_n}$$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) g الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$

1) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g

2) احسب $g(0)$ ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$

II) f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + (x+2)e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) اكتب معادلة لـ(T) مماس المنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

4) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ)

5) أ) بيّن أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-1{,}69 < \alpha < -1{,}68$

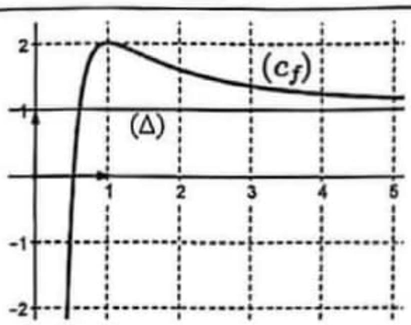
ب) ارسم (T) و (Δ) ثمّ (C_f)

6) أ) بيّن أنّ الدّالة $H: x \mapsto -(x+3)e^{-x}$ هي دالة أصلية للدّالة $h: x \mapsto (x+2)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$

ب) احسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$y = x$ ، $x = 0$ ، $x = 2$

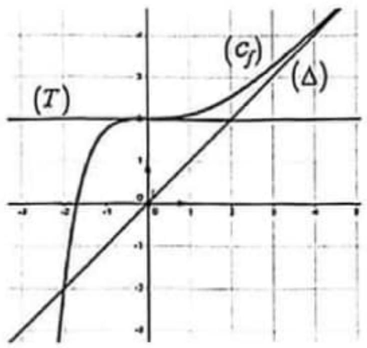
	عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة
	التمرين الأول (04 نقاط)		
1)	$u_1=-\frac{1}{3}$ و $u_2=-\frac{11}{18}$	$0,25\times 2$	0,5
2)	أ) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $-2<u_n\le 0$	$0,75+0,25$	1,5
	ب) $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{6}(u_n+2)$ ، المتتالية (u_n) متناقصة تماما.	$0,25\times 2$	
3)	أ) $v_{n+1}=\frac{5}{6}v_n$ ومنه: (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{6}$	0,5	1,25
	ب) $v_n=2\left(\frac{5}{6}\right)^n$ ، $u_n=2\left(\frac{5}{6}\right)^n-2$	$0,25\times 2$	
	جـ) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-2$	0,25	
4)	$S_n=12\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\right]$ ، $T_n=12\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\right]-2(n+1)$	$0,25+0,5$	0,75
	التمرين الثاني (04 نقاط)		
1)	الإجابة: أ) للمعادلة حلّ وحيد هو $-\ln 2$	$0,5\times 2$	1
2)	الإجابة: ب) $\int_0^1\left(3x^2+3e^{3x}\right)dx=\left[x^3+e^{3x}\right]_0^1=e^3$	$0,5\times 2$	1
3)	الإجابة: جـ) $u_n=2^{n+1}-1$ ، u_0 يُحقّق الحالة جـ) فقط.	$0,5\times 2$	1
4)	الإجابة: ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(2x)}{1+\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{\ln 2}{\ln x}+1}{\frac{1}{\ln x}+1}\right)=1$	$0,5\times 2$	1
	التمرين الثالث (04 نقاط)		
1)	$f(1)=0$ ، $f'(1)=-1$ ، $(T): y=-x+1$	$0,5+0,25\times 2$	1
2)	من الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) : A نقطة انعطاف لـ (C_f)	1	1
3)	$f(x)=0$ أو $f'(x)=0$ ومنه : $S=\{\alpha;0;1\}$	1	1
4)	إشارة $f(x)$ $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & \alpha & & 1 & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array}$	0,5	1
	F متناقصة تماما على كلّ من $]-\infty;\alpha]$ و $[1;+\infty[$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;1]$	$0,25\times 2$	
	التمرين الرابع (08 نقاط)		
1)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=-\infty$	$0,5\times 2$	1,5
	التفسير الهندسي.	$0,25\times 2$	
2)	أ) من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{-4\ln x}{x^3}$	1	2,25

	ب) f متزايدة تماما على $]0;1]$ ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$ جدول التغيّرات $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & 2 & \searrow & 1 \end{array}$	$0,25\times 2$ $0,75$	
3)	f مستمرّة ومتزايدة تماما على $[0,52\,;0,53]$ و $f(0,52)\times f(0,53)<0$ ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,52<\alpha<0,53$	1	1
4)	أ) $f(x)-1=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$ لمّا $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$: (C_f) أسفل (Δ) ولمّا $x>\frac{1}{\sqrt{e}}$: (C_f) أعلى (Δ) $(\Delta)\cap(C_f)=\left\{A\left(\frac{1}{\sqrt{e}};1\right)\right\}$	$0,25$ $0,75$	$2,25$
	ب) $f(e)=1+\frac{3}{e^2}$ الرسم: 	$0,25$ 1	
5)	أ) من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ ، $H'(x)=h(x)$	$0,5$	1
	ب) $\int_1^e \dfrac{1+2\ln x}{x^2}\,dx=[H(x)]_1^e=3-\frac{5}{e}$ ومنه: $\mathcal{A}=\left(3-\frac{5}{e}\right)u.a$	$0,5$	

ملاحظة: تُقبل جميع طرائق الحلّ الصحيحة مع التقيّد بسلّم التنقيط.

	عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
	التمرين الأول (04 نقاط)		
1)	الإجابة: ب) ، (التبرير غير مطلوب)	1	1
2)	الإجابة: جـ) ، (التبرير غير مطلوب)	1	1
3)	الإجابة: أ) ، (التبرير غير مطلوب)	1	1
4)	الإجابة: ب) ، (التبرير غير مطلوب)	1	1
	التمرين الثاني (04 نقاط)		
1)	$P(X)$ سالب تماما على المجالين $]-\infty;-2[$ و $\left]\frac{1}{2};1\right[$ وموجب تماما على المجالين $\left]-2;\frac{1}{2}\right[$ و $]1;+\infty[$ وينعدم عند كلّ من -2 ، $\frac{1}{2}$ ، 1	1	1
2)	أ) مجموعة الحلول هي: $\left\{e^{-2}\,;\,e\,;\,\sqrt{e}\right\}$	1	2
	ب) مجموعة الحلول هي: $\left]0\,;\,e^{-2}\right[\cup\left]\sqrt{e}\,;\,e\right[$	1	
3)	مجموعة الحلول هي: $\left\{e^{-2}-1\,;\,e-1\right\}$	1	1
	التمرين الثالث (04 نقاط)		
1)	$u_1=\frac{5}{2}$ ، $u_2=\frac{11}{8}$	0,5	0,5
2)	أ) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n>-2$	$0,75+0,25$	1
	ب) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{4}(u_n+2)$ ومنه : (u_n) متناقصة تماما.	0,5	0,5
3)	أ) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n$ ، $q=\frac{3}{4}$	0,5	1,5
	ب) $v_n=6\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، $u_n=v_n-2=6\left(\frac{3}{4}\right)^n-2$	$0,25+0,5$	
	جـ) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-2$	0,25	
4)	$S_n=24\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$ ، $T_n=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}-1\right)$	$0,25\times2$	0,5
	التمرين الرابع (08 نقاط)		
I(1)	من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ فإنّ $g'(x)=xe^{-x}$ g متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$	0,75 0,5	1,25
2)	$g(0)=0$ ومنه: من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ فإنّ $g(x)\geq0$	$0,25\times2$	0,5
II(1)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$	$0,5+0,25$	0,75
2)	أ) من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ فإنّ $f'(x)=g(x)$	0,5	1

<table>
<tr><td></td><td>ب) الدّالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$</td><td>0,25</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>جدول التغيرات:

$$\begin{array}{|c|ccccc|}\hline x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & 2 & \nearrow & +\infty \\ \hline\end{array}$$</td><td>0,25</td><td></td></tr>
<tr><td>(3</td><td>$(T): y=2$</td><td>0,25</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(4</td><td>أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$
ومنه $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$</td><td>0,5</td><td rowspan="2">1,25</td></tr>
<tr><td>ب) من $f(x)-x=(x+2)e^{-x}$ نجد: (C_f) أسفل (Δ) على $]-\infty;-2[$
وأعلى (Δ) على $]-2;+\infty[$ ويقطعه في النقطة $A(-2;-2)$</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(5</td><td>أ) f مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1,69;-1,68]$
و $f(-1,69)\times f(-1,68)<0$
ومنه: للمعادلة $f(x)=0$ حلّ وحيد α حيث $-1,69<\alpha<-1,68$</td><td>1</td><td rowspan="3">2</td></tr>
<tr><td>ب) الرسم:
رسم (Δ) و (T)

</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>رسم (C_f)</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(6</td><td>أ) من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $H'(x)=h(x)$</td><td>0,5</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>ب) $\mathcal{A}=\int_0^2(f(x)-x)dx=H(2)-H(0)=\left(3-\frac{5}{e^2}\right)u.a$</td><td>0,5</td></tr>
</table>

ملاحظة: تُقبل جميع طرائق الحلّ الصحيحة مع التقيّد بسلّم التنقيط.