الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة: تسيير واقتصاد
دورة: **2021**

اختبار في مادة: الرياضيات
المدة: **03** سا و**30** د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـِ: $u_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1$

1) أ . احسب الحدود u_0 ، u_1 و u_2

ب. تَحقَّق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

جـ. استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

2) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - 1$

أ . احسب v_0 ثمّ اكتب عبارة v_n بدلالة n

ب. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسيّة أساسها $\frac{1}{4}$

3) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ وَ $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

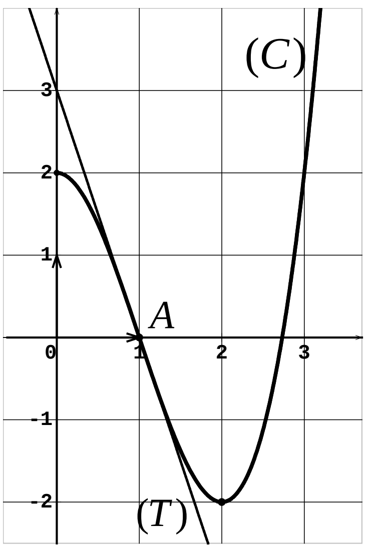
أ . احسب بدلالة n عبارة S_n

ب. استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $S'_n = n + \frac{11}{3} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الدّالة العددية g معرّفة على $[0;+\infty[$ بتمثيلها البياني (C)

(T) المماس للمنحنى (C) في النّقطة $A(1;0)$ (الشّكل المقابل)



أجب بصح أو خطأ مع التبريـر في كلّ حالة من الحالات التالية :

1) العددان $g(2)$ و $g(3)$ مختلفان في الإشارة.

2) من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;2[$: $g'(x) > 0$

3) معامل توجيه المماس (T) يساوي: -3

4) كلّ دالة أصلية G للدّالة g على $[0;+\infty[$ متزايدة تماما على $[0;2]$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لكلّ سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2x+1}{1+x+x^2}\right)$ هي:

أ) 0 ب) -2 جـ) 1

2) عبارة الحدّ العام للمتتالية الحسابية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأوّل 2 و أساسها $\dfrac{1}{2}$ هي:

أ) $2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ب) $2+\frac{1}{2}n$ جـ) $2+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

3) الدّالة العددية h معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=2x-1+\dfrac{3}{x}$ ، تمثيلها البياني (C) في مستو منسوب إلى معلم يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته هي:

أ) $y=2x-1$ ب) $y=2x$ جـ) $y=2x+1$

4) الدّالة العددية g معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=2x+1-\dfrac{1}{x^2}$

دالتها الأصلية G على $]0;+\infty[$ التي تنعدم من أجل القيمة 1 معرّفة بـ:

أ) $G(x)=x^2+x-\dfrac{1}{x}$ ب) $G(x)=x^2+x-1-\dfrac{1}{x}$ جـ) $G(x)=x^2+x+\dfrac{1}{x}-3$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+1}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ . بيّن أنّ f دالة زوجية.

ب. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ وفسّر النّتيجتين هندسيا.

جـ. ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1$

2) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{10x}{(x^2+1)^2}$.

ب. استنتج أنّ f متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ . اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النّقطة التي فاصلتها 2

ب. جِدْ إحداثيات نقطتي تقاطع (C) مع حامل محور الفواصل.

4) ارسم (Δ) ، (T) و (C)

5) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\dfrac{|x^2-4|}{x^2+1}$ ، (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ . بيّن أنّ: من أجل كلّ x من $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$ ، $g(x)=f(x)$

و من أجل كلّ x من $[-2;2]$: $g(x)=-f(x)$

ب. شكّل جدول تغيّرات الدالة g

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأوّل u_0 حيث: $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

1) أ . برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

ب. بيِّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

جـ. استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

2) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - 3$

أ . احسب v_0 ثمّ اكتب عبارة v_n بدلالة n

ب. بيِّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

3) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ . احسب بدلالة n عبارة S_n

ب. استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S'_n = 3n + 6 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الدّالة العددية f معرّفة على $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ بجدول تغيّراتها المقابل.

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم.

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كلّ حالة من الحالات التالية:

1) $y = -1$ هي معادلة للمستقيم المقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

2) معامل توجيه المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة A ذات الفاصلة 1 يساوي 0

3) النقطة $B(3\,;1)$ تنتمي إلى (C)

4) $f(1442) < f(2021)$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لكلّ سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير.

1) الدّالة العددية f المعرّفة على $]-2\,;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ ، دالتها المشتقة f' معرّفة بـ:

أ) $f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2}$ **ب)** $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$ **جـ)** $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$

2) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]2\,;+\infty[$ بِـ: $g(x)=1+\dfrac{3}{x-2}$

و (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم.

معادلة المماس لِـ (C_g) في النّقطة ذات الفاصلة 3 هي:

أ) $y=3x-5$ **ب)** $y=-3x+13$ **جـ)** $y=-3x+5$

3) a عدد حقيقي، الأعداد a ، $a+2$ ، $a+6$ بهذا الترتيب هي حدود متتابعة لمتتالية هندسية من أجل:

أ) $a=2$ **ب)** $a=-2$ **جـ)** $a=4$

4) المتتالية الحسابية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=2n+1$ ، نضع: $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$

من أجل كلّ عدد طبيعي n المجموع S_n يساوي:

أ) n^2 **ب)** $(n+1)^2$ **جـ)** $\dfrac{n(n+1)}{2}$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+2}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ (**الوحدة** $2cm$)

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّر النّتيجتين هندسيا.

2) من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ نضع: $g(x)=f(x)-1$

أ . ادرس حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

ب. استنتج وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1$

3) أ . بيِن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{2(x+1)(x-3)}{\left(x^2+x+2\right)^2}$

ب. بيِن أنّ f متزايدة تماما على كلّ من $]-\infty;-1]$ و $[3\,;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[-1\,;3]$

جـ. شكِّل جدول تغيّرات الدّالة f

4) أ . اكتب معادلة لِـ (T) مماس المنحني (C) في النّقطة التي فاصلتها 1

ب. تَحقَّق أنّ (T) يقطع (C) في النّقطة $A(-2\,;\frac{5}{2})$

5) ارسم (Δ) ، (T) و (C)

6) h الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $h(x)=\dfrac{x^2-|x|+4}{x^2+|x|+2}$ ، (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

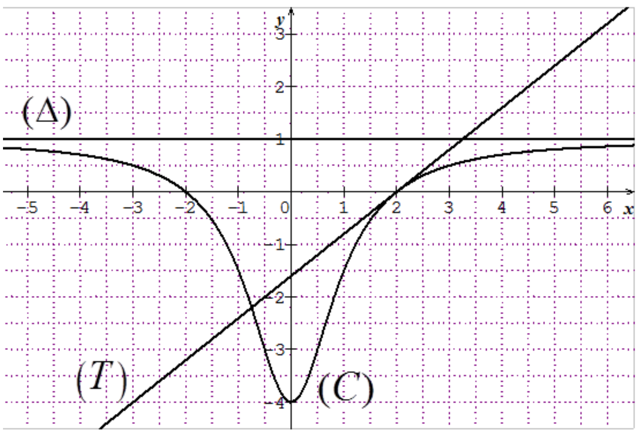
أ . بيِن أنّ الدّالة h زوجية.

ب. تَحقَّق أنّه من أجل كل x من المجال $[0\,;+\infty[$: $h(x)=f(x)$

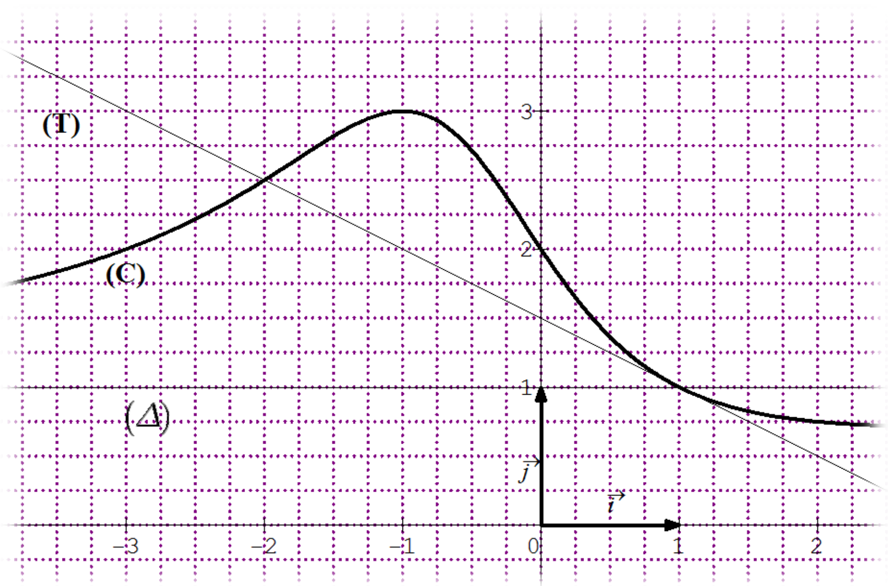
جـ. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C) و ارسمه.

انتهى الموضوع الثاني

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
التمرين الأول: (04 نقاط)		
1) أ . حساب: u_0 ، u_1 و u_2	**0,25x3**	**01,75**
ب. التَحقّق أنّ : $u_{n+1}-u_n=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$	**0.50**	
جـ. (u_n) متناقصة تماما.	**0.50**	
2) أ . $v_0=2$	**0,25**	**01,25**
عبارة v_n بدلالة n : $v_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^n$	**0,50**	
ب (v_n) متتالية هندسيّة أساسها $\frac{1}{4}$: $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$	**0 ,50**	
3) أ . $S_n=\frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$	**0.75**	**01.00**
ب. $S'_n=S_n+n+1=n+\frac{11}{3}-\frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$	**0.25**	
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
1) صح ، التبرير.	**0,50x2**	**01,00**
2) خطأ ، التبرير.	**0,50x2**	**01,00**
3) صح ، التبرير.	**0,50x2**	**01,00**
4) خطأ ، التبرير.	**0,50x2**	**01,00**
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
1) الجواب الصحيح أ) ، التبرير.	**0,50x2**	**01,00**
2) الجواب الصحيح **ب)** ، التبرير.	**0,50x2**	**01,00**
3) الجواب الصحيح أ) ، التبرير.	**0,50x2**	**01,00**
4) الجواب الصحيح **جـ)** ، التبرير.	**0,50x2**	**01,00**
التمرين الرابع: (08 نقاط)		
1) أ . f دالة زوجية	**0.50**	**02.50**
ب. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$	**0,50x2**	
المستقيم ذو المعادلة : $y=1$ مقارب لـ (C)	**0,25**	
جـ. لدينا: من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $f(x)-1=-\frac{5}{x^2+1}$	**0,50**	
و منه (C) أسفل (Δ)	**0,25**	

<table>
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>مجموعة</th></tr>
<tr><td>2) أ . $f'(x)=\dfrac{10x}{(x^2+1)^2}$</td><td>0,75</td><td rowspan="2">02,25</td></tr>
<tr><td>ب. $f'(x)$ من إشارة $10x$
f متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$
جدول تغيّرات f :
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>1 ↘</td><td>-4</td><td>↗ 1</td></tr>
</table></td><td>0,50
0,50
0.50</td></tr>
<tr><td>3) أ . $y=\frac{4}{5}x-\frac{8}{5}$ هي معادلة (T) المماس لـ(C) في النّقطة التي فاصلتها 2</td><td>0,75</td><td rowspan="2">01,50</td></tr>
<tr><td>ب. $f(x)=0$ تكافئ $(x=2)$ أو $(x=-2)$
إحداثيات نقطتي تقاطع (C) مع حامل محور الفواصل هي $(2;0)$ و $(-2;0)$</td><td>0,50
0,25</td></tr>
<tr><td>4) رسم (Δ) ، (T)
رسم (C)

</td><td>0,25x2
0,50</td><td>01,00</td></tr>
<tr><td>5) أ .
– دراسة إشارة x^2-4 وكتابة $\left|x^2-4\right|$ دون رمز القيمة المطلقة.
– من أجل كلّ x من $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$ ، $g(x)=f(x)$
– من أجل كلّ x من $[-2;2]$: $g(x)=-f(x)$</td><td>0,50</td><td rowspan="2">00,75</td></tr>
<tr><td>ب. تشكيل جدول تغيّرات g
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>1 ↘</td><td>0 ↗</td><td>4 ↘</td><td>0 ↗</td><td>1</td></tr>
</table></td><td>0.25</td></tr>
</table>

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
التمرين الأول: (04 نقاط)		
1) أ . البرهان بالتراجع : $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$	**0.50+0.25**	**1.75**
ب. $u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$	**0.50**	
جـ. المتتالية (u_n) متناقصة تماما.	**0.50**	
2) أ . $v_0 = 2$ و $v_n = u_n - 3 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$	**0.50+0.25**	**01.50**
ب. (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$	**0,75**	
3) أ . $S_n = 3\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$	**0.50**	**0.75**
ب. $S'_n = S_n + 3(n+1) = 3n + 6 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$	**0,25**	
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
1) خطأ ، التبرير.	**0,50x2**	**01,00**
2) صح ، التبرير.	**0,50x2**	**01,00**
3) خطأ ، التبرير.	**0,50x2**	**01,00**
4) صح ، التبرير.	**0,50x2**	**01,00**
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
1) الإجابة الصحيحة **جـ)** ، التبرير.	**0,50x2**	**01,00**
2) الإجابة الصحيحة **ب)** ، التبرير.	**0,50x2**	**01,00**
3) الإجابة الصحيحة أ) ، التبرير.	**0,50x2**	**01,00**
4) الإجابة الصحيحة **ب)** ، التبرير.	**0,50x2**	**01,00**

<table>
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>مجموعة</th></tr>
<tr><td colspan="3">التمرين الرابع: (08 نقاط)</td></tr>
<tr><td>1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ،</td><td>0,50x2</td><td rowspan="2">01.25</td></tr>
<tr><td>المستقيم ذو المعادلة : $y=1$ مقارب لـ (C)</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>2) أ . $g(x)>0$ على $]-\infty;1[$ و $g(x)<0$ على $]1;+\infty[$ و $g(1)=0$</td><td>0,25x3</td><td rowspan="2">01,25</td></tr>
<tr><td>ب. استنتاج وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)</td><td>0,25x2</td></tr>
<tr><td>3) أ . $f'(x)=\dfrac{2(x+1)(x-3)}{\left(x^2+x+2\right)^2}$</td><td>0,75</td><td rowspan="4">02.25</td></tr>
<tr><td>ب. إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $2(x+1)(x-3)$</td><td>0.50</td></tr>
<tr><td>f متزايدة تماما على كلّ من $]-\infty;-1]$ ، $[3;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[-1;3]$</td><td>0.50</td></tr>
<tr><td>جـ . جدول تغيرات f
$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -1 & & 3 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & 1 & \nearrow & 3 & \searrow & \frac{5}{7} & \nearrow & 1 \end{array}$$</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>4) أ . كتابة معادلة لِـ (T) : $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$</td><td>0.75</td><td rowspan="2">01,25</td></tr>
<tr><td>ب. التحقّق أنّ (T) يقطع (C) في النّقطة $A\left(-2;\dfrac{5}{2}\right)$:</td><td>0 ,50</td></tr>
<tr><td>5) رسم (Δ) ، (T)
رسم (C)

</td><td>2x0,25

0,50</td><td>01,00</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>مجموعة</th></tr>
<tr><td>6) أ . h زوجية.</td><td>0.25</td><td rowspan="3">01.00</td></tr>
<tr><td>ب. التّحقُّق أنّه من أجل كل x من المجال $\left[0 ; +\infty\right[$: $h(x) = f(x)$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>جـ. شرح كيفية رسم $\left(C_h\right)$ انطلاقا من (C)
رسم $\left(C_h\right)$</td><td>0,25
0.25</td></tr>
</table>