

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

في رف من رفوف مكتبة "ثانوية النجاح"، يوجد 150 كتاب رياضيات و 50 كتاب فلسفة، حيث 40% من كتب الرياضيات و 70% من كتب الفلسفة تخص شعبة التسيير والاقتصاد.

نختار عشوائيا من الرف كتابا واحدا.

عين مع التبرير، الجواب الصحيح الوحيد من بين الأجوبة المقترحة، في كل حالة من الحالات التالية:

(1) احتمال أن يكون الكتاب المختار كتاب رياضيات هو:

$$(أ) \frac{3}{4} \quad (ب) \frac{2}{5} \quad (ج) \frac{1}{150}$$

(2) احتمال أن يكون الكتاب المختار خاصا بشعبة التسيير والاقتصاد هو:

$$(أ) 0,24 \quad (ب) 0,475 \quad (ج) 0,21$$

(3) احتمال أن يكون الكتاب المختار كتاب رياضيات خاصا بشعبة التسيير والاقتصاد هو:

$$(أ) 0,15 \quad (ب) 0,4 \quad (ج) 0,3$$

(4) إذا كان الكتاب المختار يخص شعبة التسيير والاقتصاد، فإن احتمال أن يكون كتاب رياضيات هو:

$$(أ) \frac{2}{75} \quad (ب) \frac{12}{19} \quad (ج) \frac{3}{10}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الجدول التالي يعطي تطور النسب المئوية من ميزانية إحدى الجامعات، والمخصّصة للإنفاق على البحث

العلمي بين سنتي 2005 و 2012:

السنة	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
النسبة المئوية y_i %	3,3	3,8	4,5	4,7	5	5,2	5,7	6,2

(1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$ في معلم متعامد.

(2) جد إحداثيتي G النقطة المتوسطة لسحابة النقط، ثم مثلها.

3) بيّن أنّ المعادلة المختصرة لمستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي: $y = 0,38x + 3,09$ ، ثمّ ارسمه.

4) بفرض أنّ تغيّر النسب المئوية يبقى على هذه الوتيرة في السنوات القادمة.

أ- قدر النسبة المئوية لإنفاق هذه الجامعة على البحث العلمي في سنة 2015.

ب- في أية سنة تصبح النسبة المئوية المتوقعة للإنفاق على البحث العلمي لهذه الجامعة هي 9,93% ؟

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n - \frac{2a+4}{3} \text{ ؛ حيث } a \text{ وسيط حقيقي.}$$

1- عيّن قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2- نفرض $a \neq \frac{5}{2}$. عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية، ثمّ احسب عندئذ u_n ومجموع n حدا

الأولى من المتتالية.

3- عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية، ثمّ عيّن في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها.

4- نفرض $a = 4$. برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، فإنّ: $u_n = 3^n + 2$ ، ثمّ بيّن أنّ:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على \mathbb{R}^* كما يلي: $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. فسّر النتيجةين هندسياً.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.

2- أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 1$ ، مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) تحقق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، فإنّ: $f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$ ، ثمّ استنتج أنّ

المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = 2x - 2$ ، مقارب للمنحنى (C_f) .

3- بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، فإنّ: $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}$.

استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4- مثلّ بيانياً كلا من (Δ) و (Δ') و (C_f) .

5- احسب العدد: $\int_1^2 f(x) dx$ ، ثمّ فسره هندسياً.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6$.

1 أ- احسب الحدود: u_1 ، u_2 ، u_3 ، و u_4 .

ب- هل المتتالية (u_n) رتيبة على \mathbb{N} ؟ برّر إجابتك.

2 أ- بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$ ،

ب- استنتج أن المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = u_n - 4$ هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ج) اكتب v_n ، ثم u_n بدلالة n .

د) بيّن أن (u_n) متقاربة.

3) باستعمال عبارة u_n ، تأكد ثانية من نتيجة السؤال 1) ب .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

وُضِعَت أسئلة امتحان شفوي في علبتين ممتاليتين A و B . العلبة A تحتوي على 4 أسئلة في الثقافة العامة،

و 6 أسئلة في مادة الاختصاص؛ والعلبة B تحتوي على 3 أسئلة في الثقافة العامة، و 7 أسئلة في مادة

الاختصاص. (عمليات سحب الأسئلة واختيار إحدى العلبتين متساوية الاحتمال)

1) يختار مترشح إحدى العلبتين ليسحب منها عشوائياً، سؤالاً واحداً.

أ- شكّل شجرة الاحتمالات المتوازنة.

ب- ما هو احتمال سحب المترشح لسؤال في مادة الاختصاص من العلبة A ؟

ج- ما هو احتمال سحب المترشح لسؤال في مادة الاختصاص من العلبة B ؟

د- ما هو احتمال سحب المترشح لسؤال في مادة الاختصاص؟

هـ- علماً أن المترشح سحب سؤالاً في الثقافة العامة، ما احتمال أن يكون من العلبة B ؟

2) مترشح آخر يسحب عشوائياً سؤالاً واحداً من العلبة A وسؤالاً واحداً من العلبة B .

بيّن أن احتمال سحب سؤالين في مادة الاختصاص هو 0,42.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الجدول التالي يعطي تطور عدد مستعملي الهاتف النقال في مدينة ما من سنة 2006 إلى سنة 2012:

السنة	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
x_i رتبة السنة	1	2	3	4	5	6	7
y_i عدد المستعملين	21400	32400	48000	75600	121200	207000	280000

1) أ- مثل سحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$ في معلم متعامد (نأخذ على محور الفواصل $1cm$ لكل سنة وعلى

محور الترتيب $1cm$ لكل 20000 مستعمل).

ب- هل يمكن تسوية سحابة النقط السابقة بتعديل خطي؟ برّر إجابتك.

(2) بوضع: $z_i = \ln y_i$ من أجل $i \in \{1;2;3;4;5;6;7\}$. (تدور النتائج إلى 10^{-2})

أ- أنقل الجدول التالي على ورقة الإجابة، ثم أكمله:

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$							

ب- مثل سحابة النقط $M'_i(x_i; z_i)$ في معلم متعامد آخر مبدؤه $O'(0;9)$ وبوحدة $1cm$ لكل سنة على

محور الفواصل و $5cm$ لكل وحدة على محور الترتيب.

ج- جد إحداثيتي G النقطة المتوسطة لسحابة النقط $M'_i(x_i; z_i)$.

د- بين أن معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا للسلسلة $(x_i; z_i)$ هي: $z = 0,44x + 9,51$.

(3) أ- تحقق أن: $y = k e^{0,44x}$ ، حيث k عدد حقيقي يطلب تعيينه. (تدور النتيجة إلى الوحدة)

ب- بفرض أن عدد مستعملي الهاتف النقال بهذه المدينة يتزايد بنفس الوتيرة، قدر عددهم سنة 2014.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة العددية g معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x^2}$.

(1) عيّن، تبعا لقيم x ، إشارة $g(x)$.

(2) أ- تحقق أنه، من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $g(x) = -1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$.

ب- استنتج الدوال الأصلية للدالة g على $]0; +\infty[$.

(II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]0; 8]$ كما يلي: $f(x) = 3 - x - \frac{2}{x} + \ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- تحقق أن f هي الدالة الأصلية للدالة g على المجال $]0; 8]$ والتي تتعدم عند 1.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; 8]$.

ج- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

د- شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين، أحدهما α ، حيث: $3,8 < \alpha < 3,9$.

(3) مثل بيانيا (C_f) .

(III) الدالة العددية h معرفة على $]-\frac{2}{3}; 2]$ كما يلي: $h(x) = f(3x + 2)$.

(1) بين أنه إذا كان $-\frac{2}{3} < x \leq 0$ فإن $0 < 3x + 2 \leq 2$ وإذا كان $0 \leq x \leq 2$ فإن $2 \leq 3x + 2 \leq 8$.

(2) احسب $h'(x)$. (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)

(3) شكّل جدول تغيرات h .

العلامة		عناصر الإجابة															
مجموع	مجزأة																
04	1	<p style="text-align: right;">التمرين الأول: (04 نقط)</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>السؤال</th> <th>الجواب</th> <th>التبرير</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>أ</td> <td>$p_1 = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>ب</td> <td>$p_2 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{7}{10} = 0,475$</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>ح</td> <td>$p_3 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = 0,3$</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>ب</td> <td>$p_4 = \frac{0,3}{\frac{19}{40}} = \frac{12}{19}$</td> </tr> </tbody> </table>	السؤال	الجواب	التبرير	1	أ	$p_1 = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$	2	ب	$p_2 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{7}{10} = 0,475$	3	ح	$p_3 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = 0,3$	4	ب	$p_4 = \frac{0,3}{\frac{19}{40}} = \frac{12}{19}$
	السؤال		الجواب	التبرير													
	1		أ	$p_1 = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$													
	2		ب	$p_2 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{7}{10} = 0,475$													
3	ح	$p_3 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = 0,3$															
4	ب	$p_4 = \frac{0,3}{\frac{19}{40}} = \frac{12}{19}$															
1	1																
1	1																
1	1																
04	1	<p style="text-align: right;">التمرين الثاني: (04 نقط)</p> <p>(1) تمثيل سحابة النقط</p> <p>(2) $G(4,5 ; 4,8)$ ، تمثيلها</p> <p>(3) $a = \frac{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i^2 - \bar{x}^2} = 0,38$ ، $b = \bar{y} - a\bar{x} = 3,09$ ، $(y = 0,38x + 3,09)$</p> <p>رسم المستقيم</p> <p>(4) أ) $x = 11$ (رتبة 2015) ومنه $y = 7,27$ ، النسبة المئوية 7,27%</p> <p>ب) $y = 9,93$ نجد $x = 18$ أي سنة 2022</p>															
	3×0.25																
	0.75+0.25																
	0.25																
05	0.5	<p style="text-align: right;">التمرين الثالث: (05 نقط)</p> <p>(1) من $u_{n+1} = u_n = 3$ نجد $a = \frac{5}{2}$</p> <p>(2) (u_n) حسابية معناه $\frac{2a+1}{3} = 1$ ومنه $a = 1$ ، $u_n = 3 - 2n$ ، $S_1 = n(4 - n)$</p> <p>(3) (u_n) هندسية معناه $2a + 4 = 0$ ومنه $a = -2$ ، $u_{50} = 3(-1)^{50} = 3$ ، $S_2 = \frac{3}{2} [1 - (-1)^{50}] = 0$</p> <p>(4) لما $n = 0$ لدينا $u_0 = 3 = 3^0 + 2$ ، نفرض $u_n = 3^n + 2$ ونبرهن $u_{n+1} = 3^{n+1} + 2$</p> <p>فإن $u_{n+1} = 3(3^n + 2) - 4 = 3^{n+1} + 2$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3^n + 2$..</p> <p>$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n) + 2(n + 1)$</p> <p>..... $= \frac{3^{n+1} - 1}{2} + 2n + 2 = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$</p>															
	0.5×3																
	0.5×3																
	1																
0.5	0.5																

العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
07		التمرين الرابع: (07 نقط)
	0.25×3 (1) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ، $x=0$ معادلة مستقيم مقارب
	0.25×2 (ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
	0.5 (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = 0$ ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)
	0.5 (ب) التحقق $f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$
	0.5 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 2)] = 0$ ومنه (Δ') مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)
	0.5+0.75 (3) $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2} = \frac{(2e^x - 1)(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$ وإشارته
	0.5	الدالة f متزايدة على كل من المجالين $]-\infty; -\ln 2]$ و $[\ln 2; +\infty[$ ومتناقصة على كل
	0.25	من المجالين $]-\ln 2; 0[$ و $]0; \ln 2]$
	1	جدول التغيرات
1	(4) الرسم	
0.25	(5)	$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1} \right) dx$ $= \left[x^2 - 2x + \ln(e^x - 1) \right]_1^2 = 1 + \ln(e + 1)$ <p>هندسيا هو مساحة الحيز من المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$ ، $x = 2$ ، $x = 1$</p>

العلامة		عناصر الإجابة																
مجموع	مجزأة																	
04		التمرين الأول: (04 نقط)																
	4×0.25	1) أ- $u_1 = 3, u_2 = \frac{9}{2}, u_3 = \frac{15}{4}, u_4 = \frac{33}{8}$																
	0.5	ب- (u_n) ليست رتيبة على \mathbb{N} لأن مثلا الحدود u_0, u_1, u_2 ليست مرتبة																
	0.5	2) أ) $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$																
	3×0.25	ب) $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$ و $v_0 = 2$																
	2×0.25	ج) $u_n = 4 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n, v_n = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$																
0.25	د) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ ومنه (u_n) متقاربة																	
2×0.25	3) $u_{n+1} - u_n = -3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ إشارته ليست ثابتة فالمتتالية غير رتيبة																	
05		التمرين الثاني: (05 نقط)																
	1	1) أ) الشجرة المتوازنة																
	0.75	ب) $p(s \cap A) = p(A) \cdot p_A(s) = 0,5 \times 0,6 = 0,3$																
	0.75	ج) $p(s \cap B) = p(B) \cdot p_B(s) = 0,5 \times 0,7 = 0,35$																
	0.75	د) $p(s) = p(s \cap A) + p(s \cap B) = 0,65$																
	1	هـ) $p_{\bar{s}}(B) = \frac{p(B \cap \bar{s})}{p(\bar{s})} = \frac{0,5 \times 0,3}{1 - 0,65} = \frac{3}{7}$																
0.75	2) $p_1 = 0,6, p_2 = 0,7$ ومنه $p = 0,6 \times 0,7 = 0,42$ احتمال سحب سؤال في الاختصاص من A و p_2 احتمال سحب سؤال في الاختصاص من B والحادثتان مستقلتان																	
04		التمرين الثالث: (04 نقط)																
	0.5	1) أ- تمثيل سحابة النقط																
	0.25	ب- لا يمكن تسويتها بتعديل خطي لأن السحابة ليس لها شكلا متطاولا																
	0.5	2) أ) <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>x_i</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>z_i</td> <td>9.97</td> <td>10.39</td> <td>10.78</td> <td>11.23</td> <td>11.71</td> <td>12.24</td> <td>12.54</td> </tr> </table>	x_i	1	2	3	4	5	6	7	z_i	9.97	10.39	10.78	11.23	11.71	12.24	12.54
	x_i	1	2	3	4	5	6	7										
	z_i	9.97	10.39	10.78	11.23	11.71	12.24	12.54										
0.5	ب) تمثيل السحابة $M'_i(x_i; z_i)$																	
2×0.25	ج) $G(4; 11.27)$																	
0.75	د) المعادلة $z = 0,44x + 9,51$																	
2×0.25	3) أ) $y = e^z$ ومنه $y = e^{9.55} \times e^{0.44x}$. $k = 13494$																	
2×0.25	ب) رتبة سنة 2014 هي $x = 9$ ومنه $y = 707859$																	

العلامة		عناصر الإجابة												
مجموع	مجزأة													
		<p>التمرين الرابع: (07 نقط)</p> <p>(I) إشارة $g(x)$: $\frac{x}{g(x)} \left \begin{array}{c c c c} 0 & 2 & +\infty \\ \hline + & 0 & \end{array} \right.$</p>												
	4×0.25													
	0.25 (2) أ) $g(x) = -1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$												
	0.5 ب) $c \in \mathbb{R} , G(x) = -x - \frac{2}{x} + \ln x + c$												
	0.5+0.25 (II) 1) أ) $f'(x) = g(x)$ و $f(1) = 0$												
	0.5 ب) f متزايدة تماما على $[0; 2]$ ومتناقصة تماما على $[2; 8]$												
	2×0.25 ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ ومنه $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب												
	0.5 د) جدول التغيرات $f(8) = -\frac{21}{4} + 3\ln 2$												
	0.25 2) لدينا $f(1) = 0$												
07	0.25 تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة												
	0.25 $f(3,9) = -0,05$ ، $f(3,8) = 0,008$												
	0.5 3) تمثيل المنحنى (C_f)												
	0.25 (III) 1) إذا كانت $-\frac{2}{3} < x \leq 0$ فإن $0 < 3x + 2 \leq 2$												
	0.25 إذا كانت $0 < x \leq 2$ فإن $2 < 3x + 2 \leq 8$												
	0.5 2) $h'(x) = 3f'(3x + 2)$												
	0.75	<p>3) جدول تغيرات h :</p> <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\frac{2}{3}$</td> <td>0</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>$h'(x)$</td> <td></td> <td>+</td> <td>0 -</td> </tr> <tr> <td>$h(x)$</td> <td>$-\infty$</td> <td>$\ln 2$</td> <td>$-\frac{21}{4} + 3\ln 2$</td> </tr> </table>	x	$-\frac{2}{3}$	0	2	$h'(x)$		+	0 -	$h(x)$	$-\infty$	$\ln 2$	$-\frac{21}{4} + 3\ln 2$
x	$-\frac{2}{3}$	0	2											
$h'(x)$		+	0 -											
$h(x)$	$-\infty$	$\ln 2$	$-\frac{21}{4} + 3\ln 2$											